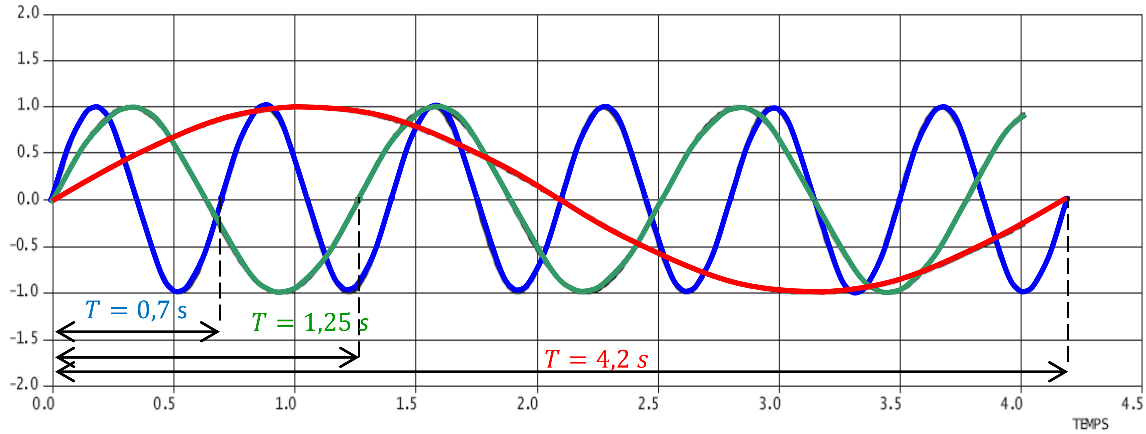
TD04 ANALYSE FREQUENTIELLE DES SLCI
CORRECTION

Exercice 1 : **REPONSES TEMPORELLES ET HARMONIQUES D'UN PREMIER ORDRE**

Question 1 : *Déterminer les périodes et les pulsations de chacun des signaux.*

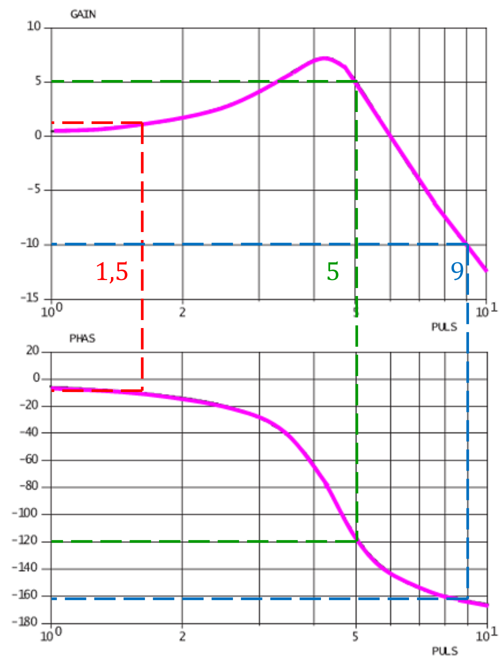


$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}7} \approx 9\ rad/s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1{,}25} \approx 5\ rad/s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4{,}2} \approx 1{,}5\ rad/s$$

Question 2 : *En déduire le gain en dB, puis le gain, et le déphasage en ° en régime permanent pour chacune des pulsations correspondant aux 3 entrées précédentes.*



$$G_{dB}(\omega) = 20 \log G(\omega) \Rightarrow G(\omega) = 10^{\frac{G_{dB}(\omega)}{20}}$$

On lit graphiquement $G_{dB}(\omega)$:

$G(9) \approx 10^{\frac{-10}{20}} \approx 0{,}32$

$\varphi(9) \approx -165°$

$G(5) \approx 10^{\frac{5}{20}} \approx 1{,}8$

$\varphi(5) \approx -120°$

$G(1{,}5) \approx 10^{\frac{2}{20}} \approx 1{,}25$

$\varphi(1{,}5) \approx -10°$

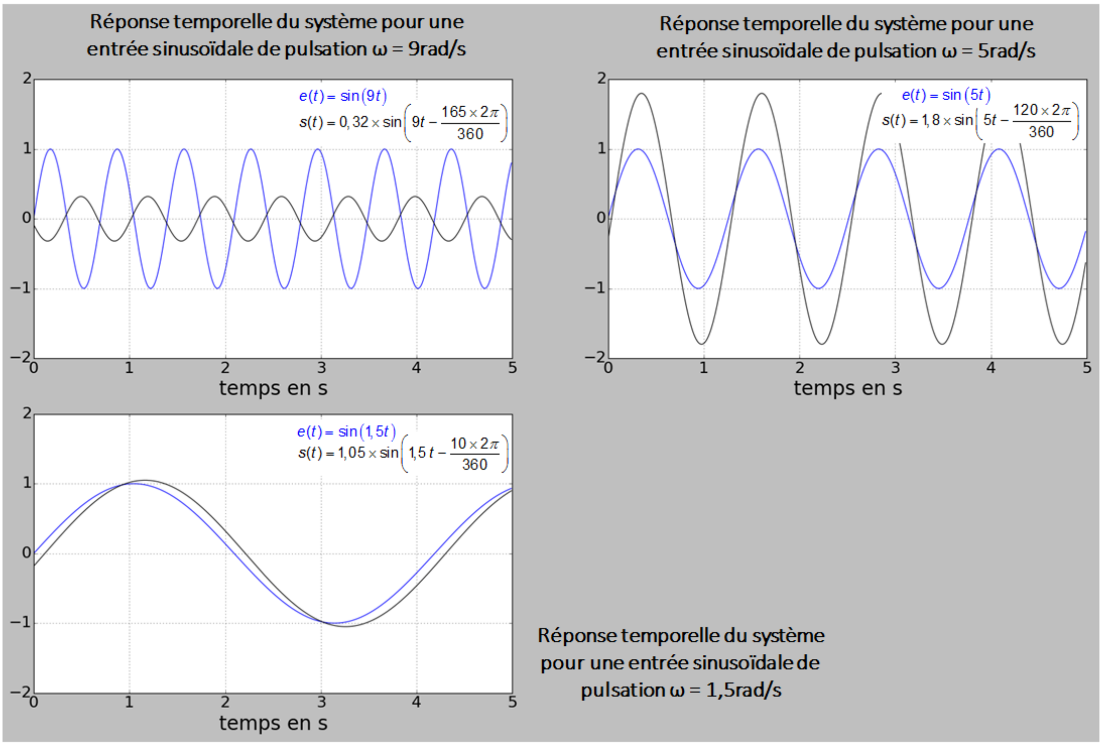
Question 3 : *En déduire l'expression temporelle de chacun des signaux de sortie.*

$$e(t) = sin(9t) \Rightarrow s(t) = 0{,}32\, sin\left(9t - \frac{2\pi}{360}165\right)$$

$$e(t) = sin(5t) \Rightarrow s(t) = 1{,}8\, sin\left(5t - \frac{2\pi}{360}120\right)$$

$$e(t) = sin(1{,}5t) \Rightarrow s(t) = 1{,}25\, sin\left(1{,}5t - \frac{2\pi}{360}10\right)$$

Question 4 : *En déduire le tracé des courbes temporelles de sortie correspondant aux 3 entrées précédentes.*



Question 5 : *Conclure.*

Le système se comporte comme un filtre passe bas.

Remarque : Le diagramme de Bode représente le comportement fréquentiel du système pour toutes les fréquences d'entrée.

