
Sciences industrielles

CPGE 1^{ere} année



Actions mécaniques



Sommaire

1	Modélisation des AM	3
1.1	Concept d'action mécanique	3
1.2	Graphe de structure	3
1.3	Modélisation globale des AM	4
1.4	Modéliser les AM usuelles	5
2	Statique	9
2.1	Théorème de l'équilibre	9
2.2	Théorème d'un système soumis à 2 torseurs glisseurs	9
2.3	Théorème d'un solide soumis à 3 torseurs glisseurs	10
2.4	Hypothèse problème plan	10
2.5	Méthodologie pour une étude statique	11
3	Loi entrée-sortie en effort	12
3.1	Loi entrée-sortie en effort d'un transmetteur	12
3.2	Hypothèses	12
3.3	Loi entrée-sortie des transmetteurs usuels sans transformation de mouvement	13
3.4	Loi entrée-sortie des transmetteurs usuels avec transformation de mouvement	13
4	Modélisation des AM avec frottement	13
4.1	Phénomène de frottement	13
4.2	Modélisation globale des AM sans frottement	13
4.3	Modélisation globale des AM avec frottement	14
5	Modélisation locale des AM	17
5.1	AM à distance et de contact	17
5.2	Modèle local d'une AM à distance	18
5.3	Modèle local d'une AM de contact	18
5.4	Relation entre le modèle local et le modèle global	19
	QUESTIONS DE COURS	20

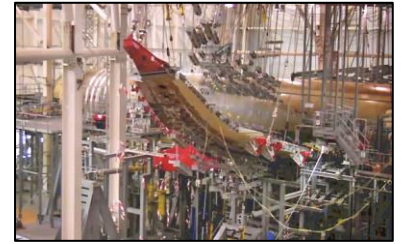
On a vu précédemment que l'on pouvait, à l'aide d'une simulation, prévoir le comportement cinématique d'un mécanisme.

Mais cela ne suffit pas pour concevoir un mécanisme ou vérifier qu'il répond bien aux attentes de ses utilisateurs. Il faut aussi s'intéresser aux **actions mécaniques** auxquelles ce dernier est soumis afin de :

(1) Déterminer leurs formes, leurs dimensions et le matériau qui les constituent.

- dimensionner⁽¹⁾ et choisir un composant ou des structures ;
- calculer les déformations induites par un chargement ;
- déterminer les équations dynamiques du mouvement.

C'est l'application du principe fondamental de la dynamique qui, après avoir identifié et modélisé les différentes actions mécaniques connues et recherchées, permet d'étudier la relation de cause à effet entre les mouvements (ou l'équilibre) d'un mécanisme et les actions mécaniques en présence.



Test de flexion d'une aile d'A350

1 Modélisation des AM

1.1 Concept d'action mécanique

Une **action mécanique** (notée AM) est un **phénomène** qui peut provoquer des déformations et des mouvements.

Une AM a toujours une origine et une cible. On utilisera la notation : $i \rightarrow j$.

Exemples :

- action de la terre sur le bateau : ter \rightarrow bateau
- action de l'eau sur le bateau : eau \rightarrow bateau
- action de l'air sur le cerf-volant : vent \rightarrow cerf - volant
- action du noyau interne sur la boussole : fer \rightarrow boussole



Un champ de force **modélise** une action mécanique.

Le champ de **moment**⁽²⁾ désigne l'effet d'un champ de force à distance.

(2) Une force peut provoquer une translation ou une rotation ! il faut donc une notion supplémentaire pour expliquer ce phénomène.

Il est donc illusoire de vouloir observer un champ de force. Une force est du domaine du modèle, une AM est du domaine du réel.

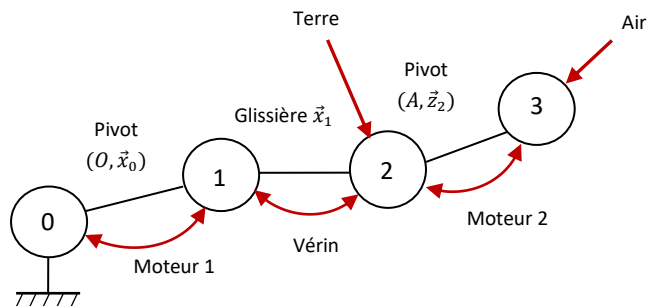
En pratique⁽³⁾, pour mesurer une AM, on utilisera la déformation d'un ressort, des jauges de déformation ou des cellules piézo-électrique.

(3) Pour savoir si une valise est lourde, il faut la mettre en mouvement ou lui faire provoquer une déformation !

1.2 Graphe de structure

Un **graphe de structure** ou **graphe d'analyse** est un **graphe des liaisons** complété des **actions mécaniques** sollicitant le mécanisme étudié. Il permet de recenser efficacement toutes les actions mécaniques.

Exemple : chaîne ouverte à 3 degrés de liberté.



1.3 Modélisation globale des AM

Torseur des AM

En cinématique du solide indéformable, on utilise le modèle du torseur pour décrire les mouvements. Par dualité, c'est donc ce même modèle que l'on utilise pour les actions mécaniques transmissibles.

On appelle **torseur des actions mécaniques** exercées de i sur j le torseur construit par dualité avec la cinématique pour exprimer la puissance développée lors d'un mouvement j/i . **Le torseur des AM modélise une AM.**

$$\vec{M}_{i \rightarrow j} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{E}$$

$$A \mapsto \vec{M}_{i \rightarrow j}(A) = \vec{M}_{i \rightarrow j}(B) + \overline{AB} \wedge \vec{R}_{i \rightarrow j} \quad (1)$$

Les **éléments de réduction** du torseur sont :

$$\vec{M}_{i \rightarrow j} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{i \rightarrow j} \\ \vec{M}_{i \rightarrow j}(A) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} X_{i \rightarrow j} \vec{x} + Y_{i \rightarrow j} \vec{y} + Z_{i \rightarrow j} \vec{z} \\ L_{i \rightarrow j} \vec{x} + M_{i \rightarrow j} \vec{y} + N_{i \rightarrow j} \vec{z} \end{Bmatrix}_A = \begin{pmatrix} X_{i \rightarrow j} & L_{i \rightarrow j} \\ Y_{i \rightarrow j} & M_{i \rightarrow j} \\ Z_{i \rightarrow j} & N_{i \rightarrow j} \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (2)(3)$$

$\vec{R}_{i \rightarrow j}$ est la **force résultante**⁽⁴⁾ de l'AM de $i \rightarrow j$. Elle modélise la part de l'action mécanique qui **génère ou modifie un mouvement de translation** à trajectoire rectiligne, ou provoque une déformation de traction ou compression. Elle est en en Newton [N] et est **invariante** ;

$\vec{M}_{i \rightarrow j}(A)$ le **moment résultant**⁽⁵⁾ de l'AM de $i \rightarrow j$. Il modélise la part de l'action mécanique qui **génère ou modifie un mouvement de rotation**, ou provoque une déformation de torsion. Il est en Newton mètre [Nm] et **dépend du point d'expression du torseur**.

(1) Il y a le même lien entre le torseur $\vec{M}_{2 \rightarrow 1}$ et le moment $\vec{M}_{2 \rightarrow 1}(A)$ qu'entre la fonction f et l'image $f(x)$.

(2) La notation utilisée dans ce cours correspond à une fonction vectorielle. Cependant, on pourrait utiliser une autre notation :

$$\mathcal{F}(i \rightarrow j) = \begin{Bmatrix} \vec{R}(i \rightarrow j) \\ \vec{M}(A, i \rightarrow j) \end{Bmatrix}_A$$

qui correspond à une fonction torsorielle.

\mathcal{F} comme force, ce qui a l'avantage donner en dans le cours de dynamique de 2nd année :

$$P(i \rightarrow j/k) = \mathcal{F}(i \rightarrow j) \circ \mathcal{V}(j/k)$$

(3) Attention, cette dernière notation n'est pratique que dans les rares cas où il n'y a qu'une seule base. Or il y a souvent plusieurs solides dans un mécanisme.

(4) On utilise le terme « résultante » car le modèle résulte de la somme de toutes les AM de contact réparties au niveau du contact entre les deux solides.

(5) On peut parler du moment d'une force ou du moment d'un couple.

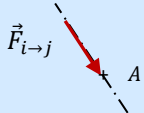
(6) Glisseur : la force peut "glisser" en tout point de la droite d'action en modélisant la même action.

(7) La distance entre un point et une droite se mesure au niveau du projeté orthogonal du point sur la droite.

