



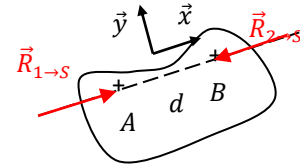
TD05 ACTIONS MECANIKES

CORRECTION

Exercice 1 : SOLIDE SOUMIS A DEUX GLISSEURS

Question 1 : Démontrer qu'un solide soumis à deux forces en équilibre à nécessairement ses forces extérieures de même direction, de même norme et de sens opposé.

Soit un solide S à l'équilibre, soumis à 2 forces.
 On isole S .
 On fait l'Inventaire des Actions Mécaniques Extérieures.



$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow S} = \begin{matrix} A \\ \vec{0} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{1 \rightarrow S} \\ \vec{0} \end{matrix} \right. = \begin{matrix} B \\ \vec{0} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{1 \rightarrow S} \\ \vec{BA} \wedge \vec{R}_{1 \rightarrow S} \end{matrix} \right. \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{2 \rightarrow S} = \begin{matrix} B \\ \vec{0} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{2 \rightarrow S} \\ \vec{0} \end{matrix} \right.$$

car $\vec{M}_{1 \rightarrow S}(B) = \vec{M}_{1 \rightarrow S}(A) + \vec{BA} \wedge \vec{R}_{1 \rightarrow S}$

On applique le Principe Fondamental de la Statique en B.

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow S} + \mathcal{F}_{2 \rightarrow S} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} B \\ \vec{0} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{1 \rightarrow S} + \vec{R}_{2 \rightarrow S} = \vec{0} \\ \vec{BA} \wedge \vec{R}_{1 \rightarrow S} = \vec{0} \end{matrix} \right. \rightarrow \begin{matrix} \vec{R}_1 \text{ et } \vec{R}_2 \text{ sont de même direction, de même norme et sens contraire} \\ \rightarrow \text{les deux droites d'actions sont identiques et passent par (AB)} \end{matrix}$$

donc $\mathcal{F}_{1 \rightarrow S} = -\mathcal{F}_{2 \rightarrow S} = \begin{matrix} A \\ \vec{0} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} F \vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix} \right.$ Il n'y a plus qu'une inconnue, l'intensité de la force.

Question 2 : Etudier l'équilibre d'un vérin.

On étudie l'équilibre de $V = \{tige, corps\}$.

Hypothèse : Le vérin V est monté entre 2 liaisons sphérique parfaites. On néglige l'action de la pesanteur sur le vérin.

V est un ensemble de solides en équilibre soumis à 2 forces, donc le Principe Fondamental de la Statique (PFS) en B donne :

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow S} = -\mathcal{F}_{2 \rightarrow S} = \begin{matrix} A \\ \vec{0} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} F \vec{u} \\ \vec{0} \end{matrix} \right.$$

Question 3 : Quels autres systèmes matériels peut-on rencontrer qui sont soumis à deux glisseurs ?

- Une bouée
- Une bielle dont on a négligé la masse
- Un vérin dont on a négligé la masse
- Une roue avant de voiture non motorisée
- ...

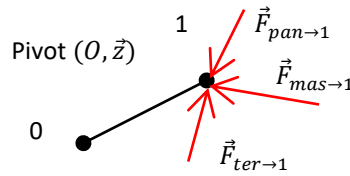
Question 4 : Que se passe-t-il pour un solide en équilibre soumis à trois forces ?

Si un solide est en équilibre et est soumis à 3 forces, alors ces forces sont coplanaires et de somme nul, de plus elles sont concourantes en un même point ou parallèles et la somme des moments est nulle.

Exercice 2 : BALANCE ROMAINE

Question 1 : Déterminer $F(\text{pan} \rightarrow 1)$ et les actions de liaisons $X_{0 \rightarrow 1}$, $Y_{0 \rightarrow 1}$ uniquement en fonction de $F(\text{mas} \rightarrow 1)$ a et b .

Etape 1 :



Etape 2 : 2 points pour l'isolement
On isole 1.

Etape 3 :

On fait le BAME :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{pan} \rightarrow 1} &= A \begin{cases} -F_{\text{pan} \rightarrow 1} \vec{y} \\ \vec{0} \end{cases} = O \begin{cases} -F_{\text{pan} \rightarrow 1} \vec{y} \\ aF_{\text{pan} \rightarrow 1} \vec{z} \end{cases} \\ \mathcal{F}_{\text{mas} \rightarrow 1} &= B \begin{cases} -F_{\text{mas} \rightarrow 1} \vec{y} \\ \vec{0} \end{cases} = O \begin{cases} -F_{\text{mas} \rightarrow 1} \vec{y} \\ -bF_{\text{mas} \rightarrow 1} \vec{z} \end{cases} \\ \mathcal{F}_{\text{ter} \rightarrow 1} &= O \begin{cases} -mg \vec{y} \\ \vec{0} \end{cases} \\ \mathcal{F}_{0 \rightarrow 1} &= O \begin{cases} X_{0 \rightarrow 1} \vec{x} + Y_{0 \rightarrow 1} \vec{y} + Z_{0 \rightarrow 1} \vec{z} \\ L_{0 \rightarrow 1} \vec{x} + M_{0 \rightarrow 1} \vec{y} + \vec{0} \end{cases} \end{aligned}$$

2 points pour le BAME

Exemple de notation concours :
La question compte pour 10/200

Etape 4 :

2 points pour citer le théorème ou le principe

On applique le Principe Fondamental de la Statique (PFS) en O :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{pan} \rightarrow 1} + \mathcal{F}_{\text{mas} \rightarrow 1} + \mathcal{F}_{\text{ter} \rightarrow 1} + \mathcal{F}_{0 \rightarrow 1} &= \vec{0} \\ \Rightarrow O \begin{cases} -F_{\text{ext}1 \rightarrow 1} \vec{y} \\ aF_{\text{ext}1 \rightarrow 1} \vec{z} \end{cases} + O \begin{cases} -F_{\text{ext}2 \rightarrow 1} \vec{y} \\ -bF_{\text{ext}2 \rightarrow 1} \vec{z} \end{cases} + O \begin{cases} -mg \vec{y} \\ \vec{0} \end{cases} + O \begin{cases} X_{0 \rightarrow 1} \vec{x} + Y_{0 \rightarrow 1} \vec{y} + Z_{0 \rightarrow 1} \vec{z} \\ L_{0 \rightarrow 1} \vec{x} + M_{0 \rightarrow 1} \vec{y} + \vec{0} \end{cases} &= \vec{0} \end{aligned}$$

2 points pour l'expression littérale

$$\Rightarrow \begin{cases} X_{0 \rightarrow 1} = 0 & \text{TRS selon } \vec{x} \\ -F_{\text{pan} \rightarrow 1} - F_{\text{mas} \rightarrow 1} - mg + Z_{0 \rightarrow 1} = 0 & \text{TRS selon } \vec{y} \\ Z_{0 \rightarrow 1} = 0 & \text{TRS selon } \vec{z} \\ L_{0 \rightarrow 1} = 0 & \text{TMS autour de } (O, \vec{x}) \\ M_{0 \rightarrow 1} = 0 & \text{TMS autour de } (O, \vec{y}) \\ aF_{\text{pan} \rightarrow 1} - bF_{\text{mas} \rightarrow 1} = 0 & \text{TMS autour de } (O, \vec{z}) \end{cases}$$

$$F_{\text{pan} \rightarrow 1} = \frac{b}{a} F_{\text{mas} \rightarrow 1} = \frac{0,4}{0,1} 20 = 80N$$

2 points pour le résultat avec unité et conclusion

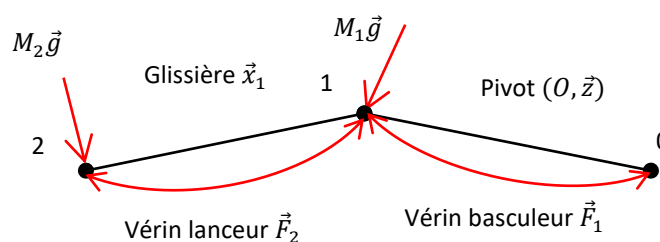
Remarque : La balance est à l'équilibre verticalement, toutes les forces verticales se compensent, la balance n'accélère pas verticalement.

Remarque : La balance est à l'équilibre en rotation, toutes les forces font autant tourner dans le sens positif que dans le sens négatif, la balance n'accélère pas en rotation. La somme des moments est nulle.

Exercice 3 : SYSTEME DE POSE RAPIDE DE TRAVURES

Remarque : Un camion militaire peut peser 20-50 tonnes, on utilise des poutres en acier avec une section en I pour résister au fléchissement.

Question 1 : Réaliser le graphe d'analyse de ce système.



Remarque : dans un exercice de statique ou de dynamique, on commence toujours par tracer un graphe de structure, ce n'est pas demandé dans l'énoncé du sujet de concours.

Question 2 : Choisir l'isolement qui permettra, par application du principe fondamental de la statique, de déterminer l'expression de F_2 permettant de maintenir l'ensemble (2) en équilibre statique par rapport au basculeur (1). Faire l'inventaire, sous forme de torseurs, des actions mécaniques extérieures à cet isolement

Remarque : On isole l'extrémité de la chaîne ouverte en conservant l'actionneur à dimensionner comme action extérieure.

On isole 2.

On fait le BAME :

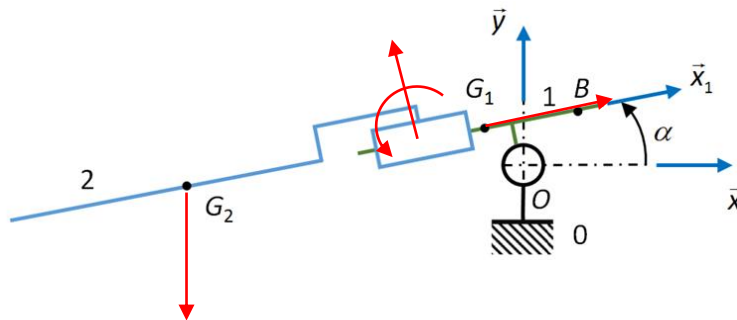
$$\mathcal{F}_{ter \rightarrow 2} = G_2 \begin{Bmatrix} -M_2 g \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}^{vér} = G_2 \begin{Bmatrix} F_2 \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2} = \forall P \begin{Bmatrix} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{1 \rightarrow 2}(P) \end{Bmatrix} \text{ telle que } \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{x}_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}_{1 \rightarrow 2} = \forall P \begin{Bmatrix} \vec{0} + Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y}_1 + Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z}_1 \\ L_{1 \rightarrow 2} \vec{x}_1 + M_{1 \rightarrow 2} \vec{y}_1 + N_{1 \rightarrow 2} \vec{z}_1 \end{Bmatrix}$$

Question 3 : Après avoir choisi l'équation du principe fondamental de la statique qui sera utilisée, représenter sur le schéma ci-dessous (flèches pour les forces résultantes et arcs de cercle orientés pour les moments de force résultante) les actions mécaniques utilisées dans son application.

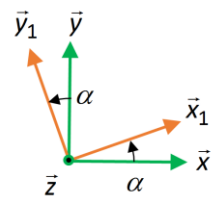
On applique le Théorème de la Résultante Statique (TRS) en projection \vec{x}_1 à 2.



Question 4 : Déterminer l'expression de F_2 permettant de maintenir l'ensemble 2 en équilibre statique par rapport au basculeur 1. En déduire les valeurs maximale et minimale de F_2 lors d'une phase de dépose.

On applique le Théorème de la Résultante Statique (TRS) en projection sur \vec{x}_1

$$\begin{aligned} \vec{R}_{2 \rightarrow 2} \cdot \vec{x}_1 &= 0 \\ \Rightarrow -M_2 g \vec{y} \cdot \vec{x}_1 + F_2 \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1 + \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{x}_1 &= 0 \\ \Rightarrow F_2 &= M_2 g \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ \Rightarrow F_2 &= M_2 g \sin \alpha \end{aligned}$$



Le vérin devra donc fournir un effort de plus en plus important lorsque α augmente.

Pour $\alpha = 0^\circ$, $F_2 = 0 \text{ N}$

Pour $\alpha = 10^\circ$, $F_2 \approx 18800.9,81 \sin 10^\circ \approx 32025 \text{ N} \approx 32 \text{ kN}$

Question 5 : Choisir l'isolement qui permettra, par application du principe fondamental de la statique, de déterminer l'expression de F_1 permettant d'assurer la phase de dépose. Faire l'inventaire, sous forme de torseurs, des actions mécaniques extérieures à cet isolement.

On isole {1,2}.

Remarque : dans une chaîne ouverte, on fait des isolements depuis l'extérieur.

On fait le BAME :

$$\mathcal{F}_{ter \rightarrow 1} = G_1 \begin{Bmatrix} -M_1 g \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

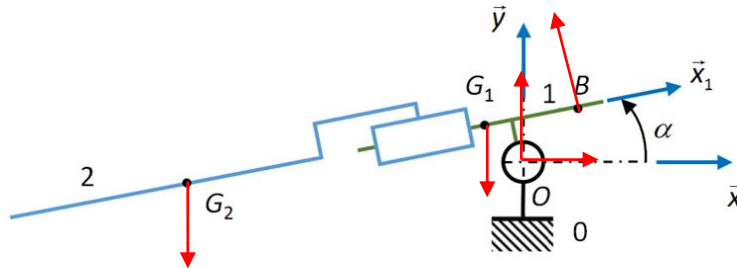
$$\mathcal{F}_{ter \rightarrow 2} = G_2 \begin{Bmatrix} -M_2 g \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{F}_{0 \rightarrow 1}^{vér} = B \begin{Bmatrix} F_1 \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{F}_{0 \rightarrow 1} = \begin{cases} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{0 \rightarrow 1}(O) \end{cases} \text{ avec } \vec{M}_{0 \rightarrow 1}(O) \cdot \vec{z} = 0$$

Question 6 : Après avoir choisi l'équation du principe fondamental de la statique qui sera utilisée, représenter sur le schéma ci-dessous (flèches pour les forces résultantes et arcs de cercle orientés pour les moments de force résultante) les actions mécaniques utilisées dans son application.

On applique donc le Théorème du Moment Statique (TMS) en O en projection sur \vec{z} .



Question 7 : Déterminer l'expression de F_1 permettant d'assurer la phase de dépose. En déduire les valeurs maximale et minimale de F_1 lors de cette phase.