Exercice 2 : **REPRESENTATION ASYMPTOTIQUE DE BODE**

Question 1 : *Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode, en indiquant clairement :*

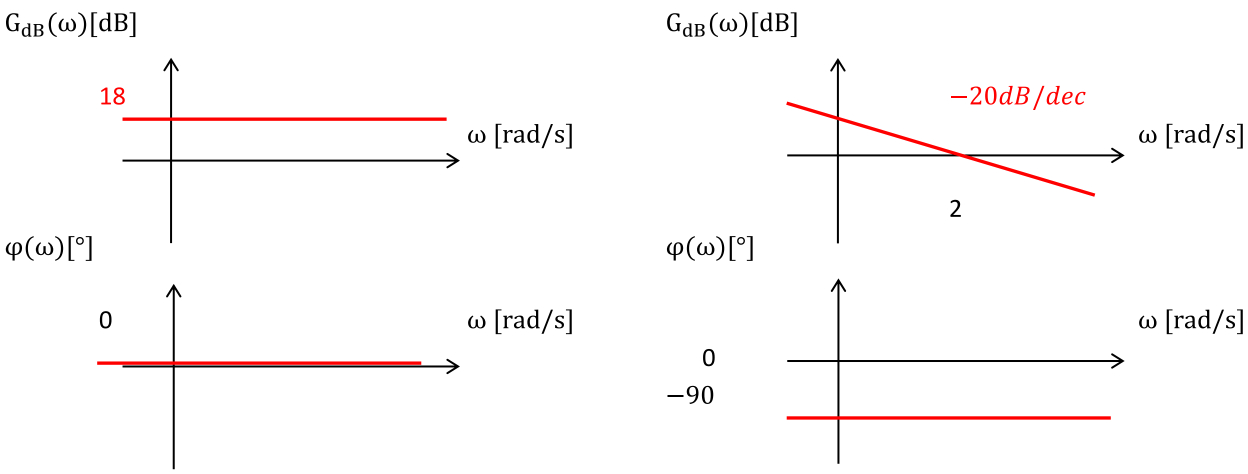
- *les valeurs en dB ou en ° des asymptotes horizontales ;*
- *les pentes des asymptotes croissantes ou décroissantes ;*
- *les valeurs des pulsations particulières (cassures, intersections avec l'axe des 0 dB…).*

Question 2 : *Placer sur les graphes précédent les courbes réelles.*

Question 3 : *Calculer la moyenne logarithmique de 10 et 20 puis calculer la phase minimale de* $F_5(p)$.