Cas particulier d'un torseur glisseur

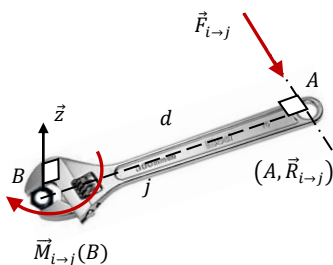
Une force modélise une AM d'un certain type.

Une force est décrite par un **torseur glisseur**⁽⁶⁾ :

$$\vec{M}_{i \rightarrow j} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{i \rightarrow j} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$


Ce torseur est **invariant** pour tous les points $P \in (A, \vec{F}_{i \rightarrow j})$ appelée **droite d'action**. Le **moment central** (c'est-à-dire le moment sur l'axe du torseur) d'une force résultante est nul.

Détermination du moment d'une force en un autre point que le point d'application :



$$\vec{M}_{i \rightarrow j} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{i \rightarrow j} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{i \rightarrow j} \\ \pm d \|\vec{F}_{i \rightarrow j}\| \vec{z} \end{Bmatrix}_B$$

car $\vec{M}_{i \rightarrow j}(B) = \vec{M}_{i \rightarrow j}(A) + \overline{BA} \wedge \vec{F}_{i \rightarrow j} = \pm d \|\vec{F}_{i \rightarrow j}\| \vec{z}$

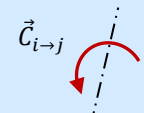
d est appelé **bras de levier** (distance entre B et la droite d'action)⁽⁷⁾

sens trigo $\rightarrow +$ et sens horaire $\rightarrow -$

Cas particulier d'un torseur couple

Un couple modélise une AM d'un certain type.

Un couple est décrit par un **torseur couple** :

$$\vec{M}_{i \rightarrow j} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{C}_{i \rightarrow j} \end{Bmatrix}_{\forall P}$$


Ce torseur est **invariant** pour tous les points P de l'espace. En effet :

$$\vec{M}_{i \rightarrow j}(B) = \vec{M}_{i \rightarrow j}(A) + \overline{BA} \wedge \vec{R}_{i \rightarrow j} = \vec{M}_{i \rightarrow j}(A) + \vec{0} = \vec{C}_{i \rightarrow j}$$

Exemple : champs de moments d'un torseur

Torseur glisseur $\vec{M}_{i \rightarrow j} = \underset{A}{\square} \begin{Bmatrix} 1 \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$	Torseur couple $\vec{M}_{i \rightarrow j} = \underset{A}{\square} \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ 1 \vec{z} \end{Bmatrix}$

Le torseur est une même fonction vectorielle mathématique qui peut représenter des grandeurs différentes selon son contexte.

En cinématique ces deux champs de vitesses représentent le champ des vitesses respectivement d'une rotation et d'une translation.

Pour une action mécanique, ils représentent le champ de moments. C'est-à-dire qu'en chaque point, le vecteur moment indique l'intensité du moment, et la direction autour de laquelle on va tourner.

AM réciproques

$i \rightarrow j$ est l'**action réciproque** de l'action mécanique $j \rightarrow i$.

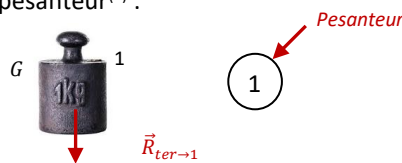
On admettra sans démonstration :

Théorème des actions réciproques : $\vec{M}_{i \rightarrow j} = -\vec{M}_{j \rightarrow i} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_{i \rightarrow j} \\ \vec{M}_{i \rightarrow j}(A) \end{cases} = - \begin{cases} \vec{R}_{j \rightarrow i} \\ \vec{M}_{j \rightarrow i}(A) \end{cases}$

1.4 Modéliser les AM usuelles

AM de la pesanteur

Considérons un solide 1 soumis à la pesanteur⁽¹⁾ :

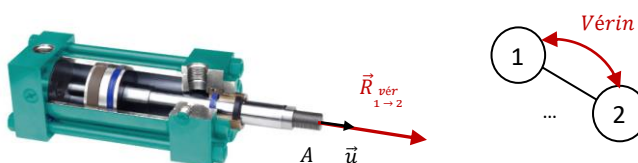


Le **poids** d'un solide 1 de masse m est une **force de résultante** $m\vec{g}$ passant par le **centre de masse**⁽²⁾ G :

$\vec{M}_{ter \rightarrow 1} = \underset{G}{\square} \begin{Bmatrix} -mg\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$ valable $\forall P \in (G, \vec{z})$

AM d'un vérin

Considérons un vérin placé en parallèle d'une liaison.



(1) L'action mécanique de gravité est l'action de la matière sur la matière. La pesanteur prend en compte la gravité et l'accélération de la rotation de la Terre.

(2) Centre de masse est synonyme de centre d'inertie et de centra de gravité.

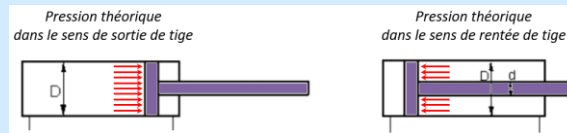
Si pour un vérin :

- le corps et la tige sont en **liaison articulaire (pivot ou sphérique)** à leur « point d'attache » ;
- et que **les poids du corps et de la tige sont négligés,**

alors le corps et la tige du vérin ne sont pas représentés sur le graphe d'analyse, et l'action du vérin est **modélisée par une force** de droite d'action passant par ses points d'attache :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{vérin} = \begin{matrix} \square \\ A \end{matrix} \begin{matrix} F_{1 \rightarrow 2} \vec{u} \\ \vec{0} \end{matrix} = \begin{matrix} \square \\ A \end{matrix} \begin{matrix} pS \vec{u} \\ \vec{0} \end{matrix} \quad \text{valable } \forall P \in (A, \vec{u})$$

Le vérin est de type pneumatique ou hydraulique.



avec : $p^{(1)}$ en [Pa] la **pression uniforme** du fluide ;

S en [m²] la **surface de contact fluide/piston** :

$$S = \frac{\pi D^2}{4} \text{ pour une tige qui sort et } S = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} \text{ pour une tige qui rentre}$$

(1) Un Pascal :

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N.m}^{-2}$$

un Méga Pascal :

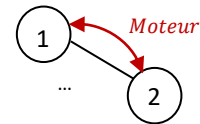
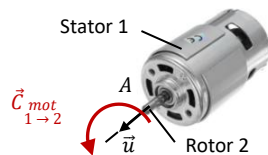
$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ N.mm}^{-2}$$

un bar :

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 101325 \text{ Pa}$$

AM d'un moteur électrique

Considérons un moteur placé en parallèle d'une liaison.

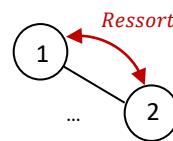


L'action mécanique **du stator d'un moteur électrique sur son rotor** est modélisée par un **couple orienté par l'axe** du moteur :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{mot} = \begin{matrix} \square \\ A \end{matrix} \begin{matrix} \vec{0} \\ C_{1 \rightarrow 2} \vec{u} \end{matrix} \quad \text{valable } \forall P$$

AM d'un ressort de traction/compression

Considérons un ressort de traction/compression placé en parallèle d'une liaison. Soit λ la longueur du ressort.

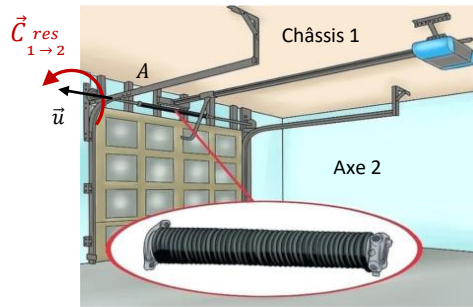


L'action d'un **ressort de traction/compression** de longueur à vide λ_0 et de raideur k en [N/m] est une **force passant par ses points d'attache** et d'intensité **proportionnelle à la variation de longueur** du ressort :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{res} = \begin{matrix} \square \\ A \end{matrix} \begin{matrix} -k(\lambda - \lambda_0) \vec{u} \\ \vec{0} \end{matrix} \quad \text{valable } \forall P \in (A, \vec{u})$$

AM d'un ressort de torsion

Considérons un ressort de torsion placé en parallèle d'une liaison. Soit α l'angle du ressort.