Le Théorème du Moment Statique (TMS) en O en projection sur \vec{z} :

$$\vec{M}_{1+2 \rightarrow 1+2}(O) \cdot \vec{z} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{M}_{ter \rightarrow 1}(O) \cdot \vec{z} + \vec{M}_{ter \rightarrow 2}(O) \cdot \vec{z} + \vec{M}_{0 \rightarrow 1}^{vér.}(O) \cdot \vec{z} + \vec{M}_{0 \rightarrow 1}(O) \cdot \vec{z} = 0$$

$$\vec{M}_{ter \rightarrow 1}(O) = \vec{M}_{ter \rightarrow 1}(G_1) + \vec{OG}_1 \wedge -M_1 g \vec{y} = (-a \vec{x}_1 + b \vec{y}_1) \wedge -M_1 g \vec{y} = M_1 g a \cos \alpha \vec{z} + M_1 g b \sin \alpha \vec{z}$$

$$\vec{M}_{ter \rightarrow 2}(O) = \vec{M}_{ter \rightarrow 2}(G_2) + \vec{OG}_2 \wedge -M_2 g \vec{y} = (-x \vec{x}_1 + b \vec{y}_1) \wedge -M_2 g \vec{y} = M_2 g x \cos \alpha \vec{z} + M_2 g b \sin \alpha \vec{z}$$

$$\vec{M}_{0 \rightarrow 1}^{vér.}(O) = \vec{M}_{0 \rightarrow 1}^{vér.}(B) + \vec{OB} \wedge F_1 \vec{x}_1 = (c \vec{x}_1 + b \vec{y}_1) \wedge F_1 \vec{x}_1 = c F_1 \vec{z}$$

Remarque : Un moment est de la forme \pm force \times distance. On peut vérifier ce résultat sur le schéma en regardant la distance normale entre la droite d'action et le point, ainsi que le signe avec le sens dans lequel la force fait tourner.

$$\Rightarrow M_2 g (x \cos \alpha + b \sin \alpha) + M_1 g (a \cos \alpha + b \sin \alpha) + c F_1 = 0$$

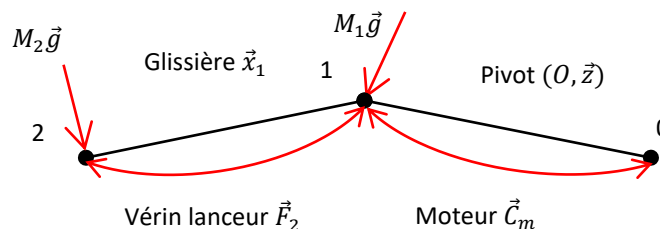
$$\Rightarrow F_1 = \frac{-1}{c} (M_2 g (x \cos \alpha + b \sin \alpha) + M_1 g (a \cos \alpha + b \sin \alpha))$$

La force F_1 est négative, correspondant à une résultante suivant $-\vec{y}_1$.

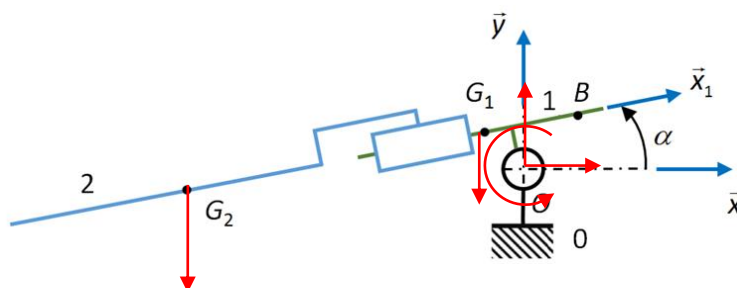
$$\text{Pour } \alpha = 0^\circ, F_1 \approx \frac{-1}{2} (18800.9,81 (8) + 7500.9,81 (0,3)) \approx -748 \text{ kN}$$

$$\text{Pour } \alpha = 10^\circ, F_1 \approx \frac{-1}{2} (18800.9,81 (8 \cos 10^\circ + 0,2 \sin 10^\circ) + 7500.9,81 (0,3 \cos 10^\circ + 0,2 \sin 10^\circ)) \approx -742 \text{ kN}$$

Question 8 : Déterminer l'expression de C_m permettant d'assurer la phase de dépose. En déduire les valeurs maximale et minimale de C_m lors de cette phase



$$\mathcal{F}_{0 \rightarrow 1}^{mot} = \begin{cases} \vec{0} \\ C_m \vec{z} \end{cases}$$



Même démarche, on applique le TMS en O en projection sur \vec{z} .

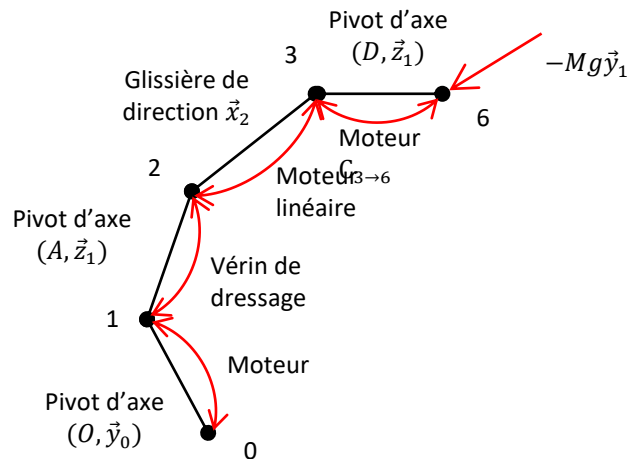
$$C_m = -(M_2 g (x \cos \alpha + b \sin \alpha) + M_1 g (a \cos \alpha + b \sin \alpha)) \approx -(18800.9,81 (8) + 7500.9,81 (0,3)) \approx -1480 \text{ kNm}$$

Lorsqu'une valeur de force est très importante, on peut choisir un vérin car il est facile de mettre une grande section, une grande pression hydraulique et une grande distance pour le moment.

Lorsqu'une valeur de couple est très importante, il n'est en revanche pas pertinent de choisir un moteur car le réducteur serait trop encombrant et trop coûteux, à moins d'avoir la place de mettre une grande couronne comme dans certaines grues.

Exercice 4 : ECHELLE EPAS

Question 1 : Réaliser le graphe d'analyse de ce système. Dans notre étude, on cherche à déterminer, entre autres, l'effort que doit fournir le vérin de dressage. On le fera donc apparaître uniquement sous la forme d'une action mécanique et non pas comme un ensemble de solides $\{tige 5, corps 4\}$.



Question 2 : Déterminer le couple $C_{3 \rightarrow 6}$ qui doit être fourni afin de garder le système en équilibre.

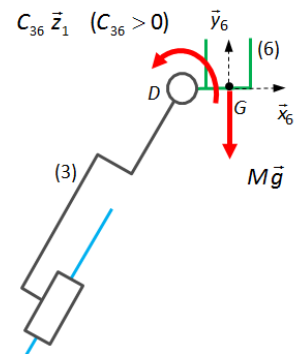
On isole 6.

On fait le BAME :

$$\mathcal{F}_{ter \rightarrow 6} = G \begin{cases} -Mg\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{3 \rightarrow 6}^{mot} = D \begin{cases} \vec{0} \\ C_{3 \rightarrow 6}\vec{z}_1 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{3 \rightarrow 6} = D \begin{cases} \vec{R}_{3 \rightarrow 6} \\ \vec{M}_{3 \rightarrow 6}(D) \end{cases} \text{ avec } \vec{M}_{3 \rightarrow 6}(D) \cdot \vec{z}_1 = 0$$



On applique le Théorème du Moment Statique (TMS) en D en projection sur \vec{z}_1 .

$$\begin{aligned} \vec{M}_{6 \rightarrow 6}(D) \cdot \vec{z}_1 &= 0 \\ \Rightarrow \vec{M}_{ter \rightarrow 6}(D) \cdot \vec{z}_1 + \vec{M}_{3 \rightarrow 6}^{mot}(D) \cdot \vec{z}_1 + \vec{M}_{3 \rightarrow 6}(D) \cdot \vec{z}_1 &= 0 \\ \Rightarrow -e Mg + C_{3 \rightarrow 6} + 0 &= 0 \\ \Rightarrow C_{3 \rightarrow 6} &= eMg \end{aligned}$$

Le couple $C_{3 \rightarrow 6}$ est positif, correspondant à un couple dans le sens direct $+\vec{z}_1$.

$$AN : C_{3 \rightarrow 6} = 2650 \text{ Nm}$$

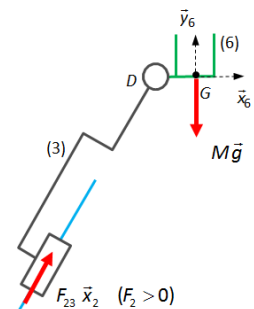
Question 3 : Déterminer la force $F_{2 \rightarrow 3}$ qui doit être fournie afin de garder le système en équilibre.

On isole $\{3,6\}$.

On fait le BAME :

$$\mathcal{F}_{ter \rightarrow 6} = G \begin{cases} -Mg\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{2 \rightarrow 3}^{mot} = D \begin{cases} F_{2 \rightarrow 3}\vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{cases}$$



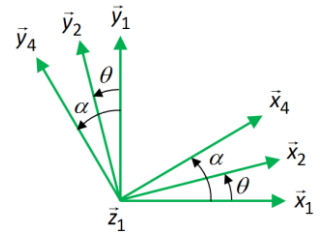
$$\mathcal{F}_{2 \rightarrow 3} = \underset{D}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{2 \rightarrow 3} \\ \vec{M}_{2 \rightarrow 3}(D) \end{array} \right.} \text{ avec } \vec{R}_{2 \rightarrow 3} \cdot \vec{x}_2 = 0$$

On applique le Théorème de la Résultante Statique en projection sur \vec{x}_2

$$\begin{aligned} \vec{R}_{2 \rightarrow 3} \cdot \vec{x}_2 &= 0 \\ \Rightarrow \vec{R}_{ter \rightarrow 6} \cdot \vec{x}_2 + \vec{R}_{2 \rightarrow 3} \cdot \vec{x}_2 + \vec{R}_{2 \rightarrow 3} \cdot \vec{x}_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{R}_{pes \rightarrow 6} \cdot \vec{x}_2 = -Mg \vec{y}_1 \cdot \vec{x}_2 = -Mg \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -Mg \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -Mg \sin \theta + F_{2 \rightarrow 3} + 0 &= 0 \\ \Rightarrow F_{2 \rightarrow 3} &= Mg \sin \theta = 230,981 \cdot \sin 45^\circ \approx 1870 \text{ N} \end{aligned}$$



Question 4 : Déterminer la force $F_{1 \rightarrow 2}$ qui doit être fournie afin de garder le système en équilibre.

On isole {2,3,6}.

On fait le BAME :

$$\mathcal{F}_{ter \rightarrow 6} = \underset{G}{\left\{ \begin{array}{l} -Mg \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}^{vér} = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{l} F_{1 \rightarrow 2} \vec{y}_4 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{1 \rightarrow 2}(A) \end{array} \right.} \text{ avec } \vec{M}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z}_1 = 0$$

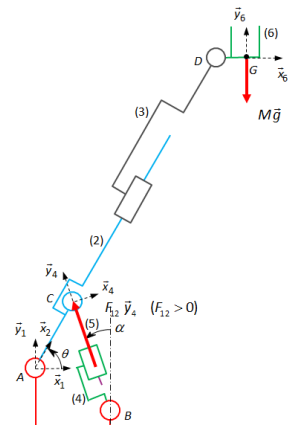
On applique le Théorème du Moment Statique en A en projection sur \vec{z}_1

$$\begin{aligned} \vec{M}_{2+3+6 \rightarrow 2+3+6}(A) \cdot \vec{z}_1 &= 0 \\ \Rightarrow \vec{M}_{ter \rightarrow 6}(A) \cdot \vec{z}_1 + \vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{vér}(A) \cdot \vec{z}_1 + \vec{M}_{1 \rightarrow 2}(A) \cdot \vec{z}_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{M}_{ter \rightarrow 6}(A) \cdot \vec{z}_1 = (\vec{AG} \wedge \vec{R}_{ter \rightarrow 6}) \cdot \vec{z}_1 = ((c+d)\vec{x}_2 + e\vec{x}_1) \wedge (-Mg \vec{y}_1) \cdot \vec{z}_1 = -Mg ((c+d) \cos \theta + e)$$

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{vér}(A) \cdot \vec{z}_1 = (\vec{AC} \wedge \vec{R}_{1 \rightarrow 2}^{vér}) \cdot \vec{z}_1 = (c \vec{x}_2 \wedge F_{1 \rightarrow 2} \vec{y}_4) \cdot \vec{z}_1 = c F_{1 \rightarrow 2} \cos(\alpha - \theta)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -Mg ((c+d) \cos \theta + e) + c F_{1 \rightarrow 2} \cos(\alpha - \theta) + 0 &= 0 \\ \Rightarrow F_{1 \rightarrow 2} &= \frac{Mg ((c+d) \cos \theta + e)}{c \cos(\alpha - \theta)} \end{aligned}$$



Question 5 : Afin de garder le système en équilibre, déterminer l'expression du couple $C_{m3 \rightarrow 6}$ que doit fournir le moteur de la chaîne de puissance « orienter la plate-forme 6 ». Faire l'application numérique.

En régime permanent :

$$\begin{aligned} \eta |C_{m3 \rightarrow 6} \omega_{m3 \rightarrow 6}| &= |C_{3 \rightarrow 6} \omega_{3 \rightarrow 6}| \\ \Rightarrow |C_{3 \rightarrow 6}| &= \eta_{36} \frac{1}{r} |C_{m3 \rightarrow 6}| \end{aligned}$$

Remarque : le rendement est du côté de l'entrée, le couple en sortie est plus grand que le couple d'entrée.

$$\Rightarrow |C_{m3 \rightarrow 6}| = \frac{r}{\eta_{36}} |C_{3 \rightarrow 6}| = \frac{1}{0,9 \cdot 1000} 2650 \approx 2,95 \text{ Nm}$$

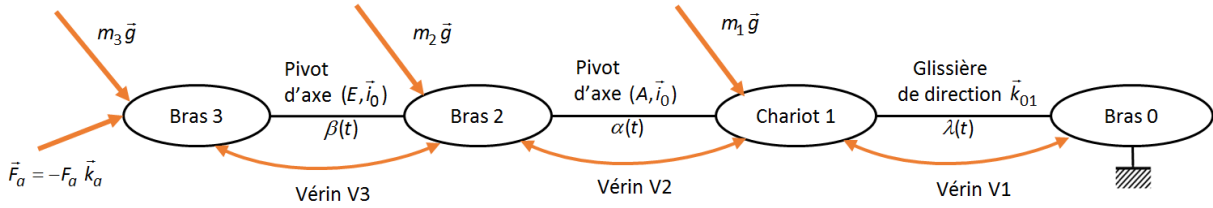
Question 6 : Afin de garder le système en équilibre, déterminer l'expression du couple $C_{m2 \rightarrow 3}$ que doit fournir le moteur de la chaîne de puissance « déplacer le parc échelle 3 ». Faire l'application numérique.

En régime permanent :

$$\begin{aligned} \eta |C_{m2 \rightarrow 3} \omega_{m2 \rightarrow 3}| &= |F_{2 \rightarrow 3} \cdot V_{2 \rightarrow 3}| \\ \Rightarrow |F_{2 \rightarrow 3}| &= \eta_{23} \frac{2\pi}{p} |C_{m2 \rightarrow 3}| \\ \Rightarrow |C_{m2 \rightarrow 3}| &= \frac{1}{\eta_{23}} \frac{p}{2\pi} |F_{2 \rightarrow 3}| = \frac{1}{0,010} \frac{1870}{2\pi} \approx 4,26 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Exercice 5 : MAQUETTE EN SOUFLERIE

Question 1 : Réaliser le graphe de structure de ce système.



Question 2 : Déterminer le moment $M_{E,2 \rightarrow 3}$ en E que doit fournir le vérin V3 afin de garder le système en équilibre.