$$F_1(p) = 8 \qquad\qquad F_1(p) = \frac{2}{p}$$

$$20\,log\,8 = 20\,log\,2^3 = 60.0,3 = 18\ dB$$

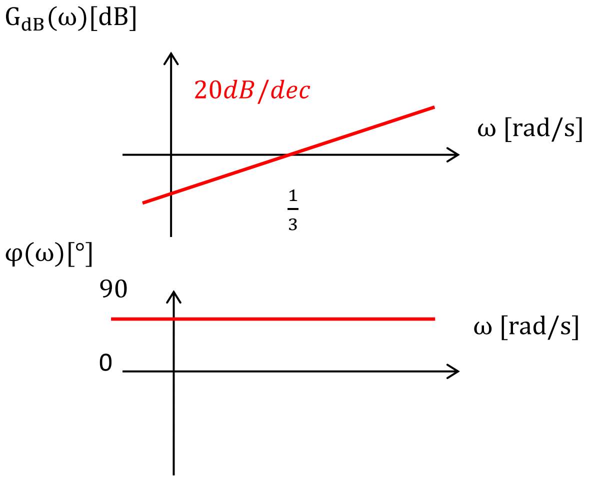


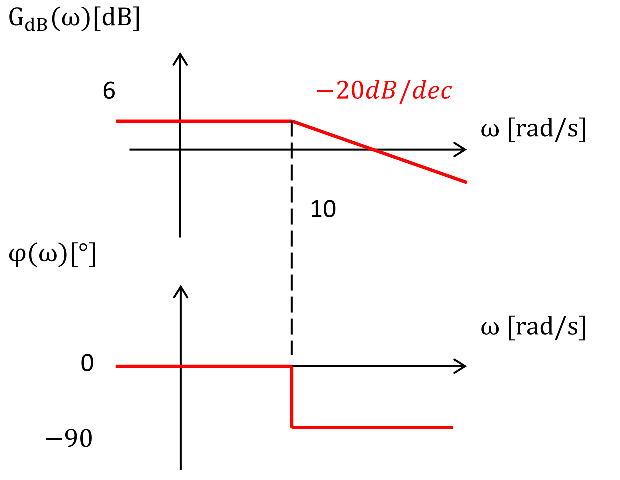
$$F_3(p) = 3p$$

$$F_4(p) = \frac{20}{10+p} = \frac{2}{1+0{,}1p}$$

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0{,}1} = 10\ rad/s$$

$$20\ log\ 2 \approx 20.0{,}3 \approx 6\ dB$$





Remarque : répondre à un exercice, c'est marquer les valeurs numériques.

$$F_5(p) = \frac{0{,}15p+3}{1+0{,}1p} = 3\,\frac{1+0{,}05p}{1+0{,}1p}$$

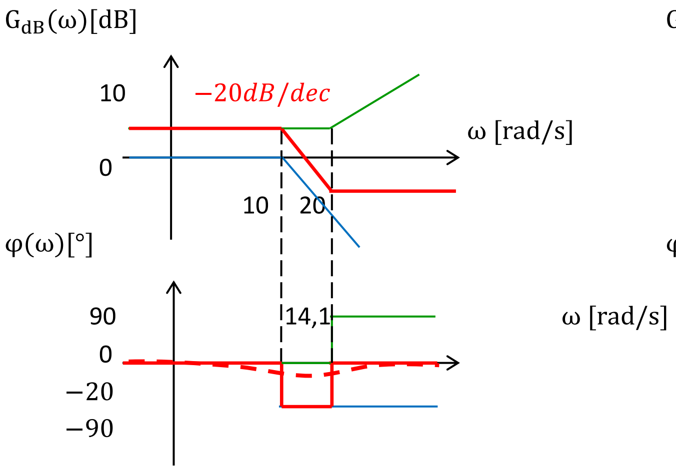
$$\omega_{c1} = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{0{,}1} = 10\ rad/s$$

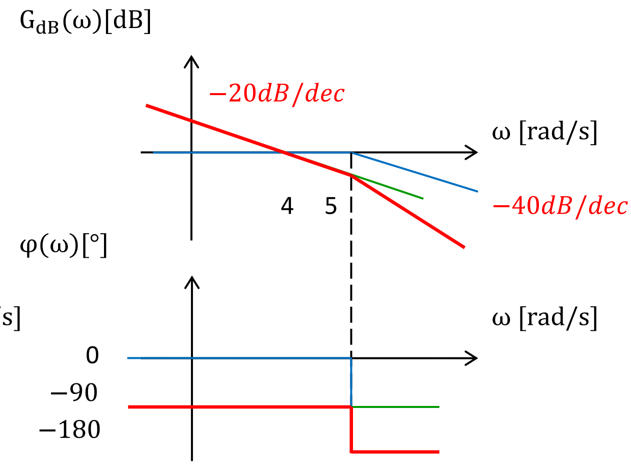
$$\omega_{c2} = \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{0{,}05} = 20\ rad/s$$

$$20\ log\ 3 \approx 20.0{,}5 \approx 10dB$$

$$F_6(p) = \frac{4}{0{,}2p^2+p} = \frac{4}{p}\,\frac{1}{0{,}2p+1}$$

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0{,}2} = 5\ rad/s$$





Remarque : On commence par mettre la fonction sous forme canonique. Puis on sépare avec des couleurs. Puis on calcule les pulsations de cassures et les pulsations remarquables. Puis on les ordonne. Puis on trace les diagrammes élémentaires. Puis on somme les diagrammes pour avoir la fonction totale. Attention à ne pas inverser les pulsations entre couleurs. On met en évidence la courbe totale par rapport aux autres, en rouge.