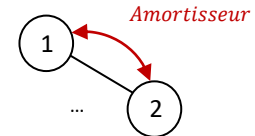
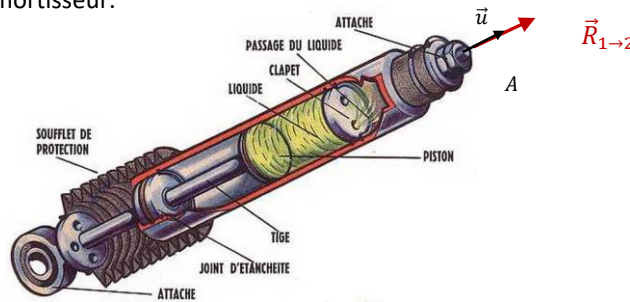
L'action d'un **ressort de torsion** d'angle à vide α_0 et de raideur k en $[Nm/rad]$ est un **couple**, d'intensité **proportionnelle à la variation de l'angle** du ressort :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{res} = \begin{cases} \vec{0} \\ -k(\alpha - \alpha_0)\vec{u} \end{cases} \quad \text{valable } \forall P$$

AM d'un amortisseur

Considérons un amortisseur⁽¹⁾ placé en parallèle d'une liaison. Soit c le coefficient d'amortissement de l'amortisseur.

(1) Attention, un amortisseur est souvent mis en parallèle d'un ressort, cependant ce sont deux composants indépendants.

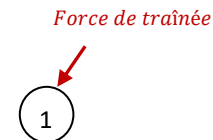
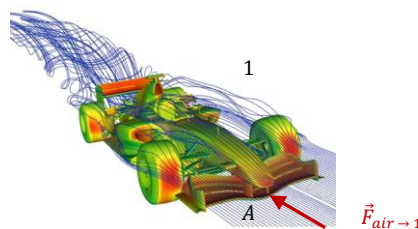


L'action d'un **amortisseur** de coefficient d'amortissement c en $[N/(m/s)]$ est une **force**, d'intensité **proportionnelle à la vitesse** de l'amortisseur :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{amo} = \begin{cases} -c(\lambda - \lambda_0)\vec{u} \\ \vec{0} \end{cases} \quad \text{valable } \forall P \in (A, \vec{u})$$

AM de traînée

Considérons un solide 1 soumis à au frottement visqueux de l'air :



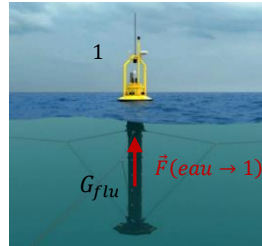
La **force de traînée** de l'air sur la voiture due au frottement fluide visqueux est :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{air} = \begin{cases} \frac{1}{2} C_x \rho S V^2 \vec{u} \\ \vec{0} \end{cases} \quad \text{valable } \forall P \in (A, \vec{u})$$

avec : ρ en $[kg/m^3]$ la **masse volumique** du fluide ;
 S en $[m^2]$ la **surface projetée de pénétration** ;
 V en $[m/s]$ la **vitesse** de déplacement ;
 C_x le **coefficient de traînée** dans l'air.

AM de la poussée d'Archimède

Considérons une bouée houlomotrice 1 soumis à l'action de la poussée d'Archimède :



Poussée d'Archimède



La **poussée d'Archimède** de l'eau sur la bouée est :

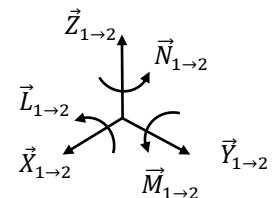
$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{eau} = \begin{matrix} \square \\ G_{flu} \end{matrix} \begin{cases} \rho V g \vec{z} \\ \vec{0} \end{cases} \quad \text{valable } \forall P \in (G_{flu}, \vec{z})$$

avec : ρ en $[kg/m^3]$ la **masse volumique** du fluide ;
 V en $[m^3]$ le **volume de fluide** déplacé ;
 g en $[m/s^2]$ l'**accélération** de la gravité.

AM transmissibles par une liaison

Une liaison entre deux solides 1 et 2 permet les mouvements relatifs entre ces deux solides, mais aussi de transmettre des actions mécaniques d'un solide à l'autre.

Les composantes des vecteurs $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{M}_{1 \rightarrow 2}(A)$ sont ici appelées **inconnues de liaisons**. En général, dans les problèmes rencontrés, elles sont inconnues et on ne cherche pas à les déterminer, sauf si l'on cherche à dimensionner des éléments technologiques qui réalisent une liaison.



Une **liaison parfaite** est une liaison **cinématiquement parfaite** ne **dissipant pas d'énergie**⁽¹⁾ quels que soient les efforts transmis par cette liaison et quelles que soient les amplitudes et vitesses des mouvements relatifs. Conséquences :

Les torseurs des actions mécaniques et cinématiques d'une liaison parfaite ont une **forme duale**.

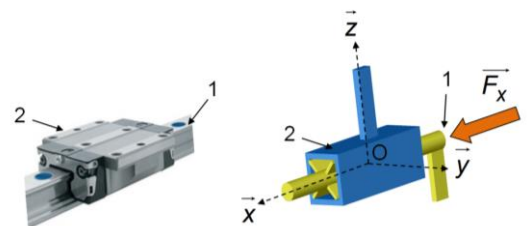
- pour chaque degré de liberté supprimé, il existe une composante d'action mécanique susceptible d'être transmise par la liaison ;
- à l'inverse, aucune composante d'action mécanique ne peut être transmise là où un mouvement relatif est possible.

Exemple : liaison glissière de direction \vec{x} entre 1 et 2

La liaison comprend 1 degré de liberté : T_x .

La liaison ne peut transmettre d'action élémentaire \vec{F}_x , d'où $X_{1 \rightarrow 2} = 0$.

Si on applique une force \vec{F}_x sur la pièce 1, la pièce 2 ne « ressent » rien, car la force n'est pas transmise d'un solide à l'autre par l'intermédiaire de la liaison.



A un degré de liberté en translation supprimé correspond une composante de la résultante de l'action mécanique

$$\vec{V}_{2/1} = \begin{matrix} \square \\ P \end{matrix} \begin{cases} 0 \vec{x} + 0 \vec{y} + 0 \vec{z} \\ V_{x,2/1} \vec{x} + 0 \vec{y} + 0 \vec{z} \end{cases} \quad \vec{M}_{1 \rightarrow 2} = \begin{matrix} \square \\ P \end{matrix} \begin{cases} 0 \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ L_{1 \rightarrow 2} \vec{x} + M_{1 \rightarrow 2} \vec{y} + N_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \end{cases} \quad (2)$$

A un degré de liberté en rotation supprimé correspond une composante du moment de l'action mécanique

Voir le tableau des liaisons pour les autres liaisons.

(1) Liaison sans frottement, le frottement étant considéré comme une résistance au mouvement.

Cette hypothèse vient s'ajouter aux deux autres hypothèses de liaison parfaite découvertes dans le cours de cinématique :

- surface de contact géométriquement parfaite ;

- jeux de fonctionnement nuls entre les surfaces de contact.

(2) Les zones de validité du torseur cinématique et du torseur des actions mécaniques transmissibles sont identiques.

2 Statique

2.1 Théorème de l'équilibre

Référentiel Galiléen

Un référentiel est l'association d'un repère géométrique et d'une échelle de temps.

En SI, on considère Galiléen :

- tout repère **fixe** par rapport à la Terre ;
- ou tout repère en mouvement de **translation à trajectoire rectiligne uniforme** par rapport à la Terre.

Equilibre et statique

On appelle **équilibre**⁽¹⁾ un mouvement nul.

La **statique**⁽²⁾ est l'étude des états d'équilibres.

Théorème de l'équilibre

Théorème de l'équilibre (TE)⁽³⁾⁽⁴⁾ :

Si un système matériel Σ est à l'équilibre par rapport à un référentiel Galiléen alors la somme des torseurs des actions mécaniques du milieu extérieur sur Σ est nulle.

$$\forall t, \forall P \quad \vec{V}_{\Sigma/R_g}(P) = \vec{0} \Rightarrow \forall t \sum_i \vec{M}_{i \rightarrow \Sigma} = \vec{0} \Rightarrow \sum_i \begin{Bmatrix} \vec{R}_{i \rightarrow \Sigma} \\ \vec{M}_{i \rightarrow \Sigma}(A) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Le Principe Fondamental de la Statique (PFS) est un cas particulier du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) appliqué à un ensemble de solides en équilibre.