On isole 3.

On fait le BAME :

$$\mathcal{F}_{ter \rightarrow 3} = G_3 \begin{Bmatrix} -m_3 g \vec{j}_{01} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{F}_{a \rightarrow 3} = G_3 \begin{Bmatrix} -F_a \vec{k}_a \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{F}_{2 \rightarrow 3}^{V3} = E \begin{Bmatrix} \vec{F}_{2 \rightarrow 3} \\ \vec{M}_{2 \rightarrow 3}(E) \vec{i}_0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{F}_{2 \rightarrow 3} = E \begin{Bmatrix} \vec{R}_{2 \rightarrow 3} \\ \vec{M}_{2 \rightarrow 3}(E) \end{Bmatrix} \text{ avec } \vec{M}_{2 \rightarrow 3}(E) \cdot \vec{i}_0 = 0$$

On applique le Théorème du Moment Statique en E en projection sur \vec{i}_0

$$\vec{M}_{3 \rightarrow 3}(E) \cdot \vec{i}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{M}_{ter \rightarrow 3}(E) \cdot \vec{i}_0 + \vec{M}_{a \rightarrow 3}(E) \cdot \vec{i}_0 + \vec{M}_{2 \rightarrow 3}^{vér}(E) \cdot \vec{i}_0 + \vec{M}_{2 \rightarrow 3}(E) \cdot \vec{i}_0 = 0$$

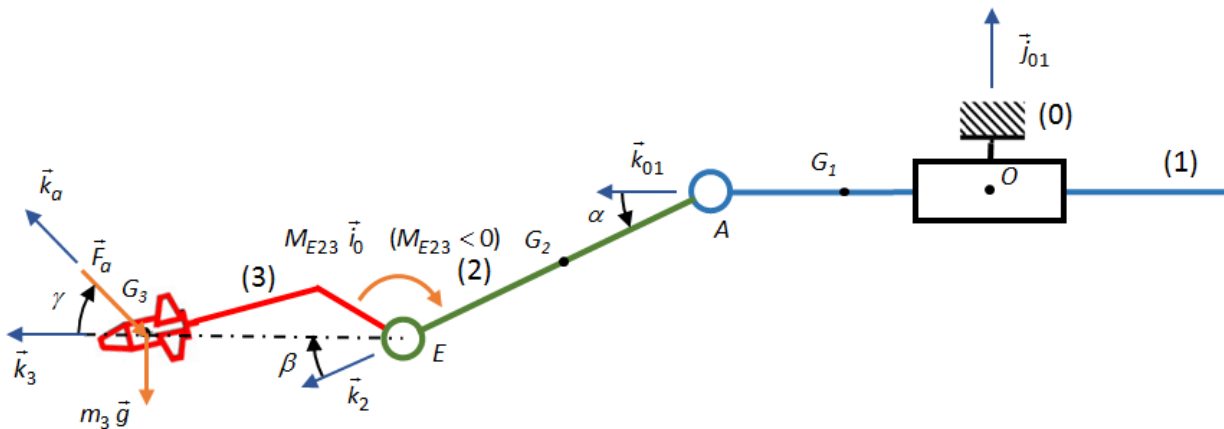
$$\vec{M}_{ter \rightarrow 3}(E) \cdot \vec{i}_0 = (\vec{EG}_3 \wedge \vec{R}_{pes \rightarrow 3}) \cdot \vec{i}_0 = (l_3 \vec{k}_3 \wedge (-m_3 g \vec{j}_{01})) \cdot \vec{i}_0 = m_3 g l_3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta\right) = m_3 g l_3 \cos(\alpha + \beta)$$

$$\vec{M}_{a \rightarrow 3}(E) \cdot \vec{i}_0 = (\vec{EG}_3 \wedge \vec{R}_{a \rightarrow 3}) \cdot \vec{i}_0 = (l_3 \vec{k}_3 \wedge (-F_a \vec{k}_a)) \cdot \vec{i}_0 = -l_3 F_a \sin \gamma$$

$$\vec{M}_{2 \rightarrow 3}^{V3}(E) \cdot \vec{i}_0 = M_{E,2 \rightarrow 3}$$

$$\Rightarrow M_{E,2 \rightarrow 3} = -m_3 g l_3 \cos(\alpha + \beta) + l_3 F_a \sin \gamma$$

$M_{E,2 \rightarrow 3} < 0$ dans la position donnée par la figure



Question 3 : Déterminer le moment $M_{A,1 \rightarrow 2}$ que doit fournir le vérin V2 afin de garder le système en équilibre.

On isole {2,3}.

On fait le BAME :

$$\mathcal{F}_{ter \rightarrow 3} = G_3 \begin{Bmatrix} -m_3 g \vec{j}_{01} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{F}_{ter \rightarrow 2} = G_2 \begin{Bmatrix} -m_2 g \vec{j}_{01} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{F}_{a \rightarrow 3} = G_3 \begin{Bmatrix} -F_a \vec{k}_a \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}^{V_2} = E \begin{cases} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ M_{1 \rightarrow 2}(A) \vec{i}_0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2} = A \begin{cases} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{1 \rightarrow 2}(A) \end{cases} \text{ avec } \vec{M}_{1 \rightarrow 2}(A) \cdot \vec{i}_0 = 0$$

On applique le Théorème du Moment Statique en A en projection sur \vec{i}_0

$$\sum \vec{M}_{2+3 \rightarrow 2+3}(A) \cdot \vec{i}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{M}_{ter \rightarrow 3}(A) \cdot \vec{i}_0 + \vec{M}_{ter \rightarrow 2}(A) \cdot \vec{i}_0 + \vec{M}_{a \rightarrow 3}(A) \cdot \vec{i}_0 + \vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{V_2}(A) \cdot \vec{i}_0 + \vec{M}_{1 \rightarrow 2}(A) \cdot \vec{i} = 0$$

$$\vec{M}_{ter \rightarrow 3}(A) \cdot \vec{i}_0 = (\overrightarrow{AG_3} \wedge \vec{R}_{pes \rightarrow 3}) \cdot \vec{i}_0 = ((l_2 \vec{k}_2 + l_3 \vec{k}_3) \wedge (-m_3 g \vec{j}_{01})) \cdot \vec{i}_0 = m_3 g (l_2 \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) + l_3 \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta))$$

$$= m_3 g (l_2 \cos \alpha + l_3 \cos(\alpha + \beta))$$

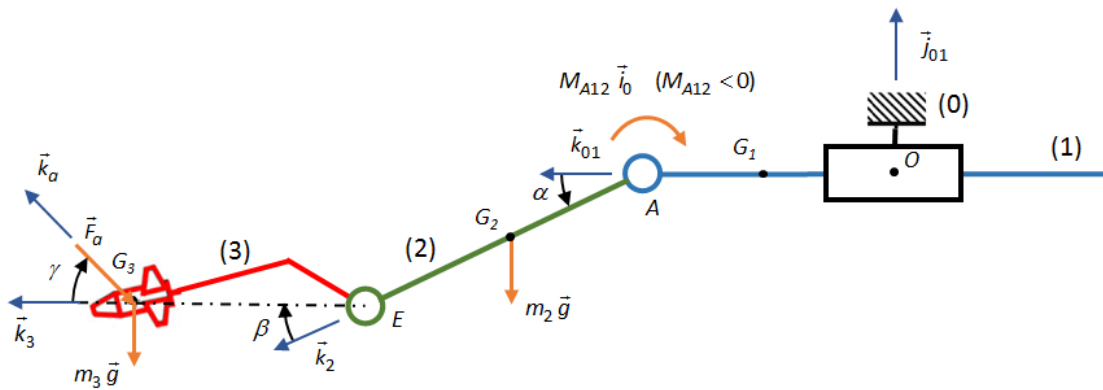
$$\vec{M}_{ter \rightarrow 2}(A) \cdot \vec{i}_0 = (\overrightarrow{AG_2} \wedge \vec{R}_{pes \rightarrow 2}) \cdot \vec{i}_0 = (a_2 \vec{k}_2 \wedge (-m_2 g \vec{j}_{01})) \cdot \vec{i}_0 = m_2 g a_2 \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = m_2 g a_2 \cos \alpha$$

$$\vec{M}_{a \rightarrow 3}(A) \cdot \vec{i}_0 = (\overrightarrow{AG_3} \wedge \vec{R}_{a \rightarrow 3}) \cdot \vec{i}_0 = ((l_2 \vec{k}_2 + l_3 \vec{k}_3) \wedge (-F_a \vec{k}_a)) \cdot \vec{i}_0 = -F_a (l_2 \sin(\beta + \gamma) + l_3 \sin \gamma)$$

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{V_2}(A) \cdot \vec{i}_0 = M_{1 \rightarrow 2}(A)$$

$$\Rightarrow M_{1 \rightarrow 2}(A) = -m_3 g (l_2 \cos \alpha + l_3 \cos(\alpha + \beta)) - m_2 g a_2 \cos \alpha + F_a (l_2 \sin(\beta + \gamma) + l_3 \sin \gamma)$$

$M_{1 \rightarrow 2}(A) < 0$ dans la position donnée par la figure



Question 4 : Déterminer la force $F_{0 \rightarrow 1}$ que doit fournir le vérin V1 afin de garder le système en équilibre.

On isole $\{1,2,3\}$.

On fait le BAME :

$$\mathcal{F}_{ter \rightarrow 3} = G_3 \begin{cases} -m_3 g \vec{j}_{01} \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{ter \rightarrow 2} = G_2 \begin{cases} -m_2 g \vec{j}_{01} \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{ter \rightarrow 1} = G_1 \begin{cases} -m_1 g \vec{j}_{01} \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{a \rightarrow 3} = G_3 \begin{cases} -F_a \vec{k}_a \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{0 \rightarrow 1}^{V_1} = A \begin{cases} F_{0 \rightarrow 1} \vec{k}_{01} \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{0 \rightarrow 1} = A \begin{cases} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{0 \rightarrow 1}(A) \end{cases} \text{ avec } \vec{R}_{0 \rightarrow 1} \cdot \vec{k}_{01} = 0$$

On applique le Théorème de la Résultante Statique en projection sur \vec{k}_{01} .

$$\vec{R}_{1+2+3 \rightarrow 1+2+3} \cdot \vec{k}_{01} = 0$$

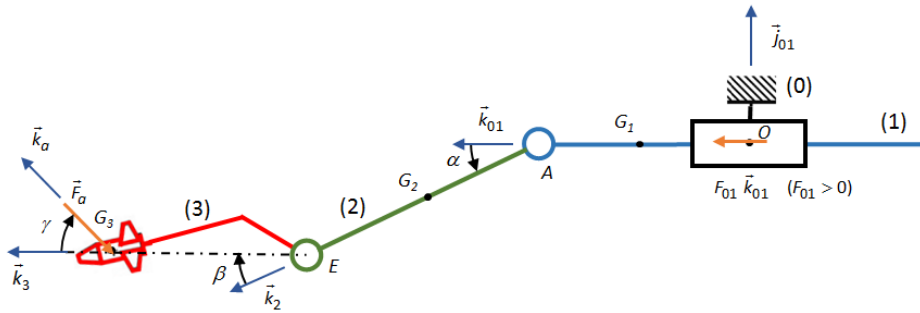
$$\Rightarrow \vec{R}_{ter \rightarrow 3} \cdot \vec{k}_{01} + \vec{R}_{ter \rightarrow 2} \cdot \vec{k}_{01} + \vec{R}_{ter \rightarrow 1} \cdot \vec{k}_{01} + \vec{R}_{a \rightarrow 3} \cdot \vec{k}_{01} + \vec{R}_{0 \rightarrow 1}^{V_1} \cdot \vec{k}_{01} + \vec{R}_{0 \rightarrow 1} \cdot \vec{k}_{01} = 0$$

$$\vec{R}_{a \rightarrow 3} \cdot \vec{k}_{01} = -F_a \vec{k}_a \cdot \vec{k}_{01} = -F_a \cos(\alpha + \beta + \gamma)$$

Remarque : attention γ est négatif sur le schéma cinématique, donc le moment est bien négatif.

$$\vec{R}_{0 \rightarrow 1}^{V_1} \cdot \vec{k}_{01} = F_{0 \rightarrow 1}$$

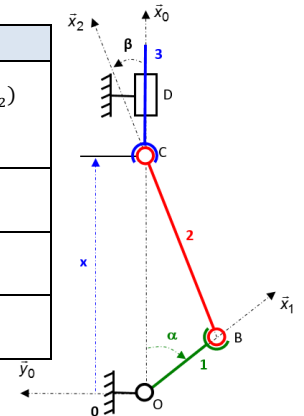
$$\Rightarrow F_{0 \rightarrow 1} = F_a \cos(\alpha + \beta + \gamma)$$



Exercice 6 : METHODOLOGIE

Remarque : dans une chaîne fermée, on commence par chercher les solides, ou les ensembles de solides soumis à 2 forces pour réduire le nombre d'inconnus. Puis on part de ce qu'on connaît, ici F , pour aller vers ce qu'on cherche, ici C_m .

Étape	Isolement	Principe / Théorème	Résultat
1	2	PFS sur un solide soumis à 2 glisseurs	$\vec{R}(1 \rightarrow 2)$ et $\vec{R}(3 \rightarrow 2)$ suivant (B, \vec{x}_2) $\vec{R}(1 \rightarrow 2) = -\vec{R}(3 \rightarrow 2)$
2	3	Théorème de la résultante statique Projection sur \vec{x}_0	$\vec{R}(2 \rightarrow 3) = \vec{f}(F)$
3		On reprend les équations précédentes	$\vec{R}(1 \rightarrow 2) = \vec{f}(F)$
4	1	Théorème du moment statique en O Projection sur \vec{z}_0	$C_m = \vec{M}(O, 0 \rightarrow 1) \cdot \vec{z}_0 = f(F)$



Étape	Isolement	Principe / Théorème	Résultat
1	2, 4, 6	PFS sur un solide soumis à 2 glisseurs	Direction des AM
2	1	TRS en projection sur \vec{x}_p	$F_{21} = -\frac{F_p}{\sin \beta}$
3	{2,3}	TMS en C en projection sur \vec{z}_p	$X_{53} + \tan \beta Y_{53} = -2 \frac{l_2}{l_4} F_p$
4	5	TRS en projection sur \vec{z}_p	$F_p = \frac{l_4}{2l_2} (\tan \beta F_S^y - F_S^x)$

Hypothèse : on néglige l'action de la pesanteur sur 2 et sur 4.

Les solides 2 et 4 sont des bielles. Elles sont soumises chacune à 2 glisseurs. En appliquant le PFS, on peut démontrer que les directions des forces sont respectivement \vec{EH} et \vec{AB} .

Hypothèses :

- Liaisons parfaites sauf celle au contact avec l'objet.
- On néglige l'action de la pesanteur.

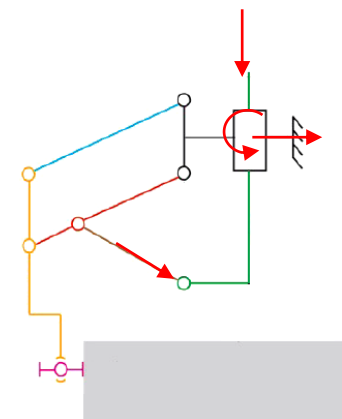
On isole 1.