Remarque : attention le 0 dB correspond à l'ordonnée, pas à l'abscisse.

Pour la phase réelle de $F_5(p)$:

$$10^{\frac{log\ 10 + log\ 20}{2}} \approx 14{,}1\ rad/s$$

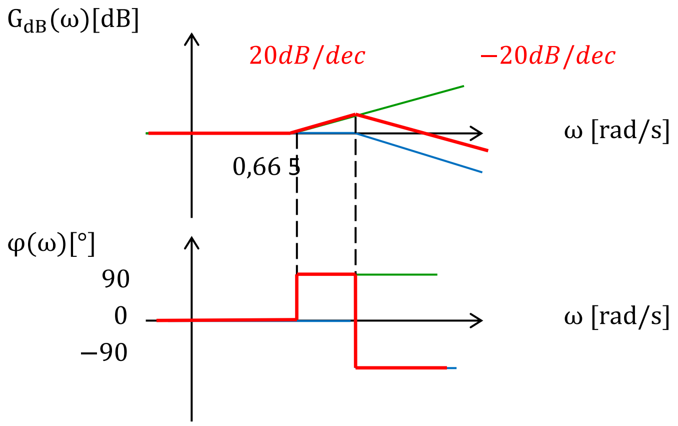
$$\text{angle}\left(3\cdot\frac{1+0.05\cdot i\cdot 14.1}{1+0.1\cdot i\cdot 14.1}\right)\cdot\frac{360}{2\cdot\pi} \qquad -19.4711$$

$$F_7(p) = \frac{3p+2}{0,08(p+5)^2} = \frac{2}{0,08.5.5}\,\frac{\frac{3}{2}p+1}{(0,2p+1)^2} = \frac{\frac{3}{2}p+1}{(0,2p+1)^2}$$

$$\omega_{c1} = \frac{1}{\tau_1} = \frac{2}{3} \approx 0,66\ rad/s$$

$$\omega_{c2} = \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{0,2} = 5\ rad/s$$

Remarque : attention, le bleu compte double.

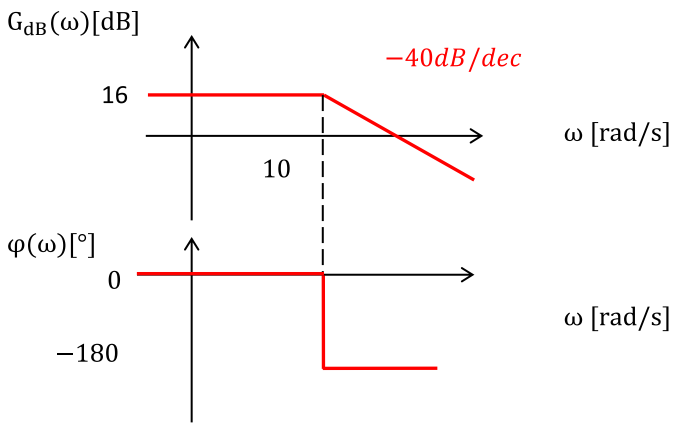


$$F_8(p) = \frac{3}{2+0,1p+0,02p^2} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{1+0,05p+0,01p^2}$$

$$20\,log\,\frac{3}{2} = 20\,log\,3 - 20\,log\,2 \approx 20.0,47 - 20.0,3 \approx 16\ dB$$

On identifie avec un 2eme ordre de la forme $\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0{}^2}p^2}$

$$\begin{cases} \frac{2z}{\omega_0} = 0,05 \\ \frac{1}{\omega_0{}^2} = 0,01 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2}0,05.10 \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0,01}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0,25 \\ \omega_0 = 10\ rad/s \end{cases}$$