L'équation torsorielle ci-dessus conduit donc à l'écriture de **2 équations vectorielles** :

Théorème de la Résultante Statique (TRS) : $\sum_i \vec{R}_{i \rightarrow \Sigma} = \vec{0}$

Théorème du Moment Statique (TMS) au point A : $\sum_i \vec{M}_{i \rightarrow \Sigma}(A) = \vec{0}$

Après avoir exprimé ces vecteurs dans une seule et unique base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, chacune de ces équations vectorielles donne 3 équations scalaires, soit **6 équations scalaires** au total :

$$\begin{aligned} \vec{R}_{\Sigma \rightarrow \Sigma} \cdot \vec{x} &= 0 & \vec{M}_{\Sigma \rightarrow \Sigma}(A) \cdot \vec{x} &= 0 \\ \vec{R}_{\Sigma \rightarrow \Sigma} \cdot \vec{y} &= 0 & \vec{M}_{\Sigma \rightarrow \Sigma}(A) \cdot \vec{y} &= 0 \\ \vec{R}_{\Sigma \rightarrow \Sigma} \cdot \vec{z} &= 0 & \vec{M}_{\Sigma \rightarrow \Sigma}(A) \cdot \vec{z} &= 0 \end{aligned}$$

2.2 Théorème d'un système soumis à 2 torseurs glisseurs

Exemple : Soit un solide S à l'équilibre, soumis à 2 forces :

On isole {S} :

Rédaction 1⁽⁷⁾ :

On fait l'Inventaire des Actions Mécaniques Extérieures à {S} :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow S} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{1 \rightarrow S} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{1 \rightarrow S} \\ \vec{BA} \wedge \vec{R}_{1 \rightarrow S} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{M}_{2 \rightarrow S} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{2 \rightarrow S} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

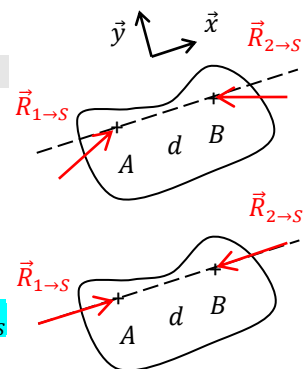
car $\vec{M}_{1 \rightarrow S}(B) = \vec{M}_{1 \rightarrow S}(A) + \vec{BA} \wedge \vec{R}_{1 \rightarrow S}$

On applique le Principe Fondamental de la Statique (PFS) en B à {S} :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow S} + \vec{M}_{2 \rightarrow S} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{R}_{1 \rightarrow S} + \vec{R}_{2 \rightarrow S} \\ \vec{BA} \wedge \vec{R}_{1 \rightarrow S} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$\rightarrow \vec{R}_1$ et \vec{R}_2 sont de même direction, de même norme et sens contraire
 \rightarrow les deux droites d'actions sont identiques et passent par (AB)



(1) aequilibrium
 aequus, égal
 libra, balance
 (2) staticus, stable

(3) Appelé parfois abusivement Principe Fondamental de la Statique (PFS) si on n'a pas admis un principe plus général avant.

(4) La réciproque est fausse.

(5) On pourrait aussi noter :
 $\sum_i F(i \rightarrow S) = 0$

(6) On note $\vec{\Sigma}$ le complémentaire de Σ .

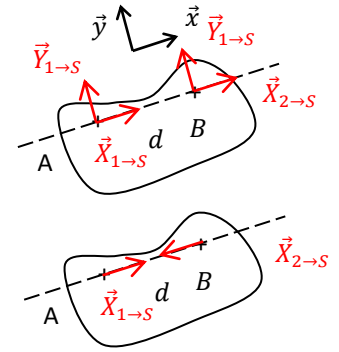
(7) Si l'énoncée demande une démonstration et utilise la notation \vec{R} et \vec{M} .

(1) Si l'énoncée demande une démonstration et utilise la notation X, Y, Z, L, M, N.

Rédaction 2⁽¹⁾ :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow S} = \begin{matrix} \square \\ A \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} X_{1 \rightarrow S} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow S} \vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right. = \begin{matrix} \square \\ B \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} X_{1 \rightarrow S} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow S} \vec{y} \\ -d\vec{x} \wedge (X_{1 \rightarrow S} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow S} \vec{y}) \end{matrix} \right.$$

et $\vec{M}_{2 \rightarrow S} = \begin{matrix} \square \\ B \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} X_{2 \rightarrow S} \vec{x} + Y_{2 \rightarrow S} \vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right.$



On applique le Principe Fondamental de la Statique (PFS) en B à {S} :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow S} + \vec{M}_{2 \rightarrow S} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \square \\ B \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} X_{1 \rightarrow S} + X_{2 \rightarrow S} = 0 \\ Y_{1 \rightarrow S} + Y_{2 \rightarrow S} = 0 \\ -d\vec{x} \wedge (X_{1 \rightarrow S} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow S} \vec{y}) \cdot \vec{z} = 0 \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{matrix} \square \\ B \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} X_{1 \rightarrow S} = -X_{2 \rightarrow S} \\ Y_{1 \rightarrow S} = -Y_{2 \rightarrow S} \\ Y_{1 \rightarrow S} = 0 \end{matrix} \right.$$

(2) Si l'énoncée ne demande pas de démonstration.

Rédaction 3⁽²⁾ :

S est un solide en équilibre soumis à 2 torseurs glisseurs, donc le Principe Fondamental de la Statique (PFS) en B donne :

Conclusion :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow S} = -\vec{M}_{2 \rightarrow S} = \begin{matrix} \square \\ A \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} F \vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix} \right.$$

il n'y a plus qu'une inconnue, l'intensité de la force.

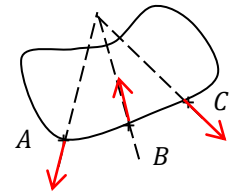
(3) Exemple : bielle, corps de vérin et tige, roue avant de voiture... (avec l'hypothèse pesanteur négligé sur Σ)

Si un système matériel Σ⁽³⁾ est en équilibre soumis à 2 torseurs glisseurs (c'est-à-dire 2 forces) alors les torseurs glisseurs sont **opposés**, autrement dit :

- les **résultantes** sont **opposées** (même direction, même norme, sens contraire) ;
- les **droites d'action** sont **identiques** et **passent par les points d'application**.

2.3 Théorème d'un solide soumis à 3 torseurs glisseurs

Si un solide est en équilibre et est soumis à 3 forces, alors ces forces sont coplanaires et de somme nul, de plus elles sont concourantes en un même point ou parallèles⁽⁴⁾ et la somme des moments est nulle.

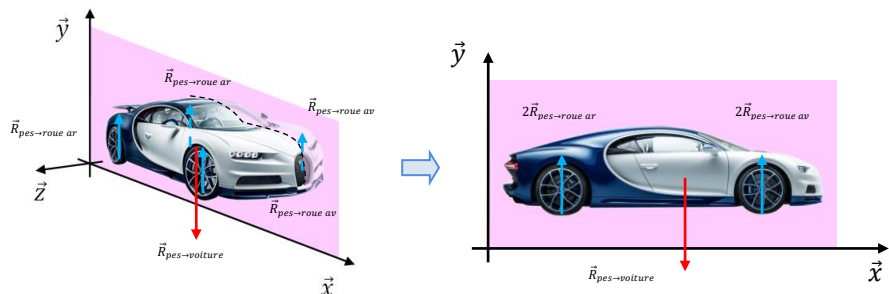


(4) Si elles sont parallèles, alors elles sont « concourantes en un point à l'infini ».

2.4 Hypothèse problème plan

On peut admettre que l'on est face à un **problème plan** si :

- la **géométrie des liaisons** du mécanisme présente un **plan de symétrie** ;
- les résultantes sont **parallèles** au plan de symétrie ;
- les moments sont **perpendiculaires** au plan de symétrie.



Dans ce cas, les composantes qui correspondent à des actions mécaniques susceptibles de faire sortir les solides du plan sont **nulles**.

Problème plan (O, \vec{x}, \vec{y})	$\vec{M}_{1 \rightarrow 2} = \begin{cases} X_{1 \rightarrow 2} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ L_{1 \rightarrow 2} \vec{x} + M_{1 \rightarrow 2} \vec{y} + N_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \end{cases} = \begin{cases} X_{1 \rightarrow 2} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y} \\ N_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \end{cases}$
---------------------------------------	---

L'hypothèse de problème plan permet de simplifier l'écriture des torseurs et d'alléger la mise en œuvre du Théorème de l'équilibre.

Seules 3 équations scalaires seront issues du PFS (au lieu de 6) : 2 pour les résultantes et 1 pour le moment.