On fait le BAME :

- $\mathcal{F}(p \rightarrow 1) = \begin{matrix} F_p \vec{x}_p \\ \vec{0} \end{matrix}$
- $\mathcal{F}(0 \rightarrow 1) = \begin{matrix} Y_{01} \vec{y}_p \\ N_{01} \vec{z}_p \end{matrix}$
- $\mathcal{F}(2 \rightarrow 1) = \begin{matrix} F_{21} \sin \beta \vec{x}_p + F_{21} \cos \beta \vec{y}_p \\ \vec{0} \end{matrix}$

On applique le TRS en projection sur \vec{x}_p :

$$F_p + F_{21} \sin \beta = 0$$

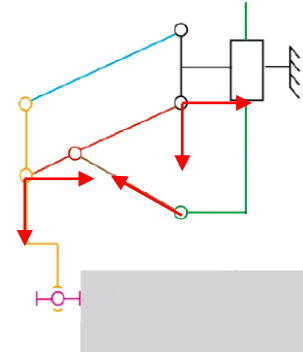


$$\Rightarrow F_{21} = -\frac{F_p}{\sin \beta}$$

On isole {2,3}.

On fait le BAME :

$$\begin{aligned} - \mathcal{F}(1 \rightarrow 2) &= \underset{H}{\left\{ \begin{array}{c} -F_{21} \sin \beta \bar{x}_p - F_{21} \cos \beta \bar{y}_p \\ \bar{0} \end{array} \right\}} = \underset{H}{\left\{ \begin{array}{c} F_p \bar{x}_p + \frac{F_p}{\tan \beta} \bar{y}_p \\ \bar{0} \end{array} \right\}} = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{c} F_p \bar{x}_p + \frac{F_p}{\tan \beta} \bar{y}_p \\ 2l_2 \sin \beta \frac{F_p}{\tan \beta} \bar{z}_p \end{array} \right\}} \\ - \mathcal{F}(0 \rightarrow 3) &= \underset{C}{\left\{ \begin{array}{c} X_{03} \bar{x}_p + Y_{03} \bar{y}_p \\ \bar{0} \end{array} \right\}} \\ - \mathcal{F}(5 \rightarrow 3) &= \underset{D}{\left\{ \begin{array}{c} X_{53} \bar{x}_p + Y_{53} \bar{y}_p \\ \bar{0} \end{array} \right\}} = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{c} X_{53} \bar{x}_p + Y_{53} \bar{y}_p \\ l_4 \cos \beta X_{53} \bar{z}_p + l_4 \sin \beta Y_{53} \bar{z}_p \end{array} \right\}} \end{aligned}$$



Remarque : pour déterminer les moments on utilise la méthode des bras de levier.

Remarque : ici, l'isolement {2,3} est plus rapide que l'isolement 2 puis 3.

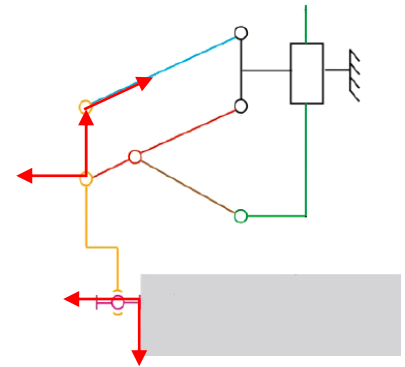
On applique le TMS en C en projection sur \bar{z}_p :

$$\begin{aligned} l_4 \cos \beta X_{53} + l_4 \sin \beta Y_{53} + 2l_2 \sin \beta \frac{F_p}{\tan \beta} &= 0 \\ \Rightarrow l_4 X_{53} + l_4 \tan \beta Y_{53} + 2l_2 F_p &= 0 \\ \Rightarrow X_{53} + \tan \beta Y_{53} &= -2 \frac{l_2}{l_4} F_p \end{aligned}$$

On isole 5.

On fait le BAME :

$$\begin{aligned} - \mathcal{F}(3 \rightarrow 5) &= \underset{D}{\left\{ \begin{array}{c} -X_{53} \bar{x}_p - Y_{53} \bar{y}_p \\ \bar{0} \end{array} \right\}} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{c} -X_{53} \bar{x}_p - Y_{53} \bar{y}_p \\ -l_3 Y_{53} \bar{z}_p \end{array} \right\}} \\ - \mathcal{F}(4 \rightarrow 5) &= \underset{B}{\left\{ \begin{array}{c} -F_{45} \sin \beta \bar{x}_p + F_{45} \cos \beta \bar{y}_p \\ \bar{0} \end{array} \right\}} \\ - \mathcal{F}(\text{objet} \rightarrow 5) &= \underset{S}{\left\{ \begin{array}{c} F_S^x \bar{x}_p - F_S^y \bar{y}_p \\ \bar{0} \end{array} \right\}} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{c} F_S^x \bar{x}_p - F_S^y \bar{y}_p \\ -l_5 F_S^y \bar{z}_p - (l_5 + l_6) F_S^x \bar{z}_p \end{array} \right\}} \end{aligned}$$



On applique le TRS en projection sur \bar{z}_p :

$$\begin{aligned} \begin{cases} -X_{53} - F_{45} \sin \beta + F_S^x = 0 \\ -Y_{53} + F_{45} \cos \beta - F_S^y = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} F_{45} = \frac{-X_{53} + F_S^x}{\sin \beta} \\ F_{45} = \frac{Y_{53} + F_S^y}{\cos \beta} \end{cases} \Rightarrow -X_{53} + F_S^x = \tan \beta (Y_{53} + F_S^y) \\ &\Rightarrow X_{53} \tan \beta Y_{53} = F_S^x - \tan \beta F_S^y \end{aligned}$$

D'autre part, on avait

$$X_{53} + \tan \beta Y_{53} = -2 \frac{l_2}{l_4} F_p$$

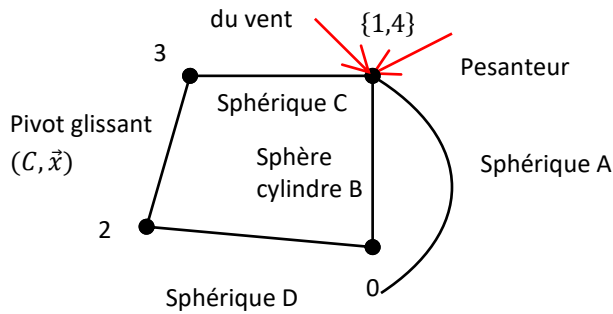
Donc

$$\begin{aligned} -2 \frac{l_2}{l_4} F_p &= F_S^x - \tan \beta F_S^y \\ \Rightarrow F_p &= \frac{l_4}{2l_2} (\tan \beta F_S^y - F_S^x) \end{aligned}$$

On constate que F_p ne dépend pas de l_5 . L'effort presseur sera identique quel que soit la position verticale du point S.

Exercice 7 : CONSOLE PORTANTE DE BATEAU

Question 1 : Colorier le schéma cinématique, placer les distances et les forces sur le schéma. Tracer le graphe des structures. Force



Question 2 : Etudier l'équilibre de l'ensemble {2,3}.

On isole $V = \{2,3\}$.

Le vérin V est monté entre 2 rotules en C et D.

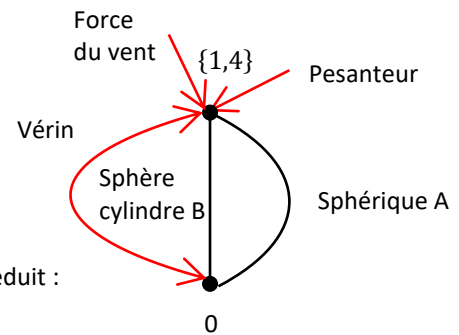
On fait le BAME :

$$\mathcal{F}_{0 \rightarrow 2} = D \begin{cases} \vec{R}_{0 \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 3} = C \begin{cases} \vec{R}_{1 \rightarrow 3} \\ \vec{0} \end{cases}$$

On applique le Principe Fondamental de la Statique (PFS) en C à V, et on en déduit :

$$\mathcal{F}_{0 \rightarrow 2} = -\mathcal{F}_{1 \rightarrow 3} = C \begin{cases} pS \vec{x} \\ \vec{0} \end{cases}$$



Question 3 : Quel théorème faut-il appliquer pour obtenir l'expression de la pression à fournir dans le vérin pour compenser les efforts extérieurs ?

On isole {1,4}. Il faut appliquer le Théorème du Moment Statique en A, en projection sur \vec{z} . Mais pour l'exemple nous allons tout écrire.

Question 4 : Déterminer la pression du vérin et l'expression des actions dans les liaisons en A et B. Faire l'application numérique.

On isole {1,4}.

On fait le BAME :

$$\mathcal{F}_{3 \rightarrow 1} = C \begin{cases} pS \vec{x} \\ \vec{0} \end{cases} = A \begin{cases} pS \vec{x} \\ pS(a+b)\vec{y} + pSc\vec{z} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{air \rightarrow 4} = G \begin{cases} -F_{air} \vec{x} \\ \vec{0} \end{cases} = A \begin{cases} -F_{air} \vec{x} \\ -F_{air}(a+d)\vec{y} - F_{air}e\vec{z} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{ter \rightarrow 4} = G \begin{cases} -mg\vec{z} \\ \vec{0} \end{cases} = A \begin{cases} -mg\vec{z} \\ -mgf\vec{x} + mge\vec{y} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2} = A \begin{cases} X_{1 \rightarrow 2}^S \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2}^S \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2}^S \vec{z} \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}^{SC} = B \begin{cases} X_{1 \rightarrow 2}^{SC} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2}^{SC} \vec{y} \\ \vec{0} \end{cases} = A \begin{cases} X_{1 \rightarrow 2}^{SC} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2}^{SC} \vec{y} \\ X_{1 \rightarrow 2}^{SC} a \vec{y} - Y_{1 \rightarrow 2}^{SC} a \vec{x} \end{cases}$$

On applique le PFS en A.

$$\vec{M}_{3 \rightarrow 1}(A) = \vec{M}_{3 \rightarrow 1}(C) + \vec{AC} \wedge pS \vec{x} = ((a+b)\vec{z} - c\vec{y}) \wedge pS \vec{x} = pS(a+b)\vec{y} + pSc\vec{z}$$

$$\vec{M}_{air \rightarrow 4}(A) = \vec{M}_{air \rightarrow 4}(G) + \vec{AG} \wedge -F_{air} \vec{x} = ((a+d)\vec{z} + e\vec{x} + f\vec{y}) \wedge -F_{air} \vec{x} = -F_{air}(a+d)\vec{y} + F_{air}f\vec{z}$$

$$\vec{M}_{ter \rightarrow 4}(A) = \vec{M}_{ter \rightarrow 4}(G) + \vec{AG} \wedge -mg\vec{z} = ((a+d)\vec{z} + e\vec{x} + f\vec{y}) \wedge -mg\vec{z} = -mgf\vec{x} + mge\vec{y}$$

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{SC}(A) = \vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{SC}(B) + \vec{AB} \wedge -F_{air} \vec{x} = a\vec{z} \wedge (X_{1 \rightarrow 2}^{SC} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2}^{SC} \vec{y}) = X_{1 \rightarrow 2}^{SC} a \vec{y} - Y_{1 \rightarrow 2}^{SC} a \vec{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_{1 \rightarrow 2}^S + X_{1 \rightarrow 2}^{SC} + pS - F_{air} = 0 \\ Y_{1 \rightarrow 2}^S + Y_{1 \rightarrow 2}^{SC} = 0 \\ Z_{1 \rightarrow 2}^S - mg = 0 \\ -mgf - Y_{1 \rightarrow 2}^{SC} a = 0 \\ pS(a+b) - F_{air}(a+d) + mge + X_{1 \rightarrow 2}^{SC} a = 0 \\ pSc + F_{air}f = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{1 \rightarrow 2}^S = \frac{1}{a}(pSb - F_{air}d + mge) \\ Y_{1 \rightarrow 2}^S = mg \frac{f}{a} \\ Z_{1 \rightarrow 2}^S = mg \\ Y_{1 \rightarrow 2}^{SC} = -mg \frac{f}{a} \\ X_{1 \rightarrow 2}^{SC} = \frac{1}{a}(-pS(a+b) + F_{air}(a+d) - mge) \\ p = -\frac{F_{air}f}{Sc} \end{cases}$$

$$p = -\frac{F_{air}f}{\pi \frac{D^2}{4} c} = -\frac{15000 \cdot 2}{\pi \frac{0,10^2}{4} 4} = -0,95 \text{ MPa} = -9,5 \text{ bars}$$

La pression est négative, le vérin doit « retenir » la structure pour compenser la force du vent.

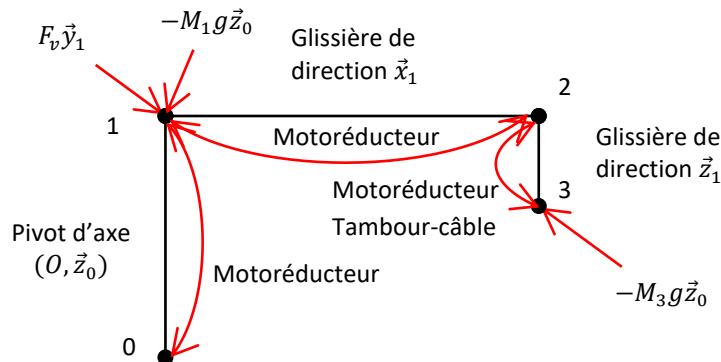
Question 5 : Déterminer alors l'expression du couple du motoréducteur pour assurer l'équilibre du système dans la position décrite sur le schéma cinématique. Faire l'application numérique.

On isole {1,4}. On applique le Théorème de Moment Statique (TMS) en A, en projection sur \vec{z} .

$$C_m = -F_{air}e = -15000 \cdot 2 = -30000 \text{ Nm}$$

Exercice 8 : GRUE DE CHANTIER

Question 1 : Réaliser le graphe de structure global de ce système, c'est-à-dire uniquement les solides 0, 1, 2 et 3.



Question 2 : Afin de garder le système en équilibre, déterminer le couple $C_{0 \rightarrow 1}$ qui doit être fourni à la sortie des réducteurs. Faire l'application numérique.

On isole {1,2,3}.