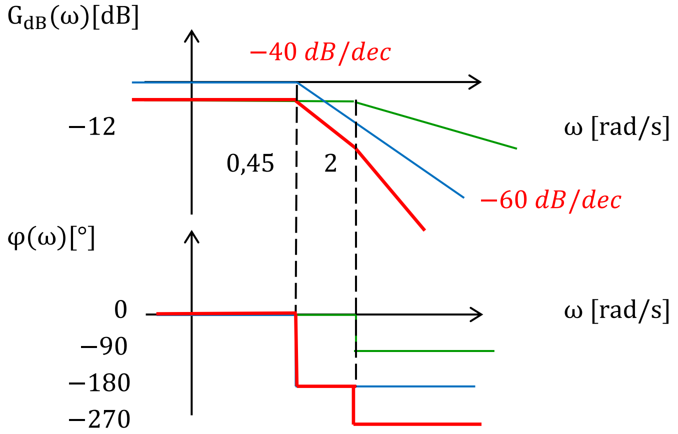
$$F_9(p) = \frac{1}{(2+p)(2+4p+10p^2)} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{(1+0,5p)(1+2p+5p^2)}$$

$$20\,log\,\frac{1}{4} = 20\,log\,2^{-2} = -40\,log\,2 \approx -40.0,3 \approx -12\ dB$$

On identifie avec un 2eme ordre de la forme $\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0{}^2}p^2}$

$$\begin{cases} \frac{2z}{\omega_0} = 2 \\ \frac{1}{\omega_0{}^2} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2}2\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z \approx 0,45 \\ \omega_{c1} = \omega_0 \approx 0,45\ rad/s \end{cases}$$

$$\omega_{c2} = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{0,5} \approx 2\ rad/s$$

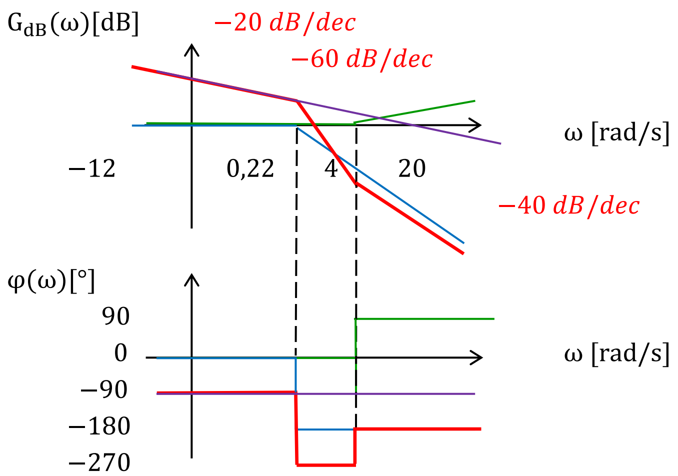


$$F_{10}(p) = \frac{5(2+0{,}5p)}{(0{,}5+2p+10p^2)p} = \frac{5.2}{0{,}5p}\frac{1+0{,}25p}{(1+4p+20p^2)p} = \frac{20}{p}\frac{1+0{,}25p}{1+4p+20p^2}$$

On identifie avec un 2eme ordre de la forme $\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0{}^2}p^2}$

$$\begin{cases} \frac{2z}{\omega_0} = 4 \\ \frac{1}{\omega_0{}^2} = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2}4\frac{1}{\sqrt{20}} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{20}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z \approx 0{,}44 \\ \omega_{c1} = \omega_0 \approx 0{,}22\ rad/s \end{cases}$$

$$\omega_{c2} = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{0{,}25} \approx 4\ rad/s$$



On peut calculer la phase minimale de la courbe réelle pour $\omega = 1$ rad/s :