Liaisons modélisables par des torseurs glisseurs

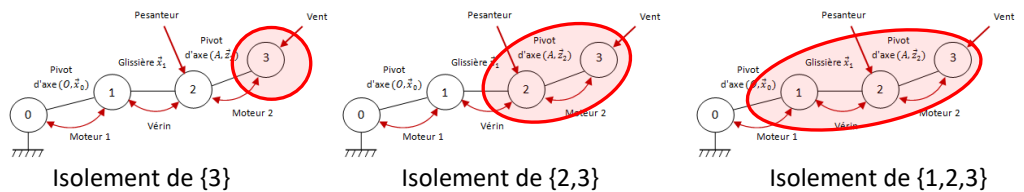
Les actions mécaniques transmissibles dans les liaisons **sphérique, sphère-cylindre et sphère-plan** sont toujours modélisables par des **torseur glisseur** (force).
Avec l'**hypothèse problème plan**, il faut y rajouter les liaisons **pivot, pivot glissant et cylindre-plan** dont l'axe est perpendiculaire au plan.

2.5 Méthodologie pour une étude statique

(1) On n'isole jamais le bâti.

- dessiner le **graphe de structure** ;
- réaliser les **figures de changement de base** ;
- **représenter** des forces et distances sur le schéma cinématique.
- Définir un **isolement**⁽¹⁾ :
 Dans une chaîne ouverte, isoler l'extrémité de la chaîne ouverte en conservant l'actionneur à dimensionner comme action extérieure.
 Dans une chaîne fermée, isoler les ensembles de solides soumis à deux forces (bielle, vérin, roue non-motrice, bouée...) puis isoler un ensemble de solides qui permet de relier les actions mécaniques extérieures aux actions mécaniques à déterminer (liaison ou actionneur).
- lister les **hypothèses** (problème plan, liaison parfaite, pesanteur négligée...);
- faire l'**Inventaire des Actions Mécaniques Extérieures**, en écrivant leur torseur, et en tenant compte des hypothèses ;
- appliquer le **TRS/TMS/PFS** afin d'éliminer les inconnues ou utiliser sans démonstration les résultats concernant les solides soumis à deux glisseurs ;
- **résoudre** le système d'équations ;
- **application numérique** et comparaison au CdCF.

Exemple de stratégie d'isolement : chaîne ouverte à 3 degrés de liberté



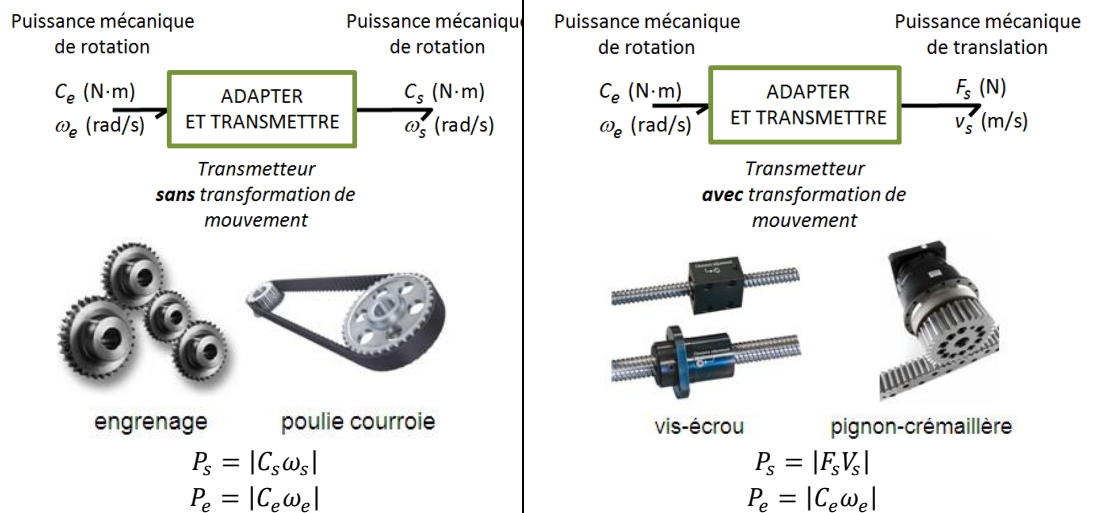
AM à déterminer	Isolement	Théorème	Projection	Résultat
Moteur 2	{3}	Théorème du moment statique en A $\vec{M}_{3 \rightarrow 3}(A) \cdot \vec{z}_2 = 0$	sur \vec{z}_2	$\vec{M}_{2 \rightarrow 3}^{mot 2}(A) = f(\vec{R}_{vent \rightarrow 3})$
Vérin	{2,3}	Théorème de la résultante statique $\vec{R}_{2 \rightarrow 3} + \vec{R}_{pes \rightarrow 2} \cdot \vec{x}_1 = 0$	sur \vec{x}_1	$\vec{R}_{1 \rightarrow 2}^{vér} = f(\vec{R}_{vent \rightarrow 3}, \vec{R}_{pes \rightarrow 2})$
Moteur 1	{1,2,3}	Théorème du moment statique en O $\vec{M}_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1+2+3}(O) \cdot \vec{x}_0 = 0$	sur \vec{x}_0	$\vec{M}_{0 \rightarrow 1}^{mot 1}(O) = f(\vec{R}_{vent \rightarrow 3}, \vec{R}_{pes \rightarrow 2})$

3 Loi entrée-sortie en effort

3.1 Loi entrée-sortie en effort d'un transmetteur

Généralement, les transmetteurs usuels (engrenages, poulie-courroie, vis-écrou...) sont entraînés par un actionneur rotatif (moteur, ...) qui exerce un couple C_e . La pièce d'entrée du transmetteur tourne alors à la vitesse ω_e par rapport au bâti.

En sortie, selon que le transmetteur ait transformé le mouvement ou pas, ce dernier exercera une force F_s ou un couple C_s . La pièce de sortie avancera à la vitesse V_s ou tournera à la vitesse ω_s par rapport au bâti.



Une loi entrée-sortie en effort caractérise le comportement en effort du composant de la chaîne de puissance, elle en est le modèle en effort.

Exemples pour les transmetteurs usuels :

$$C_s = f(C_e) \text{ ou } F_s = f(C_e)$$

Dans le cas général, en régime permanent, on définit le rendement comme :

$$\frac{P_s}{P_e} = \eta \leq 1 \quad (1)$$

(1) Si on néglige les pertes, alors $\frac{P_s}{P_e} = 1$

3.2 Hypothèses

La loi entrée-sortie en effort des transmetteurs usuels peut se déterminer rapidement à partir de leur **loi entrée-sortie cinématique, dans les conditions suivantes** :

- **fonctionnement en régime permanent**, c'est-à-dire lorsque l'actionneur tourne à vitesse constante ;
- **liaisons parfaites** entre les pièces qui constituent le transmetteur, pas de phénomènes dissipatifs (frottement sec ou visqueux) ;
- **action de la pesanteur** sur les pièces qui constituent le transmetteur, et **action interne de ressorts... négligeables** devant les autres actions mécaniques mises en jeu.

3.3 Loi entrée-sortie des transmetteurs usuels sans transformation de mouvement

Transmetteurs train d'engrenages, poulies-courroie crantée, pignons-chaîne

Loi entrée-sortie cinématique : $\omega_s = r\omega_e$ avec r le rapport de transmission

Loi entrée-sortie en effort : $C_s = \frac{\eta}{r} C_e$

Un réducteur⁽¹⁾ diminue la vitesse de rotation et augmente le couple.

Démonstration :

Pour déterminer une loi d'entrée-sortie en effort, on écrit les puissances et on simplifie par la cinématique.

$$\begin{cases} P_s = C_s \omega_s \\ P_e = C_e \omega_e \\ \frac{P_s}{P_e} = \eta \\ \omega_s = r \omega_e \end{cases} \Rightarrow C_s \omega_s = \eta C_e \omega_e \Rightarrow C_s r \omega_e = \eta C_e \omega_e \Rightarrow C_s = \frac{\eta}{r} C_e$$

Le rendement n'est une grandeur qui ne concerne que les efforts⁽²⁾.

3.4 Loi entrée-sortie des transmetteurs usuels avec transformation de mouvement

Transmetteur pignon-crémaillère

Loi entrée-sortie cinématique : $V_s = R\omega_e$

Loi entrée-sortie en effort : $F_s = \frac{1}{R} \eta C_e$

Transmetteur vis-écrou

Loi entrée-sortie cinématique : $V_s = \frac{pas}{2\pi} \omega_e$

Loi entrée-sortie en effort : $F_s = \frac{2\pi}{pas} \eta C_e$

4 Modélisation des AM avec frottement

Phénomène de frottement

Le **frottement**⁽³⁾ est un **phénomène dissipateur d'énergie** observé au niveau du mouvement relatif entre deux éléments. Il peut être :

- **utile** lorsqu'il s'agit de freiner ou d'accélérer un solide ;
- **néfaste** lorsqu'il est à l'origine d'usure ou d'échauffement.