On fait le BAME :

$$\mathcal{F}_{ter \rightarrow 3} = G_3 \begin{cases} -M_3 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{ter \rightarrow 1} = G_1 \begin{cases} -M_1 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{air \rightarrow 1} = G_1 \begin{cases} F_{air} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{mot \rightarrow 1} = O \begin{cases} \vec{0} \\ C_{0 \rightarrow 1} \vec{z}_0 \end{cases}$$

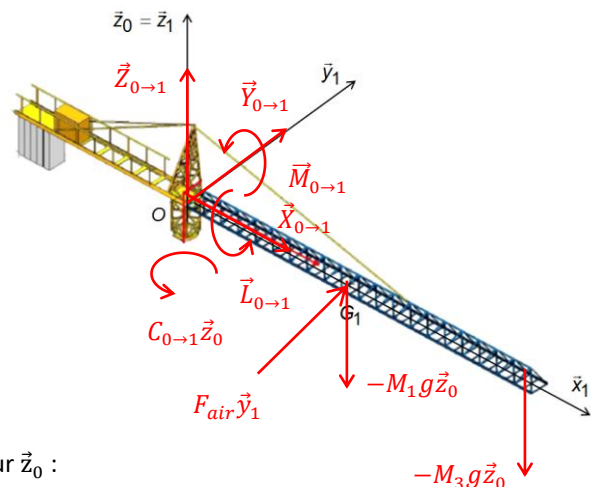
$$\mathcal{F}_{0 \rightarrow 1} = O \begin{cases} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{0 \rightarrow 1}(O) \end{cases} \text{ avec } \vec{M}_{0 \rightarrow 1}(O) \cdot \vec{z}_0 = 0$$

Le Théorème du Moment Statique (TMS) en O, en projection sur \vec{z}_0 :

$$\sum \vec{M}_{1+2+3 \rightarrow 1+2+3}(O) \cdot \vec{z}_0 = 0 \\ \Rightarrow \vec{M}_{ter \rightarrow 3}(O) \cdot \vec{z}_0 + \vec{M}_{ter \rightarrow 1}(O) \cdot \vec{z}_0 + \vec{M}_{air \rightarrow 1}(O) \cdot \vec{z}_0 + \vec{M}_{mot \rightarrow 1}(O) \cdot \vec{z}_0 + \vec{M}_{0 \rightarrow 1}(O) \cdot \vec{z}_0 = 0$$

$$\vec{M}_{air \rightarrow 1}(O) \vec{z}_0 = F_v L$$

$$\vec{M}_{0 \rightarrow 1} \vec{z}_0 = C_{0 \rightarrow 1}$$



Remarque : pas besoin de faire Varignon pour calculer $\vec{M}_{air \rightarrow 1}(O)$. \vec{z}_0 on fait un bras de levier.

Remarque : la pesanteur ne fait pas pivoter la grue, donc pas besoin de calculer son moment.

$$\Rightarrow C_{0 \rightarrow 1} = -F_{air}L = -5000.30 = -150000 \text{ Nm}$$

Le couple $C_{3 \rightarrow 6}$ est négatif, correspondant à un couple dans le sens $-\vec{z}_0$.

Remarque : l'AN donne bien un couple négatif, on doit retenir l'action du vent.

Question 3 : Afin de garder le système en équilibre, déterminer la force F_{23} que le câble doit fournir. Faire l'application numérique.

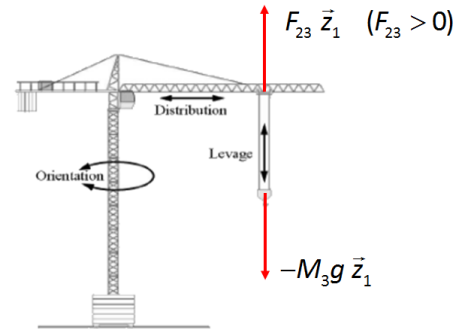
On isole 3.

On fait le BAME :

$$\mathcal{F}_{ter \rightarrow 3} = G_3 \begin{cases} -M_3 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{2 \rightarrow 3}^{câb} = G_3 \begin{cases} F_{23} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{2 \rightarrow 3} = G_3 \begin{cases} \vec{R}_{2 \rightarrow 3} \\ \vec{M}_{2 \rightarrow 3}(G_3) \end{cases} \text{ avec } \vec{R}_{2 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0 = 0$$

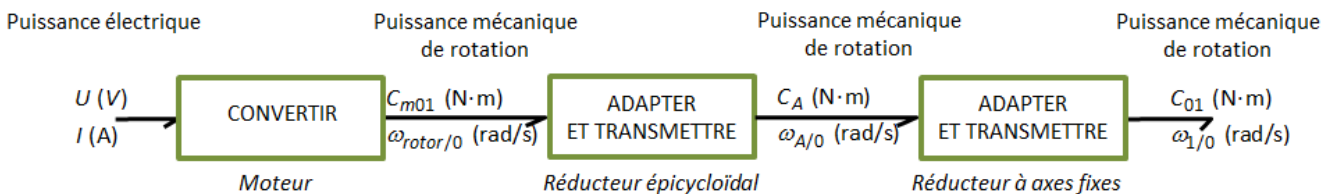


On applique le Théorème de la Résultante Statique (TRS) en projection sur \vec{z}_0 .

$$\begin{aligned} \sum \vec{R}_{3 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0 &= 0 \\ \Rightarrow \vec{R}_{ter \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0 + \vec{R}_{2 \rightarrow 3}^{câb} \cdot \vec{z}_0 + \vec{R}_{2 \rightarrow 3} \cdot \vec{z}_0 &= 0 \\ \Rightarrow F_{2 \rightarrow 3} &= M_3 g = 5000.9,81 \approx 50000 \text{ N} \end{aligned}$$

La force $F_{2 \rightarrow 3}$ est positive, correspondant à une force dans le sens $+\vec{z}_0$.

Question 4 : Après avoir représenté partiellement la chaîne de puissance « orienter », déterminer le rapport de réduction global $i_{orienter} = \frac{\omega_{1/0}}{\omega_{rotor/0}}$.



$$i_1 = \frac{\omega_{A/0}}{\omega_{rotor/0}}$$

$$\lambda = \frac{\omega_{p/ps}}{\omega_{c/ps}} = -\frac{z_c z_s}{z_s z_p} = -\frac{z_c}{z_p}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_{p/0} - \omega_{ps/0}}{-\omega_{ps/0}} = -\frac{z_c}{z_p}$$

$$\Rightarrow \omega_{p/0} - \omega_{ps/0} = \frac{z_c}{z_p} \omega_{ps/0}$$

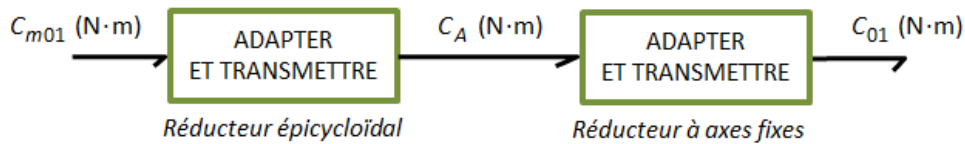
$$\Rightarrow \omega_{p/0} = \left(\frac{z_c}{z_p} + 1 \right) \omega_{ps/0}$$

$$\Rightarrow i' = \frac{\omega_{ps/0}}{\omega_{p/0}} = \frac{1}{\frac{z_c}{z_p} + 1} = \frac{z_p}{z_c + z_p} = \frac{z_p}{z_c + z_p} = \frac{18}{90 + 18} = \frac{1}{6} \approx 0,166$$

$$i_2 = \frac{\omega_{B/0}}{\omega_{A/0}} = -\frac{z_A}{z_B} = -\frac{18}{153} = -\frac{1}{8,5} \approx -0,117$$

$$i_{orienter} = i_1 i_2 = i'^3 i_2 = -\left(\frac{1}{6} \right)^3 \frac{1}{8,5} = \frac{-1}{1830} \approx -0,000545$$

Question 5 : Afin de garder le système en équilibre, déterminer en fonction de $i_{orienter}$, l'expression du couple C_{m01} que doit fournir le moteur de la chaîne de puissance « orienter ». Faire l'application numérique.

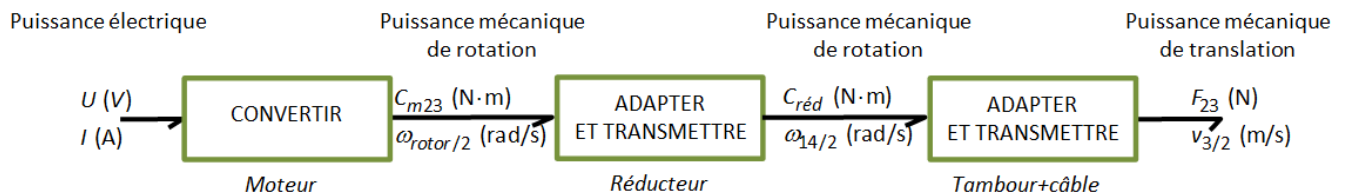


$$|C_{01}| = \frac{1}{i_{orienter}} \eta |C_{m01}| \Rightarrow |C_{m01}| = \frac{1}{\eta} i_{orienter} |C_{01}| \approx \frac{1}{0,7} 0,000545 \cdot 150000 \approx 117 \text{ Nm}$$

Question 6 : Pour quelle raison l'épaisseur des pignons varie-t-elle d'un étage à l'autre ?

Le couple encaissé par les pignons devenant de plus en plus important à l'approche de la sortie du réducteur, les pièces doivent donc être de plus en plus résistantes (de plus épaisses). À contrario, elles tournent moins vite.

Question 7 : Après avoir représenté partiellement la chaîne de puissance « lever », déterminer la relation entre $v_{3/2}$ la vitesse de déplacement de la charge 3 par rapport au chariot 2 et $\omega_{rotor/2}$ la vitesse de rotation du moteur.

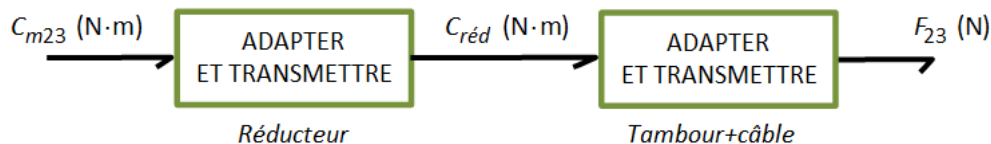


$$|v_{3/2}| = |R \omega_{14/2}|$$

$$i_{réd} = \frac{\omega_{14/2}}{\omega_{rotor/2}} = (-1)^2 \frac{Z_{13b}}{Z_{14}} \frac{Z_{12}}{Z_{13a}} = \frac{50}{100} \frac{50}{100} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$v_{3/2} = R i_{réd} \omega_{rotor/2}$$

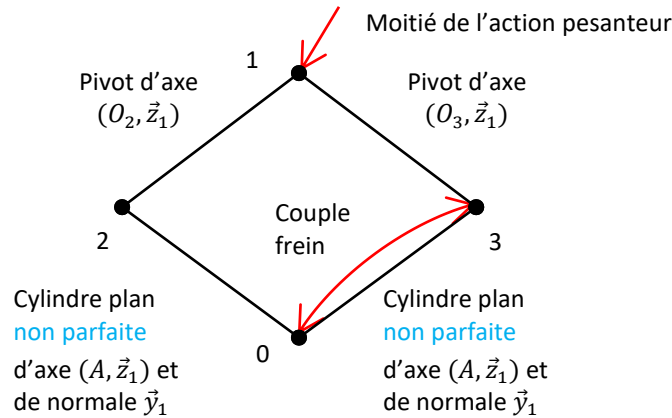
Question 8 : Afin de garder le système en équilibre, déterminer en fonction de $i_{réd}$ et R , l'expression du couple $C_{m2 \rightarrow 3}$ que doit fournir le moteur de la chaîne de puissance « lever ». Faire l'application numérique.



$$|C_{m2 \rightarrow 3}| = \frac{R}{\eta} i_{réd} |F_{2 \rightarrow 3}| \approx \frac{0,2}{0,8} 0,25 \cdot 50000 \approx 3125 \text{ Nm}$$

Exercice 9 : AIDE AU DEMARRAGE EN PENTE

Question 1 : Réaliser le graphe d'analyse.



Hypothèse : problème plan $(B, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$.

On s'intéresse à moitié de la voiture et donc l'action d'un seul frein.

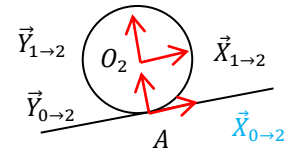
Question 2 : Isoler l'ensemble 2 et en déduire le modèle de l'action mécanique de 0 sur 2.

On isole 2.

2 est un solide soumis à 2 glisseurs car on néglige l'action de la pesanteur sur 2.

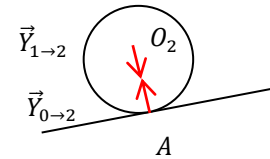
$$\mathcal{F}_{0 \rightarrow 2} = A \begin{cases} X_{0 \rightarrow 2} \vec{x}_1 + Y_{0 \rightarrow 2} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2} = O_3 \begin{cases} X_{1 \rightarrow 2} \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$



On applique le Principe Fondamental de la Statique (PFS) en A, et on en déduit :

$$\mathcal{F}_{0 \rightarrow 2} = -\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2} = A \begin{cases} Y_{0 \rightarrow 2} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$



Question 3 : Isoler l'ensemble $\{1,2,3\}$ et en déduire X_{03} , puis Y_{03} et enfin Y_{02} en fonction de M et des caractéristiques géométriques.

On isole $\{1,2,3\}$.

On fait le BAME :

$$\mathcal{F}_{0 \rightarrow 3} = B \begin{cases} X_{0 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{0 \rightarrow 3} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

avec $|X_{03}| \leq f |Y_{03}|$ (loi de Coulomb),

la « tendance au glissement » de 3/0 est suivant $-\vec{x}_1$ donc $X_{03} > 0$.

$$\mathcal{F}_{0 \rightarrow 2} = A \begin{cases} Y_{0 \rightarrow 2} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases} = B \begin{cases} Y_{0 \rightarrow 2} \vec{y}_1 \\ Y_{0 \rightarrow 2}(a+b) \end{cases}$$

$$\vec{M}_{0 \rightarrow 2}(B) = \vec{M}_{0 \rightarrow 2}(A) + \vec{BA} \wedge Y_{0 \rightarrow 2} \vec{y}_1 = (a+b) \vec{x}_1 \wedge Y_{0 \rightarrow 2} \vec{y}_1 = Y_{0 \rightarrow 2}(a+b) \vec{z}_1$$

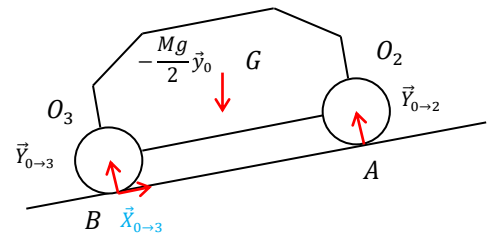
La méthode du « bras de levier » permet de déterminer plus rapidement les moments que le calcul.

$$\mathcal{F}_{ter \rightarrow 1} = G \begin{cases} -\frac{Mg}{2} \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{cases} = B \begin{cases} -\frac{Mg}{2} \sin \alpha \vec{x}_1 - \frac{Mg}{2} \cos \alpha \vec{y}_1 \\ -\frac{Mg}{2} b \cos \alpha \vec{z}_1 + \frac{Mg}{2} h \sin \alpha \vec{z}_1 \end{cases}$$

$$\vec{M}_{0 \rightarrow 2}(B) = \vec{M}_{0 \rightarrow 2}(G) + \vec{BG} \wedge -\frac{Mg}{2} \vec{y}_0 = (b \vec{x}_1 + h \vec{y}_1) \wedge -\frac{Mg}{2} \vec{y}_0 = -\frac{Mg}{2} b \cos \alpha \vec{z}_1 + \frac{Mg}{2} h \sin \alpha \vec{z}_1$$

On applique le Principe Fondamental de la Statique (PFS) en B.

$$\begin{cases} X_{0 \rightarrow 3} - \frac{Mg}{2} \sin \alpha = 0 \\ Y_{0 \rightarrow 2} + Y_{0 \rightarrow 3} - \frac{Mg}{2} \cos \alpha = 0 \\ Y_{0 \rightarrow 2}(a+b) - \frac{Mg}{2} b \cos \alpha + \frac{Mg}{2} h \sin \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{0 \rightarrow 3} = \frac{Mg}{2} \sin \alpha \\ Y_{0 \rightarrow 3} = \frac{Mg}{2} \cos \alpha - \frac{Mg}{2(a+b)} b \cos \alpha + \frac{Mg}{2(a+b)} h \sin \alpha \\ Y_{0 \rightarrow 2} = \frac{Mg}{2(a+b)} b \cos \alpha - \frac{Mg}{2(a+b)} h \sin \alpha \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} X_{0 \rightarrow 3} = \frac{Mg}{2} \sin \alpha \\ Y_{0 \rightarrow 3} = \frac{Mg}{2(a+b)} a \cos \alpha + \frac{Mg}{2(a+b)} h \sin \alpha \\ Y_{0 \rightarrow 2} = \frac{Mg}{2(a+b)} b \cos \alpha - \frac{Mg}{2(a+b)} h \sin \alpha \end{cases}$$

car

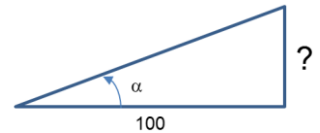
$$1 - \frac{b}{a+b} = \frac{a}{a+b}$$

Question 4 : En déduire la pente limite (en %) acceptable au-delà de laquelle le véhicule glisse par rapport au sol.