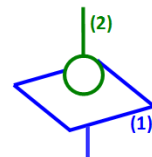
Le frottement transforme l'énergie mécanique en chaleur, et est donc cause d'irréversibilité.

Modélisation globale des AM sans frottement

Concernant les solides, le mouvement relatif est à observer au niveau du contact entre ces éléments, il est donc nécessaire de se placer au niveau local, au niveau d'un point de contact.

On rappelle la forme⁽⁴⁾ du torseur des actions mécaniques transmissibles dans le cas d'une **liaison sphère-plan parfaite** de centre I et de normale \vec{z} :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2} = \begin{Bmatrix} \vec{N}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I = \begin{Bmatrix} N_{1 \rightarrow 2} \vec{n} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I$$



(1) Réducteur est l'abréviation de réducteur de vitesse.

(2) Cela veut dire qu'un mécanisme avec énormément de frottements fonctionnera, mais il faudra fournir beaucoup de couple pour le mettre en mouvement. Le rendement est toujours du côté de l'entrée.

(3) La science du frottement s'appelle la tribologie.

Expérience et animation sur le frottement : <https://sciencesindustrielles.com/glossary/frottement/>



(4) Dans le cas d'une hypothèse de problème plan, le torseur des actions mécaniques transmissibles dans une liaison cylindre-plan a la même forme.

4.3 Modélisation globale des AM avec frottement

Résistance au glissement : Modèle de Coulomb

Exemple : Soit 2 solides en contact. Le solide 2 pèse 70 N. On applique une force \vec{F} de norme de plus en plus importante sur le solide 2 avec comme objectif de le faire glisser. On prendra $f = 0,3$ et une échelle de $10\text{ N} = 1\text{ carreau}$.

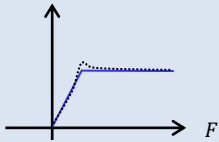
(1) Parler de "tendance au glissement" présuppose déjà d'avoir résolu l'étude de manière intuitive, c'est donc une erreur de raisonnement. Cependant dans un souci de simplification nous utiliserons ce vocabulaire.

(2) Si on pousse plus fort verticalement, on peut retenir plus fort tangentiellement. C'est le principe des ailerons de Formule 1. On perd en aérodynamisme pour gagner en adhérence et pouvoir accélérer plus.



On pose 2 sur 1. On pousse faiblement avec $F = 10\text{ N}$.	On pousse davantage avec $F = 20\text{ N}$.
ADHÉRENCE avec frottement Tendance au glissement ⁽¹⁾	ADHÉRENCE avec frottement Limite adhérence - glissement
$\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2} = N_{1 \rightarrow 2} \vec{n} + T_{1 \rightarrow 2} \vec{t}$ <p style="text-align: center;">avec $T_{1 \rightarrow 2} < f N_{1 \rightarrow 2}$ et $f = \tan(\varphi)$</p> <p>$\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ est à l'intérieur du cône d'adhérence</p> <p>$\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ s'oppose à la tendance au glissement 2/1</p>	$\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2} = N_{1 \rightarrow 2} \vec{n} + T_{1 \rightarrow 2} \vec{t}$ <p style="text-align: center;">avec $T_{1 \rightarrow 2} = f N_{1 \rightarrow 2}$ et $f = \tan(\varphi)$</p> <p>$\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ est sur le cône d'adhérence</p> <p>$\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ s'oppose à la tendance au glissement 2/1</p>
On pousse davantage avec $F = 30\text{ N}$.	On pousse avec $F = 30\text{ N}$. On pose un autre solide 3 sur 2. 3 pèse 30 N . ⁽²⁾
GLISSEMENT avec frottement	ADHÉRENCE avec frottement
$\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2} = N_{1 \rightarrow 2} \vec{n} + T_{1 \rightarrow 2} \vec{t}$ <p style="text-align: center;">avec $T_{1 \rightarrow 2} = f N_{1 \rightarrow 2}$ et $f = \tan(\varphi)$</p> <p>$\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ est sur le cône d'adhérence</p> <p>$\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ s'oppose au glissement de 2/1</p>	$\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2} = N_{1 \rightarrow 2} \vec{n} + T_{1 \rightarrow 2} \vec{t}$ <p style="text-align: center;">avec $T_{1 \rightarrow 2} = f N_{1 \rightarrow 2}$ et $f = \tan(\varphi)$</p> <p>$\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ est sur le cône d'adhérence</p> <p>$\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ s'oppose à la tendance au glissement 2/1</p>

(1) $T_{1 \rightarrow 2}$



A partir d'un certain effort F , la composante tangentielle T sature et atteint un maximum.

C'est un modèle, la courbe réelle (en pointillé) présente un maximum, ce qui traduit la présence de 2 cônes de frottements.

Dans ce cours, on confondra coefficient de frottement d'adhérence f_a et coefficient de frottement de glissement f_g , qui auraient 2 valeurs légèrement différentes avec $f_g < f_a$.

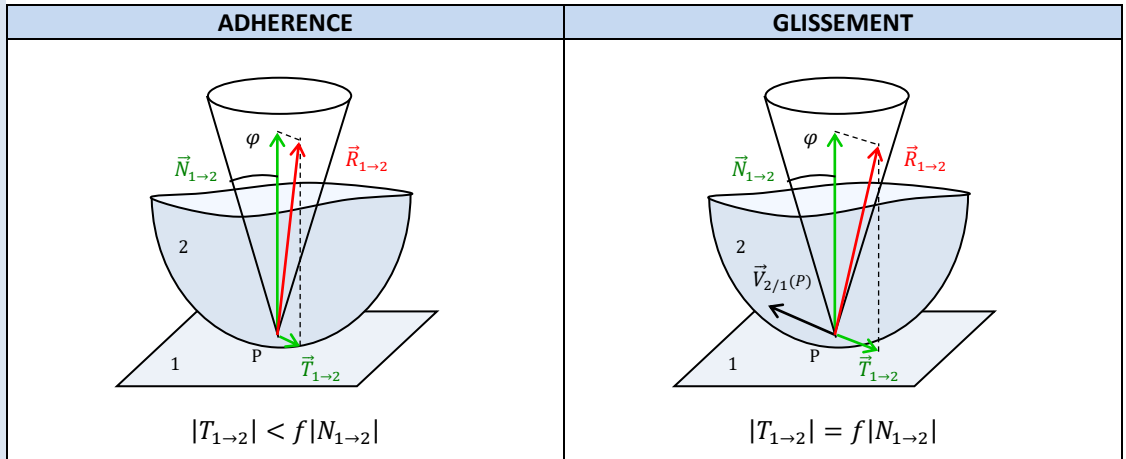
On constate expérimentalement que la **composante tangentielle** atteint un maximum et **sature**⁽¹⁾.

Afin de modéliser le phénomène de frottement on construit le **modèle de Coulomb**.

Soient deux solides 1 et 2 en contact ponctuel au point P et ayant une tendance au glissement ou un glissement relatif. La résultante de l'action mécanique de 1 sur 2 au point P s'écrit :

$$\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2} = N_{1 \rightarrow 2} \vec{n} + T_{1 \rightarrow 2} \vec{t}$$

- $\vec{N}_{1 \rightarrow 2}$ est la **composante normale** de l'effort de contact de 1 sur 2 ;
- $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ est la **composante tangentielle** de l'effort de contact de 1 sur 2. C'est cette composante qui modélise la **résistance au glissement**.



Loi de Coulomb : $|T_{1 \rightarrow 2}| \leq f |N_{1 \rightarrow 2}|$

- f le coefficient de frottement [sans dimension] avec $f = \tan(\varphi)$.
- φ le demi-angle au sommet du cône de frottement.

La force résultante $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ ne sort jamais du cône de frottement.

Elle est à l'**intérieur** du cône en cas d'**adhérence**.

Elle est **sur le cône** en cas de **glissement** ou de **limit**.

Coefficient de frottement

Matériaux en contact	Coefficient de frottement f		Exemples d'utilisation
	Nature du frottement		
	à sec	lubrifié	
Acier / Acier	0,15 à 0,20	0,10	Variateur à friction
Acier / Bronze	0,15	0,10	Roue-vis, coussinet
Acier / Caoutchouc	0,25 à 0,45		Poulie-courroie
Acier / garnitures	0,20 à 0,50		Frein, embrayage
Caoutchouc / Goudron	0,8	0,5	Pneumatique

La valeur du **coefficient de frottement** dépend, par ordre d'importance décroissant :

- du **couple de matériaux** ;
- de la **lubrification** ;
- de la rugosité des surfaces ;
- de la température.