Il n'y a pas de glissement entre 3 et 0 si on est en phase d'adhérence, cad $|X_{03}| \leq f|Y_{03}|$ (lois de Coulomb)

On cherche donc α tel que :

$$\begin{aligned} \frac{Mg \sin \alpha}{2} &\leq f \frac{Mg(a \cos \alpha + h \sin \alpha)}{2(a+b)} \\ \Rightarrow \sin \alpha &\leq f \frac{(a \cos \alpha + h \sin \alpha)}{(a+b)} \\ \Rightarrow \sin \alpha ((a+b) - fh) &\leq fa \cos \alpha \\ \Rightarrow \alpha &\leq \arctan \left(\frac{fa}{(a+b) - fh} \right) = 17^\circ = \text{pente de 30\%} \end{aligned}$$



Question 5 : En déduire la pente limite (en %) acceptable au-delà de laquelle le véhicule bascule en arrière.

Il n'y a pas de basculement autour de (B, \vec{z}) si la roue avant touche le sol, cad $Y_{02} \geq 0$

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \frac{a \cos \alpha + h \sin \alpha}{a+b} &\geq 0 \\ \Rightarrow (a+b) \cos \alpha - (a \cos \alpha + h \sin \alpha) &\geq 0 \\ \Rightarrow b \cos \alpha - h \sin \alpha &\geq 0 \\ \Rightarrow \alpha &\leq \arctan \left(\frac{b}{h} \right) = 57^\circ = \text{pente de 155\%} \end{aligned}$$

Question 6 : Isoler l'ensemble 3 et en déduire C_f en fonction de M et des caractéristiques géométriques. Faire l'application numérique pour une pente de 30%.

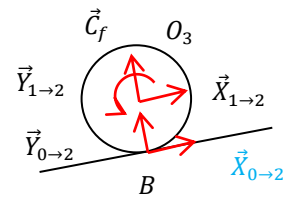
On isole 3.

On fait le BAME :

$$\mathcal{F}_{0 \rightarrow 3} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{l} X_{0 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{0 \rightarrow 3} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 3} = \underset{o_3}{\left\{ \begin{array}{l} X_{1 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 3} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 3}^{frein} = \underset{o_3}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_f \vec{z} \end{array} \right.}$$



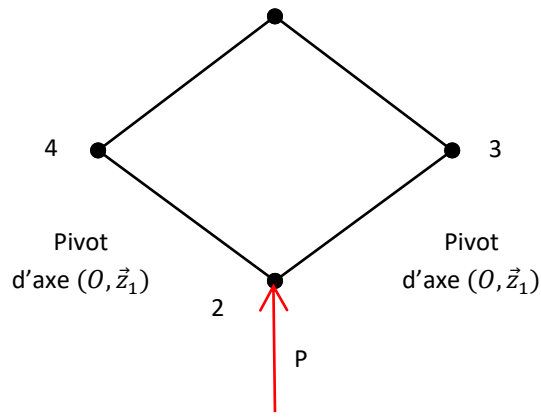
On applique le Théorème du Moment Statique (TMS) en O_3 , en projection sur \vec{z}_1 .

$$\begin{aligned} \vec{M}_{3 \rightarrow 3}(O_3) \cdot \vec{z}_1 &= 0 \\ \Rightarrow C_f + X_{03} \frac{D}{2} &= 0 \\ \Rightarrow C_f &= -\frac{1}{2} Mg \sin \alpha \frac{D}{2} \approx -\frac{1}{2} 1300.9,81 \sin \left(\arctan \frac{30}{100} \right) \frac{0,648}{2} \approx -1190 \text{ Nm} \end{aligned}$$

On trouve un couple de freinage < 0 , ce qui correspond bien au freinage de la voiture.

Exercice 10 : COINCEUR A CAMES

Question 1 : Tracer le graphe de structure du coinqueur à cames dans la phase de vie d'utilisation. Et proposer une démarche de résolution en fonction de la structure de ce graphe.



Hypothèse : problème plan (\vec{x}_1, \vec{y}_1) .

Nous sommes en présence d'une chaîne fermée. Nous allons donc déjà étudier l'équilibre d'un solide soumis à 2 forces pour diminuer le nombre d'inconnues. Puis nous allons étudier un équilibre qui fait intervenir P.

Question 2 : Etudier l'équilibre de la came 3 et en déduire une relation entre X_{13} , Y_{13} et a , b .

On isole 3.

On fait le BAME :

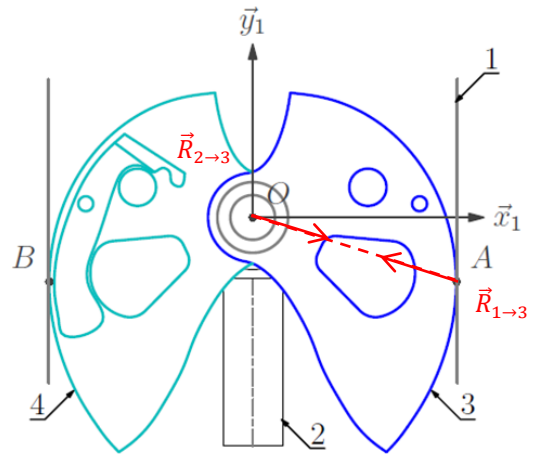
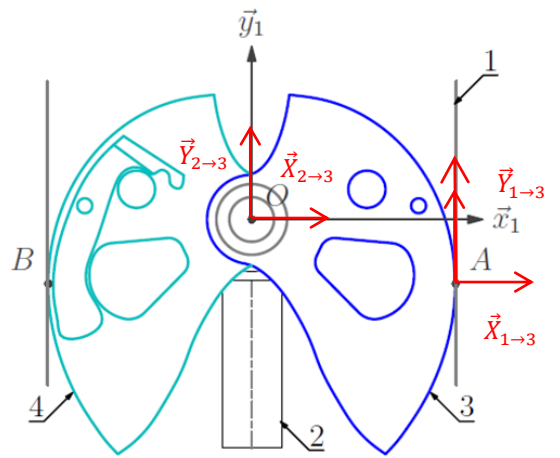
$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 3} = \begin{matrix} A \\ O \end{matrix} \begin{pmatrix} X_{1 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 3} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{matrix} O \\ O \end{matrix} \begin{pmatrix} X_{1 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 3} \vec{y}_1 \\ aY_{1 \rightarrow 3} \vec{z}_1 + bX_{1 \rightarrow 3} \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F}_{2 \rightarrow 3} = \begin{matrix} O \\ O \end{matrix} \begin{pmatrix} X_{2 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{2 \rightarrow 3} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

En appliquant le PFS en O :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{1 \rightarrow 3}(O) &= \vec{M}_{1 \rightarrow 3}(A) + \vec{OA} \wedge (X_{1 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 3} \vec{y}_1) \\ &= (a\vec{x}_1 - b\vec{y}_1) \wedge (X_{1 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 3} \vec{y}_1) \\ &= aY_{1 \rightarrow 3} \vec{z}_1 + bX_{1 \rightarrow 3} \vec{z}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X_{1 \rightarrow 3} + X_{2 \rightarrow 3} = 0 \\ Y_{1 \rightarrow 3} + Y_{2 \rightarrow 3} = 0 \\ aY_{1 \rightarrow 3} + bX_{1 \rightarrow 3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{Y_{1 \rightarrow 3}}{X_{1 \rightarrow 3}} = -\frac{b}{a}$$



Question 3 : Etudier l'équilibre de l'ensemble {2,3,4}. Et en déduire un lien entre X_{13} , Y_{13} et a , b , P .

On isole {2,3,4}.

On fait le BAME :

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 3} = \begin{matrix} A \\ \left\{ \begin{array}{l} X_{1 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 3} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right. \end{matrix}$$

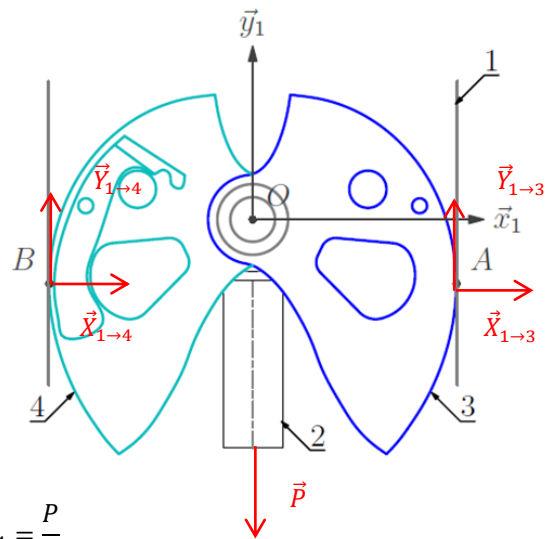
$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 4} = \begin{matrix} B \\ \left\{ \begin{array}{l} X_{1 \rightarrow 4} \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 4} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right. \end{matrix}$$

$$\mathcal{F}_{ext \rightarrow 2} = \begin{matrix} O \\ \left\{ \begin{array}{l} -P \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right. \end{matrix}$$

On applique le PFS en B.

$$\begin{aligned} \vec{M}_{1 \rightarrow 3}(B) &= \vec{M}_{1 \rightarrow 3}(A) + \vec{BA} \wedge (X_{1 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 3} \vec{y}_1) \\ &= 2a \vec{x}_1 \wedge (X_{1 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 3} \vec{y}_1) = 2a Y_{1 \rightarrow 3} \vec{z}_1 \end{aligned}$$

$$\vec{M}_{ext \rightarrow 2}(B) = \vec{M}_{ext \rightarrow 2}(O) + \vec{BO} \wedge -P \vec{y}_1 = a \vec{x}_1 \wedge -P \vec{y}_1 = -aP \vec{z}_1$$



$$\begin{cases} X_{1 \rightarrow 3} + X_{1 \rightarrow 4} = 0 \\ Y_{1 \rightarrow 3} + Y_{1 \rightarrow 4} - P = 0 \\ 2a Y_{1 \rightarrow 3} - aP = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_{1 \rightarrow 4} = \frac{P}{2} \\ Y_{1 \rightarrow 3} = \frac{P}{2} \end{cases}$$

De plus on avait $\frac{Y_{1 \rightarrow 3}}{X_{1 \rightarrow 3}} = -\frac{b}{a}$ donc $X_{1 \rightarrow 3} = -\frac{aP}{b}$. La came est donc bien en compression.

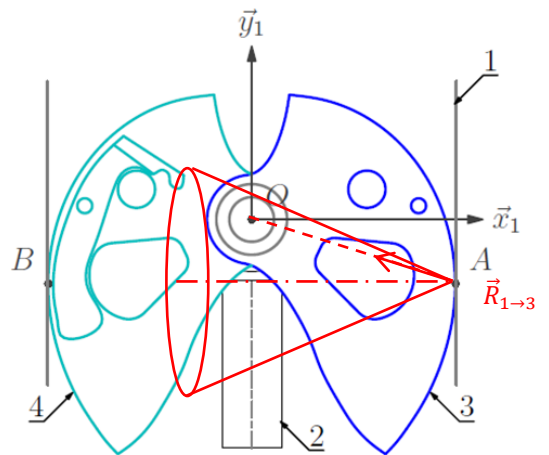
Question 4 : En déduire l'angle minimum de frottement au contact paroi-came pour assurer le coincement.

Il y a coincement si la résultante reste dans le cône de frottement. Or, vu que la came 3 est soumise à 2 glisseurs, la droite d'action de $\vec{R}_{1 \rightarrow 3}$ est toujours la droite (OA) et est dirigée par le rapport $\frac{a}{b}$. On lit graphiquement :

$$\frac{b}{a} < f_{acier/roche} \Rightarrow \frac{1}{3} < f_{acier/roche}$$

Or $f_{acier/roche} = 0,4$. Il y a donc toujours coincement.

Remarque : mais si on escalade une paroi de glace, ça ne marche plus car le cône serait plus petit.

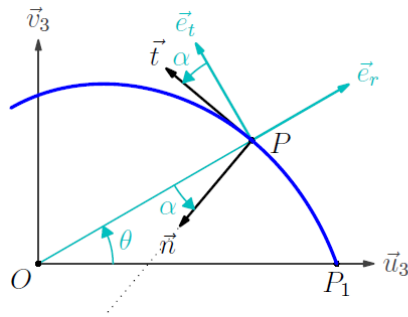


Question 5 : Pourquoi peut-on dire que ce système est autobloquant ?

Ce système est autobloquant car l'AM de $1 \rightarrow 3$ est obligatoirement dans le cône de frottement si le coefficient de frottement est assez important, il ne dépend pas de l'intensité de la charge P.

Question 6 : Quelle grandeur géométrique doit être surveillée pour que le système fonctionne pour des fissures variables sans que les efforts ne deviennent trop grands pour une même charge P ?

C'est le rapport $\frac{a}{b}$ qui est important. Ni, a, ni b, ni P.



L'équation à résoudre est alors

$$\frac{-\vec{t} \cdot \vec{e}_r}{\vec{t} \cdot \vec{e}_t} = \tan \alpha$$

Comme \vec{t} est colinéaire à $\frac{d\rho}{d\theta}\vec{e}_r + \rho\vec{e}_t$, cette condition devient

$$\frac{-\frac{d\rho}{d\theta}}{\rho} = \tan \alpha$$

La condition conduit ainsi à un profil en spirale logarithmique d'équation polaire

$$\rho(\theta) = r_1 e^{-\theta \tan \alpha}$$

On obtient une forme de came en spirale logarithmique. Le rapport $\frac{a}{b}$ est constant pour tout angle d'ouverture.

Exercice 11 : RESISTANCE AU ROULEMENT D'UN TGV

Question 1 : Déterminer le moment de résistance au roulement global subit par le TGV.

Chaque roue supportera un effort normal : $N_i = \frac{mg}{i}$ où i est le nombre de roue.

Le moment de résistance au roulement au niveau de chaque roue est donc : $M_i^{roul} = \eta \frac{mg}{i}$

Le moment de résistance au roulement global est donc : $M^{roul} = \eta mg = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 386 \cdot 10^3 \cdot 9,81 = 11300 \text{ Nm}$

Question 2 : Déterminer la vitesse angulaire des roues en rad/s.

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{300 \cdot 10^3 / 3600}{0,92/2} = 181 \text{ rad/s}$$

Question 3 : En déduire la puissance nécessaire pour vaincre la résistance au roulement. Vérifier si la puissance installée sur le TGV est suffisante.

$P = C \omega = M^{roul} \omega = 2 \cdot 10^6 \text{ W}$ soit environ un quart de la puissance totale installée.

Si le TGV était sur pneumatique (comme les camions) le coefficient de résistance au roulement serait bien supérieur et la puissance actuellement installée sur le TGV ne suffirait pas à le faire avancer (sans compter les résistances aérodynamiques et les côtes à franchir).

Les avantages sont plus marqués dans le transport de fret où le transport sur rail permet de transporter des charges très importantes avec peu d'énergie. L'inconvénient par rapport au camion est le réseau ferré, beaucoup moins développé que le réseau routier et qui ne permet pas de se rendre chez les clients. Des solutions de transport combiné rail-route se déploient progressivement en Europe.

Exercice 12 : CONSOLE DE DECORATION

Question 1 : Isoler la console 2 et écrire les 3 équations issues du PFS.

On fait l'hypothèse d'un problème plan (O, \vec{x}, \vec{y}) .

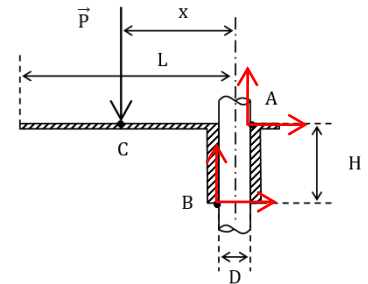
On isole 2.

On fait le BAME :

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}^A = \begin{matrix} X_{1 \rightarrow 2}^A \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 2}^A \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{matrix} \quad \text{avec } |Y_{1 \rightarrow 2}^A| \leq f |X_{1 \rightarrow 2}^A| \text{ (loi de Coulomb)}$$

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}^B = \begin{matrix} X_{1 \rightarrow 2}^B \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 2}^B \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{matrix} \quad \text{avec } |Y_{1 \rightarrow 2}^B| \leq f |X_{1 \rightarrow 2}^B| \text{ (loi de Coulomb)}$$

$$\mathcal{F}_{ter \rightarrow 2} = \begin{matrix} -P \vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}$$



On applique le PFS en A.

Pour déterminer les moments, on utilise le bras de levier.

$$\begin{cases} X_{1 \rightarrow 2}^A + X_{1 \rightarrow 2}^B = 0 & (1) \\ Y_{1 \rightarrow 2}^A + Y_{1 \rightarrow 2}^B - P = 0 & (2) \\ P \left(x + \frac{D}{2} \right) - Y_{1 \rightarrow 2}^B D + X_{1 \rightarrow 2}^B H = 0 & (3) \end{cases}$$

Question 2 : Si on se place à la limite du glissement en A et B, en déduire les composantes $Y_{1 \rightarrow 2}^A$ et $Y_{1 \rightarrow 2}^B$ en fonction de P.

Hypothèse : On se place à la limite du glissement.

$$|Y_{1 \rightarrow 2}^A| = f |X_{1 \rightarrow 2}^A| \quad \text{et} \quad |Y_{1 \rightarrow 2}^B| = f |X_{1 \rightarrow 2}^B| \text{ (lois de Coulomb)}$$

$$(1) : \quad |X_{1 \rightarrow 2}^A| = -|X_{1 \rightarrow 2}^B|$$

$$(4) : \quad \Rightarrow |Y_{1 \rightarrow 2}^A| = -|Y_{1 \rightarrow 2}^B|$$

$$(2) : \quad \Rightarrow Y_{1 \rightarrow 2}^A + Y_{1 \rightarrow 2}^B - P = 0$$

Comme la tendance du glissement de 2/1 se fait vers $-\vec{y}$, donc $Y_{1 \rightarrow 2}^A = Y_{1 \rightarrow 2}^B > 0$

$$\Rightarrow Y_{1 \rightarrow 2}^A = Y_{1 \rightarrow 2}^B = \frac{P}{2}$$

Question 3 : Déterminer la composante $X_{1 \rightarrow 2}^B$ en fonction de P et de f.

La normale de 1 sur 2 en B est dirigée vers $-\vec{x}$, donc $X_{1 \rightarrow 2}^B < 0$.

Or comme $Y_{1 \rightarrow 2}^B > 0$, la loi de Coulomb $|Y_{1 \rightarrow 2}^B| = f |X_{1 \rightarrow 2}^B| \Rightarrow Y_{1 \rightarrow 2}^B = -f X_{1 \rightarrow 2}^B$

$$X_{1 \rightarrow 2}^B = \frac{-P}{2f}$$

Question 4 : Déterminer alors l'expression de x pour que la console ne glisse pas.

$$(3) : \quad P \left(x + \frac{D}{2} \right) - Y_{1 \rightarrow 2}^B D + X_{1 \rightarrow 2}^B H = 0$$

$$\Rightarrow P \left(x + \frac{D}{2} \right) - \frac{P}{2} D + \frac{-P}{2f} H = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{H}{2f}$$

$$|Y_{1 \rightarrow 2}^B| = f |X_{1 \rightarrow 2}^B|$$

$$\Rightarrow f = \frac{|Y_{1 \rightarrow 2}^B|}{|X_{1 \rightarrow 2}^B|}$$

$$\Rightarrow x = \frac{H |X_{1 \rightarrow 2}^B|}{2 |Y_{1 \rightarrow 2}^B|}$$

Si x augmente, alors $|Y_{1 \rightarrow 2}^B|$ diminue, la console n'est plus à la limite du glissement. Les actions en A et en B sont à l'intérieur des cônes de frottement.

Il y a **arc-boutement** : l'équilibre n'est pas fonction de l'intensité de l'action mécanique.

Si x diminue, il y a glissement car $x = \frac{H |X_{1 \rightarrow 2}^B|}{2 |Y_{1 \rightarrow 2}^B|}$ n'est plus vérifié. La condition de glissement est donc : $x \geq \frac{H}{2f}$.

Exercice 13 : BARRAGE POIDS

Question 1 : Donner l'expression de la force élémentaire de pression de l'eau sur le barrage en un point Q.

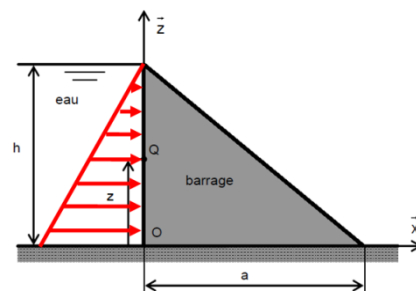
Point de vue local :

$$d\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = p(Q) dS \vec{x}$$

$$p(Q) = \rho_{\text{eau}} g (h - z) \text{ (Lois de l'hydrostatique)}$$

$$dS = dy dz$$

$$d\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = \rho_{\text{eau}} g (h - z) dy dz \vec{x}$$



Question 2 : Déterminer en O le torseur des actions mécaniques exercées par l'eau sur le barrage.

$$\begin{aligned} \vec{R}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} &= \int_S d\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = \iint_{y,z} \rho_{\text{eau}} g (h - z) dy dz \vec{x} \\ &= \rho_{\text{eau}} g \int_y dy \int_z (h - z) dz \vec{x} = \rho_{\text{eau}} g [y]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[\frac{-(h - z)^2}{2} \right]_0^h \vec{x} \\ &= \rho_{\text{eau}} g L \frac{h^2}{2} \vec{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}}(O) &= \int_S \vec{OQ} \wedge d\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = \iint_{y,z} (y\vec{y} + z\vec{z}) \wedge \rho_{\text{eau}} g (h - z) dy dz \vec{x} \\ &= \rho_{\text{eau}} g \iint_{y,z} (-y\vec{z} + z\vec{y})(h - z) dy dz \\ &= \rho_{\text{eau}} g \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{z=0}^h z(h - z) dy dz \vec{y} + \int_{y=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{z=0}^h -y(h - z) dy dz \vec{z} = \rho_{\text{eau}} g L \left[\frac{h z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^h \vec{y} \\ &= \rho_{\text{eau}} g L \frac{h^3}{6} \vec{y} \\ \mathcal{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} &= O \begin{pmatrix} \rho_{\text{eau}} g L \frac{h^2}{2} \vec{x} \\ \rho_{\text{eau}} g L \frac{h^3}{6} \vec{y} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \rho_{\text{eau}} g L \frac{h^2}{2} \vec{x} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

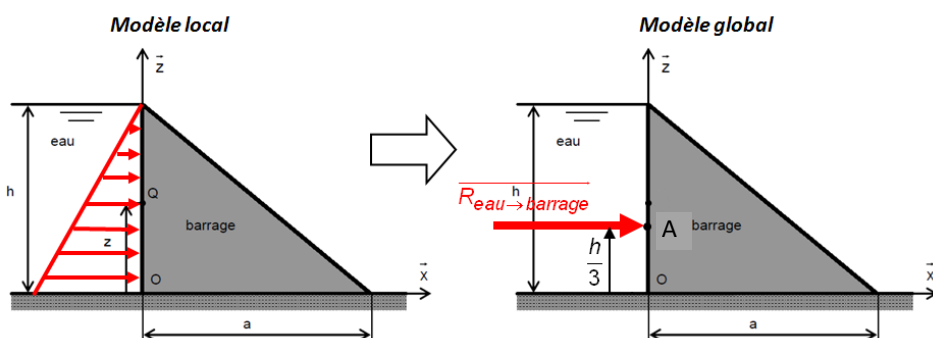
On ne connaît pas encore la position du point A.

Question 3 : En déduire la position du centre de poussée A : point où le moment résultant de l'action mécanique de l'eau sur le barrage est nul.

On cherche le point A où le moment est nul :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}}(A) &= \vec{0} = \vec{M}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}}(O) + \vec{AO} \wedge \vec{R}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} \\ \vec{0} &= \rho_{\text{eau}} g L \frac{h^3}{6} \vec{y} + (-y_A \vec{y} - z_A \vec{z}) \wedge \rho_{\text{eau}} g L \frac{h^2}{2} \vec{x} \\ \vec{0} &= \left(\rho_{\text{eau}} g L \frac{h^3}{6} - z_A \rho_{\text{eau}} g L \frac{h^2}{2} \right) \vec{y} + y_A \rho_{\text{eau}} g L \frac{h^2}{2} \vec{z} \\ &\Rightarrow \begin{cases} y_A = 0 \\ z_A = \frac{h}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque : A est appelé centre de poussée : point où l'action globale de l'eau sur le barrage ne crée pas de moment. O étant dans le plan médian du barrage, il est logique qu'il n'existe pas de composante de moment suivant \vec{z} . On peut faire une analogie avec le centre de gravité du triangle. Qui est situé aux 1/3 2/3.



Question 4 : Vérifier le critère de la fonction 1.2.

$$\|\vec{R}_{eau \rightarrow barrage}\| = \rho_{eau} g L \frac{h^2}{2} = 1000 \cdot 9,81 \frac{25^2}{2} \approx 245 \cdot 10^6 N < 300 \cdot 10^6 N$$

Le critère de la fonction 1.2 est donc respecté.

Exercice 14 : RESTAURANT SOUS-MARIN

Question 1 : Définir un système de coordonnées pour repérer tout point Q de la structure. En déduire l'expression de dS.

On utilise un système de coordonnées cylindrique avec la base direct $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_y)$

$$dS = R d\theta dy$$

Question 2 : Donner l'expression de la force élémentaire $d\vec{F}_{e \rightarrow s}(Q)$ de l'eau sur la structure.

$$d\vec{F}_{e \rightarrow s}(Q) = -p dS \vec{e}_r = -p R d\theta dy \vec{e}_r$$

Question 3 : Déterminer la résultante d'action globale de l'eau sur la structure $\vec{R}_{e \rightarrow s}$.

$$\vec{R}_{e \rightarrow s} = \int_S d\vec{F}_{e \rightarrow s}(Q) = \int_S -p R d\theta dy \vec{e}_r = -p R \int_{-L/2}^{L/2} dy \int_0^\pi \vec{e}_r d\theta = -p R L \int_0^\pi \vec{e}_r d\theta$$

$$\text{avec : } \int_0^\pi \vec{e}_r d\theta = \int_0^\pi (\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{z}) d\theta = \int_0^\pi \cos \theta d\theta \vec{x} + \int_0^\pi \sin \theta d\theta \vec{z} = [\sin \theta]_0^\pi \vec{x} + [-\cos \theta]_0^\pi \vec{z} = 2\vec{z}$$

$$\vec{R}_{e \rightarrow s} = -p \cdot 2RL \vec{z}$$

Question 4 : Exprimer $\|\vec{R}_{e \rightarrow s}\|$ en fonction de S.

$$\vec{R}_{e \rightarrow s} = -p \cdot 2RL \vec{z} = -pS \vec{z}$$

S est la surface projetée.

Remarque : on a le même calcul dans la répartition de pression d'un palier lisse dans le guidage d'un arbre.

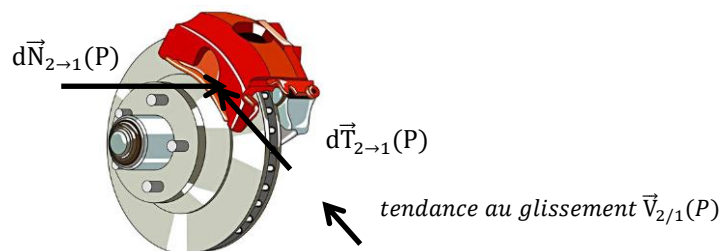
Question 5 : Déterminer le moment de l'action globale de l'eau sur la structure en O, $\vec{M}(O, e \rightarrow s)$.

$$\vec{M}_{e \rightarrow s}(O) = \int_S \vec{OQ} \wedge d\vec{F}_{eau \rightarrow barrage} = \iint_{y,\theta} (y\vec{y} + R\vec{e}_r) \wedge -p R dy d\theta \vec{e}_r = \iint_{y,\theta} p y R dy d\theta \vec{e}_\theta = p R \int_{-L/2}^{L/2} y dy \int_0^\pi \vec{e}_\theta d\theta = \vec{0}$$

Remarque : les forces élémentaires passent par la droite (O, \vec{y}) et elles se compensent 2 à 2.