La valeur du coefficient de frottement ne dépend pas :

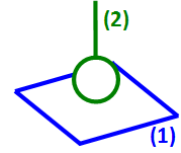
- de la forme et l'aire de la surface de contact ;
- de l'intensité de l'effort normal.

Résolution

Dans le système d'équations issue du PFS, **on a ajouté une inconnue** $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$. On ne peut pas résoudre sans ajouter une équation.
 On fera souvent l'**hypothèse** que l'on se trouve à la **limite du glissement**, on ajoute ainsi une équation de comportement.

Ainsi la forme du torseur des actions mécaniques dans le cas d'une **liaison sphère-plan non parfaite** de contact I et de normale \vec{z} où la tendance au glissement se fait suivant \vec{y} est :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2} = \begin{matrix} \square \\ I \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \vec{T}_{1 \rightarrow 2} + \vec{N}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{matrix} \right. = \begin{matrix} \square \\ I \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right. \quad (1)$$



(1) La direction de la composante de résistance au glissement dépend de la direction de la tendance au glissement de 2/1.

Avec $|Y_{1 \rightarrow 2}| \leq f |Z_{1 \rightarrow 2}|$, le sens de la tendance au glissement de 2/1 donnera le signe de $Y_{1 \rightarrow 2}$.

Dans le cas d'une **hypothèse de problème plan**, le torseur des actions mécaniques dans une **liaison cylindre-plan de ligne de contact perpendiculaire au plan** et de normale \vec{z} où la tendance au **glissement se fait suivant** \vec{y} , a la même forme.

Phénomène d'arc-boutement

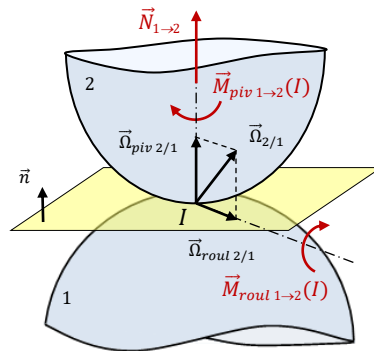
On appelle **arc-boutement**, le phénomène issu du frottement pour lequel un équilibre subsiste indépendamment de l'intensité de l'effort qui tend à le rompre.

On appelle **coincement**, le phénomène issu du frottement pour lequel un équilibre persiste alors que la même cause de l'équilibre a disparu.

Modélisation des AM de résistance au roulement et au pivotement

Le raisonnement effectué pour le glissement peut être appliqué au roulement et au pivotement.

Soit I un point de contact entre deux solides 1 et 2. Selon les cas, l'action mécanique de $1 \rightarrow 2$ est modélisée en I , par le torseur suivant :



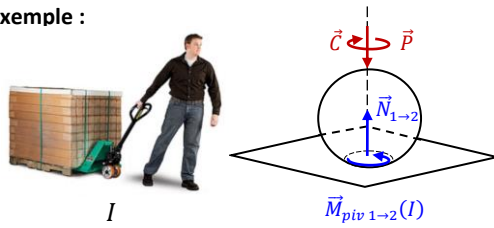
Par analogie avec les lois de Coulomb :

- le **roulement** ou la tendance au roulement donnera naissance à une **résistance au roulement** modélisée par un **moment de résistance au roulement** ;
- le **pivotement** modélisée par un **moment de résistance au pivotement**

Pivotement ou tendance au pivotement	Roulement ou tendance au roulement
$\vec{M}_{1 \rightarrow 2} = \begin{matrix} \square \\ I \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \vec{N}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{piv\ 1 \rightarrow 2}(I) \end{matrix} \right.$	$\vec{M}_{1 \rightarrow 2} = \begin{matrix} \square \\ I \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \vec{N}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{roul\ 1 \rightarrow 2}(I) \end{matrix} \right.$
<p>$\vec{M}_{piv\ 1 \rightarrow 2}(I)$ est le moment de résistance au pivotement en I.</p>	<p>$\vec{M}_{roul\ 1 \rightarrow 2}(I)$ est le moment de résistance au roulement en I.</p>
<ul style="list-style-type: none"> - Il s'oppose au pivotement ou à la tendance au pivotement de 2/1. - Il est dirigé suivant la normale au contact. - $\ \vec{M}_{piv\ 1 \rightarrow 2}(I)\ \leq \delta \ \vec{N}_{1 \rightarrow 2}\$ 	<ul style="list-style-type: none"> - Il s'oppose au roulement ou à la tendance au roulement de 2/1 - Il est contenu dans le plan tangent au niveau du contact - $\ \vec{M}_{roul\ 1 \rightarrow 2}(I)\ \leq \eta \ \vec{N}_{1 \rightarrow 2}\$

Avec δ , le **coefficient de résistance au pivotement** en $[m]$.

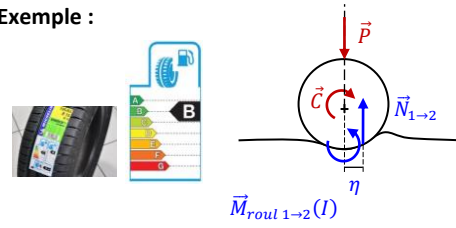
Exemple :



En phase de virage avec ce chariot de manutention, il existe un moment de résistance au pivotement du sol sur la roue autour de (I, \vec{Z}) qui s'oppose à l'action mécanique fournie par l'utilisateur pour orienter la roue directrice.

Avec η **coefficient de résistance au roulement** en $[m]$

Exemple :



Parmi les critères à étudier lors de l'achat de pneumatique pour sa voiture, il y a l'indice de résistance au roulement. Plus celui-ci est bon, plus la consommation de carburant sera faible.

On notera enfin que les phénomènes de **résistance au glissement**, au **pivotement** et au **roulement** peuvent se **combiner** et être rencontrés dans une même étude.

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2} = I \begin{cases} \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{piv\ 1 \rightarrow 2}(I) + \vec{M}_{roul\ 1 \rightarrow 2}(I) \end{cases}$$

5 Modélisation locale des AM

5.1 AM à distance et de contact

On distingue les actions mécaniques à distance et de contact.

Les **actions mécaniques à distance** agissent sur tout le volume du solide.

Exemples : actions magnétiques, action de la pesanteur...

Les **actions mécaniques de contact** agissent directement sur la surface du solide.

Exemples : pression d'un fluide, pression de contact entre deux solides...

Une **action** mécanique de $i \rightarrow j$ est toujours répartie sur la surface (action de contact) ou sur le volume (action à distance) du solide j , contrairement à ce que pouvait laisser croire le modèle utilisé jusqu'à maintenant (action appliquée en un point).

La **modélisation locale** permettra donc de **modéliser finement** ces actions à distances et ces actions de contact⁽¹⁾.

Le point de vue local concerne le modèle proposé pour un point. L'expression de la force élémentaire $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ varie en fonction de la nature du contact, associé à P :

Nature du domaine	Élément géométrique différentiel	Nom	Unité	Force élémentaire $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$
Point	1	Force F	$[N]$	\vec{F}
Ligne	dl	Force linéique p	$[Nm^{-1}]$	$\vec{p}dl$
Surface	dS	Force surfacique p	$[Pa] = [Nm^{-2}]$	$\vec{p}dS$
Volume	dV	Force volumique q	$[Nm^{-3}]$	$\vec{q}dV$

L'ensemble des forces élémentaires agissant sur l'ensemble des éléments concerné par l'action mécanique est appelé **champ de forces** associé à l'action mécanique.

C'est la connaissance de ce champ de forces qui peut permettre d'étudier les déformations d'un solide soumis à une action mécanique.

(1) Cette modélisation est aussi nécessaire pour la prise en compte des résistances au glissement.

5.2 Modèle local d'une AM à distance

Soit P, un point appartenant à un solide 2 et concerné par une action mécanique à distance. On modélise localement l'action mécanique à distance par une **force élémentaire** $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ agissant sur un volume dV de dimension réduite défini au voisinage de P, telle que : $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{q} dV$.

L'action mécanique local de la pesanteur sur un solide 1 :

$$d\vec{F}_{ter \rightarrow 1} = -dm g \vec{z} = -\rho g dV \vec{z} \quad \forall P \in 1$$

5.3 Modèle local d'une AM de contact

Soit P, un point appartenant à un solide 2 et concerné par une action mécanique de contact. On modélise localement l'action mécanique de contact par une **force élémentaire** $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ agissant sur une ligne dl ou une surface dS de dimension réduite défini au voisinage de P, telle que :

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = d\vec{N}_{1 \rightarrow 2} + d\vec{T}_{1 \rightarrow 2} = dN_{1 \rightarrow 2} \vec{n} + dT_{1 \rightarrow 2} \vec{t} \quad (1)$$

où :

- $d\vec{N}_{1 \rightarrow 2}$ est la **force élémentaire de pression** normale au plan de contact ;
- $d\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ est la **force élémentaire de résistance au glissement** appartenant au plan tangentiel de contact : $|dT_{1 \rightarrow 2}| \leq f |dN_{1 \rightarrow 2}|$

(1) Pour l'action de contact d'un fluide sur un solide en statique, on n'a pas de composantes tangentielles.