Exercice 15 : FREIN DE BUGATTI CHIRON

Question 1 : Représenter sur les schémas du disque 1 ci-dessus, la force élémentaire de pression $d\vec{N}_{2 \rightarrow 1}(P)$ et la force élémentaire de résistance au glissement $d\vec{T}_{2 \rightarrow 1}(P)$ en un point P de la surface de contact.



Question 2 : Donner l'expression de la force élémentaire $d\vec{F}_{2 \rightarrow 1}(P)$ en fonction de p, f et dS.

$$d\vec{F}_{2 \rightarrow 1}(P) = d\vec{N}_{2 \rightarrow 1}(P) + d\vec{T}_{2 \rightarrow 1}(P)$$

Hypothèse : On se place à la limite du glissement

$$\|d\vec{T}_{2 \rightarrow 1}(P)\| = f \|d\vec{N}_{2 \rightarrow 1}(P)\| = f p dS$$

$$d\vec{F}_{2 \rightarrow 1}(P) = -p dS \vec{z}_1 + f p dS \vec{y}_2$$

$$dS = r d\theta dr$$

Question 3 : Indiquer en le justifiant, quelle composante du moment résultant de l'action mécanique d'une garniture 2 sur le disque 1 au point O permet de caractériser l'action de freinage d'une garniture. Déterminer cette composante.

$$\vec{M}_{2 \rightarrow 1}(O) = \int_S \vec{OP} \wedge d\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \int_S r \vec{x}_2 \wedge (-pdS \vec{z}_1 + fpdS \vec{y}_2) = -p \int_S r^2 d\theta dr \vec{y}_2 + fp \int_S r^2 d\theta dr \vec{z}_1$$

$$C_{f \text{ garniture}} = \vec{M}_{2 \rightarrow 1}(O) \cdot \vec{z}_1 = fp \int_{R_i}^{R_e} r^2 dr \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta = fp \left[\frac{r^3}{3} \right]_{R_i}^{R_e} [\theta]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{2}{3} fp \alpha (R_e^3 - R_i^3)$$

Question 4 : En déduire le couple total de freinage avec les deux étriers en fonction de α , F , f , R_i et R_e , avec F la force normale.

La surface de contact du secteur troué est $S = \frac{\alpha}{2\pi} \pi (R_e^2 - R_i^2) = \frac{\alpha}{2} (R_e^2 - R_i^2)$

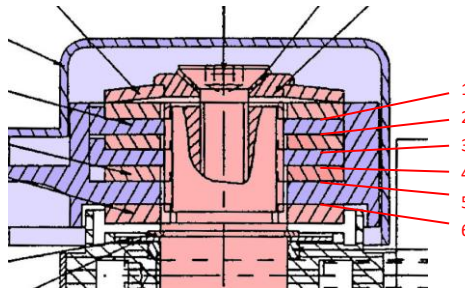
L'effort presseur est $F_{2 \rightarrow 1} = pS$

$$C_{f \text{ 2 garnitures}} = 2 \frac{2}{3} fp \alpha (R_e^3 - R_i^3) = 2 \frac{2}{3} f \frac{F_{2 \rightarrow 1}}{\alpha (R_e^2 - R_i^2)} \alpha (R_e^3 - R_i^3) = 2 \frac{2}{3} f F_{2 \rightarrow 1} \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2}$$

Remarque : dans le cas général on a $C_{f \text{ ngarnitures}} = n \frac{2}{3} f F \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2}$ avec n le nombre de surfaces de contact.

Pour l'étrier d'un vélo c'est pareil $n = 2$.

Pour l'ouvre portail de TP, où on a 6 surfaces disques troués, on aurait : $n = 6$ et la composante normale du moment est nulle puisqu'intégré entre 0 et 2π .

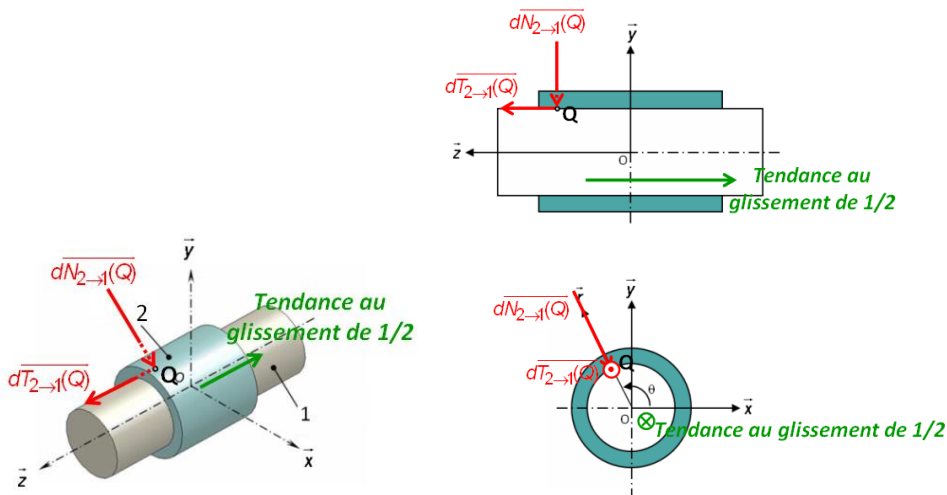


En bleu la CEC du bras, en rose la CEC de la sortie du réducteur. On doit limiter le couple transmissible pour des raisons de sécurité de la motorisation et des utilisateurs. En tournant d'un quart de tour la vis, on écrase les disques de friction et on impose une force normale au niveau du ventail de 150N comme l'impose la norme.

Exercice 16 : ASSEMBLAGE PAR FRETTAGE

Question 1 : Représenter sur deux schémas plans ou un schéma en perspective, la force élémentaire de pression $d\vec{N}_{2 \rightarrow 1}(Q)$ et la force élémentaire de résistance au glissement $d\vec{T}_{2 \rightarrow 1}(Q)$ en un point Q de la surface de contact.

$$dS = R d\theta dz$$



Question 2 : Donner l'expression de la force élémentaire $d\vec{F}_{2 \rightarrow 1}(Q)$.

$$d\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = d\vec{N}_{2 \rightarrow 1} + d\vec{T}_{2 \rightarrow 1}$$

Hypothèse : on se place à la limite du glissement.

la pression est constante.

$$d\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -pdS\vec{e}_r + fpdS\vec{z}$$

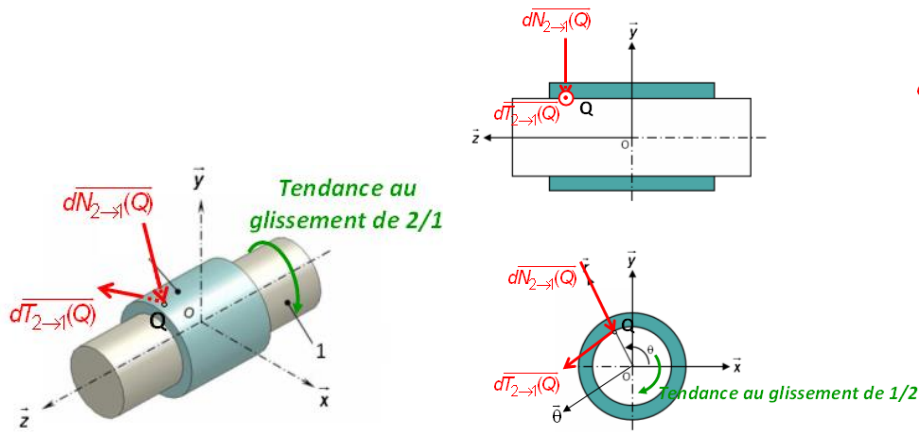
Remarque : $d\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ dépend de t , de Q , mais on n'insiste pas sur cet aspect dans la notation.

Question 3 : Déterminer, à la limite du glissement, l'effort axial maximal transmissible en fonction de p et des caractéristiques géométriques du frettage.

$$\begin{aligned} \vec{R}_{2 \rightarrow 1} &= \int_S d\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \int_S (-pdS\vec{e}_r + fpdS\vec{z}) = \iint_{\theta,z} (-pRd\theta dz\vec{e}_r + fpRd\theta dz\vec{z}) = -pR \iint_{\theta,z} (d\theta dz\vec{e}_r - fd\theta dz\vec{z}) \\ &= pRf \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz\vec{z} = f \cdot p \cdot 2\pi RL \vec{z} \end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{e}_r = \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}$ est un vecteur tournant, sa primitive sur $[0, 2\pi]$ est nulle. Toutes les forces élémentaires normales s'annulent entre elles 2 à 2.

Question 4 : Représenter sur deux schémas plans ou un schéma en perspective, la force élémentaire de pression $d\vec{N}_{2 \rightarrow 1}(Q)$ et la force élémentaire de résistance au glissement $d\vec{T}_{2 \rightarrow 1}(Q)$ en un point Q de la surface de contact.



Question 5 : Donner l'expression de la force élémentaire $d\vec{F}_{2 \rightarrow 1}(Q)$.

$$d\vec{F}_{2 \rightarrow 1}(Q) = d\vec{N}_{2 \rightarrow 1}(Q) + d\vec{T}_{2 \rightarrow 1}(Q)$$

Hypothèse : on se place à la limite du glissement.

la pression est constante.

$$d\vec{F}_{2 \rightarrow 1}(Q) = -pdS\vec{e}_r + fpdS\vec{e}_\theta$$

Question 6 : Déterminer, à la limite du glissement, le couple maximal transmissible en fonction de p et des caractéristiques géométriques du frettage.

$$\begin{aligned} \vec{M}_{2 \rightarrow 1}(O) &= \int_S \vec{OQ} \wedge d\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \int_S (R\vec{e}_r + z\vec{z}) \wedge (-pdS\vec{e}_r + fpdS\vec{e}_\theta) = \int_S R\vec{e}_r \wedge (-pdS\vec{e}_r + fpdS\vec{e}_\theta) = \int_S fpRRd\theta dz\vec{z} = \\ &= fpR^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz\vec{z} = f \cdot p \cdot 2\pi RL \cdot R\vec{z} \quad \text{avec } 2\pi RL, \text{ la surface de contact du cylindre.} \end{aligned}$$

Car z est une fonction impaire que l'on intègre sur un intervalle centré en 0.

Exercice 17 : OUVRANT DE BUGGATI

Question 1 : Déterminer l'expression littérale de la résultante selon \vec{z} de l'action mécanique du joint inférieur sur la vitre au cours du déplacement de celle-ci.

Hypothèse :

- On se place à la limite du glissement.
- On se place dans la phase de vie où la vitre monte.
- La pression linéique est constante.
- La vitre est modélisée par une géométrie rectangulaire.

La force résultante verticale provient du frottement des deux côtés de la vitre.

La force élémentaire est :

$$d\vec{R}_{j \rightarrow v} = dN_{j \rightarrow v} \vec{x} + dT_{j \rightarrow v} \vec{z} = pdl \vec{x} - fpdl \vec{z} \quad (\text{loi de Coulomb})$$

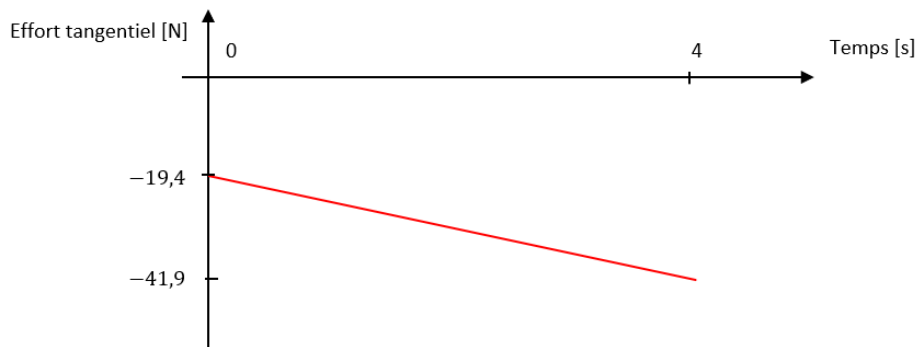
$$d\vec{R}_{j \rightarrow v} \cdot \vec{z} = 2 \int_1 d\vec{R}_{j \rightarrow v} \cdot \vec{z} = 2 \int_{l=0}^{l=L+2z} -fpdl = -2fp(L + 2z)$$

avec $z \in [0, H]$

Question 2 : Représenter l'évolution au cours du temps de la résultante des efforts résistants selon \vec{z} de l'ensemble des joints sur la vitre (2 joints verticaux de hauteur H et un joint horizontal de longueur L). Donner les valeurs numériques minimale et maximale de cet effort.

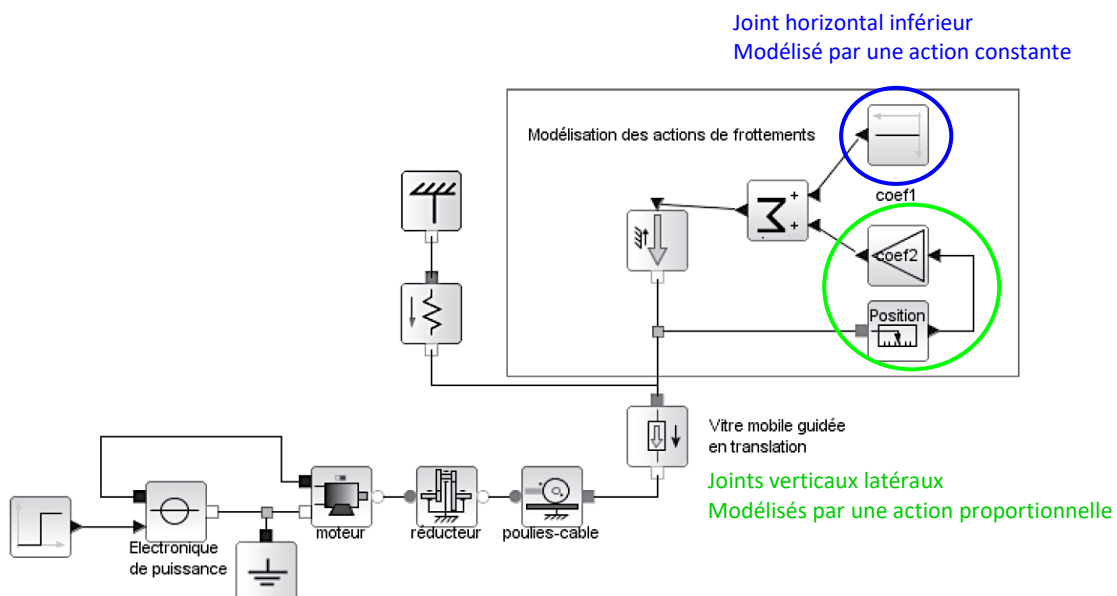
La force minimale est : $d\vec{R}_{j \rightarrow v} \cdot \vec{z} = -2fpL = -2.0,5.25.0,776 = -19,4N$

La force maximale est : $d\vec{R}_{j \rightarrow v} \cdot \vec{z} = -2fp(L + 2H) = -2.0,5.25.(0,776 + 2.0,450) = -41,9N$



Question 3 : Indiquer sur ce schéma l'action du joint horizontal inférieur et l'action des joints verticaux latéraux.

Question 4 : Compléter le schéma-blocs multiphysique pour prendre en compte cet obstacle. Une palette composée de constituants standards est donnée ci-dessous.



Remarque : le ressort donne directement une force.