En revanche en mécanique des fluides pour l'écoulement d'un fluide, oui. Mais c'est hors programme.

Phénomènes d'adhérence et de glissement

On distingue plusieurs cas :

	sans FROTTEMENT	avec FROTTEMENT
ADHERENCE $\vec{V}_{i/j}(I) = \vec{0}$ (absence de mouvement relatif)		On pose : $d\vec{F}_{j \rightarrow i} = dN_{j \rightarrow i} \vec{n} + dT_{j \rightarrow i} \vec{t}$ avec $ dT_{j \rightarrow i} < f dN_{j \rightarrow i} $ On ne sait pas toujours résoudre l'exercice car on a ajouté une inconnue.
GLISSEMENT $\vec{V}_{i/j}(I) \neq \vec{0}$ (mouvement relatif)	On pose : $d\vec{F}_{j \rightarrow i} = dN_{j \rightarrow i} \vec{n} \quad (3)$	On pose : $d\vec{F}_{j \rightarrow i} = dN_{j \rightarrow i} \vec{n} + dT_{j \rightarrow i} \vec{t}$ avec $ dT_{j \rightarrow i} = f dN_{j \rightarrow i} $ On sait résoudre l'exercice car on a ajouté une équation et une inconnue. Cette composante tangentielle est : - colinéaire au vecteur vitesse de glissement : $dT_{j \rightarrow i} \vec{t} \wedge \vec{V}_{i/j}(I) = \vec{0}$ - de sens opposé au vecteur vitesse de glissement : $dT_{j \rightarrow i} \vec{t} \cdot \vec{V}_{i/j}(I) < 0$

5.4 Relation entre le modèle local et le modèle global

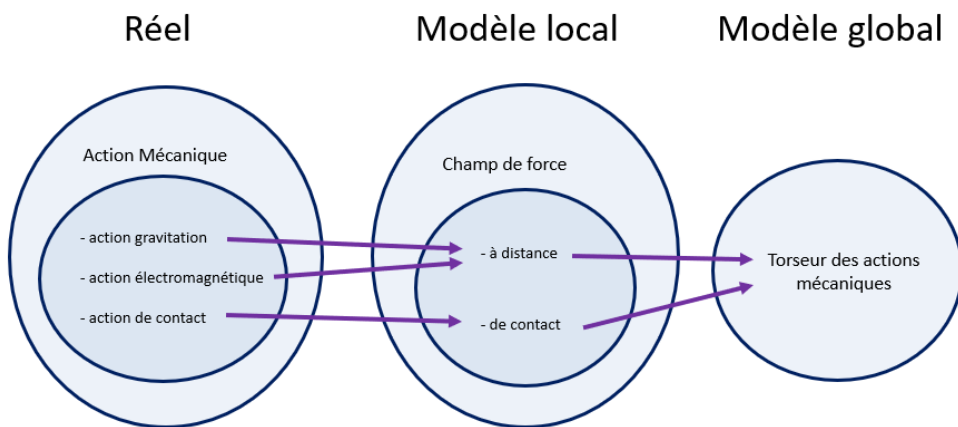
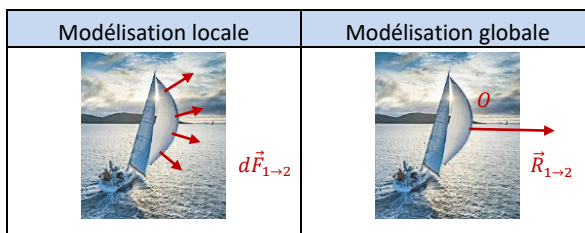
Dans le but d'appliquer le principe fondamental de la statique ou de la dynamique à un mécanisme, on fait l'hypothèse que les pièces qui les constituent, sont indéformables. Dans ce cas, on a intérêt à utiliser un modèle global des actions mécaniques comme cela a été fait jusqu'à maintenant.

Le **modèle global d'une action mécanique** est l'action équivalente à l'ensemble des actions locales.

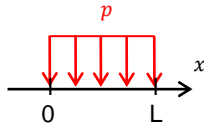
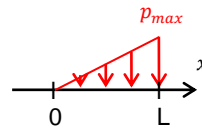
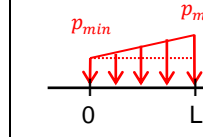
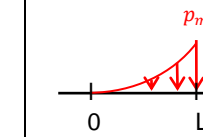
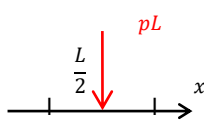
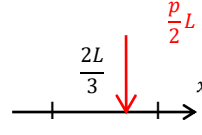

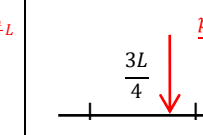
Soit une AM de 1 → 2 décrite du point de vue local sur un domaine $D^{(1)}$ par la force élémentaire $d\vec{F}_{1\rightarrow 2}$, le torseur des AM de 1 → 2 s'écrit :

$$\vec{M}_{1\rightarrow 2} = \int_D \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1\rightarrow 2} \\ \vec{M}_{1\rightarrow 2}(A) \end{array} \right. = \int_D \left\{ \begin{array}{l} d\vec{F}_{1\rightarrow 2} \\ \vec{AP} \wedge d\vec{F}_{1\rightarrow 2} \end{array} \right.$$

- (1) une ligne : \int
- une surface : \iint
- un volume : \iiint



Exemples de répartitions de pression

	Pression constante	Pression linéaire	Pression affine	Pression quadratique
Modèle local				
Modèle global				
Fonction de pression	$p(x) = p$	$p(x) = \frac{p_{max}}{L} x$	$p(x) = \frac{p_{max} - p_{min}}{L} x + p_{min}$	$p(x) = \frac{p_{max}}{L^2} x^2$

QUESTIONS DE COURS

- donner l'expression d'un torseur d'AM ;
 - donner la relation du champ des moments d'un torseur ;
 - donner les expressions d'un torseur couple et d'un torseur glisseur ;
 - expliquer le calcul d'un moment par la méthode du bras de levier ;
 - donner le torseur des actions mécaniques de la pesanteur, d'un vérin, d'un moteur, d'un ressort et des liaisons pivot, glissière ;
 - donner les relations entre les différentes unités de pression ;
 - donner la démarche à utiliser pour une étude statique.
-
- donner le torseur de l'action mécanique transmissible dans la liaison ;
 - préciser le théorème d'un solide soumis à 2 actions mécaniques modélisables par des forces (torseurs glisseurs) ;
 - donner le nom des liaisons dont l'AM transmissible est modélisable par un torseur glisseur ;
 - donner la stratégie d'isolement à utiliser pour déterminer l'action fournie à l'effecteur de la chaîne de puissance d'un mécanisme en chaîne fermée ;
-
- quand peut-on admettre l'hypothèse « problème plan » ?
 - que se passe-t-il dans l'écriture d'un torseur quand on fait l'hypothèse problème plan ?
 - donner le nom des liaisons dont l'AM transmissible est modélisable par un torseur glisseur lors d'une hypothèse problème plan ;
-
- donner la stratégie d'isolement à utiliser pour déterminer les actions fournies aux effecteurs de chaque chaîne de puissance d'un mécanisme en chaîne ouverte ;
 - donner les hypothèses simplificatrices qui permettent de déterminer rapidement une première approximation de la loi entrée-sortie en effort ;
 - donner les lois entrée-cinématique et en effort des transmetteurs usuels (réducteur, pignon-crémaillère, vis-écrou).
-
- expliquer les phénomènes de frottement et d'adhérence ;
 - donner les lois de Coulomb pour une action mécanique de contact ponctuel ;
 - comment trouve-t-on le sens et la direction de la composante tangentielle de résistance au glissement de contact ?
 - modéliser les AM transmissibles dans une liaison sphère-plan avec prise en compte de la résistance au glissement ;
 - donner la notion d'arc-boutement ;
 - que vérifie comme loi un solide arc-bouté ?
 - modéliser les AM transmissibles dans une liaison sphère-plan avec prise en compte des résistances au pivotement et roulement.
-
- donner le modèle local d'une action mécanique à distance ;
 - donner le modèle local d'une action mécanique de contact linéique ou surfacique ;
 - donner la relation entre le modèle local et le modèle global.