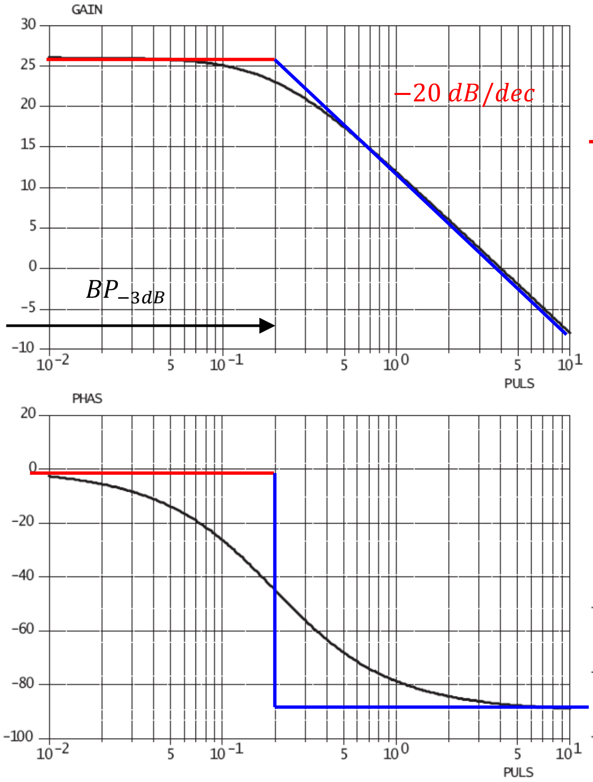
$$\mathrm{angle}\left(\frac{5\cdot(2+0.5\cdot i)}{(0.5+2\cdot i-10)\cdot i}\right)\cdot\frac{360}{2\cdot\pi} \qquad 115.925$$

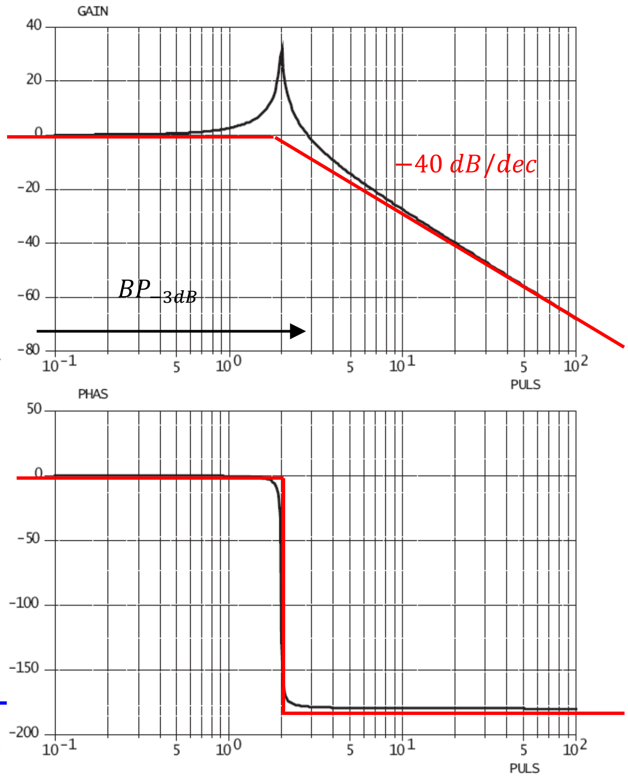
$$115.9-360 \qquad -244.1$$

Remarque : attention, la calculette donne une phase entre -180 et +180, or ici on sait qu'on est entre -180 et -270.

Exercice 3 : **IDENTIFICATION DE FONCTION DE TRANSFERT SUR DIAGRAMME DE BODE**

Question 1 : *Sur les diagrammes de Bode suivants, tracer les diagrammes de Bode asymptotiques puis identifier les fonctions de transfert correspondantes.*





$G_{dB}(0) = 20\,log\,K \approx 26\ dB \Rightarrow K \approx 10^{\frac{26}{20}} \approx 20$

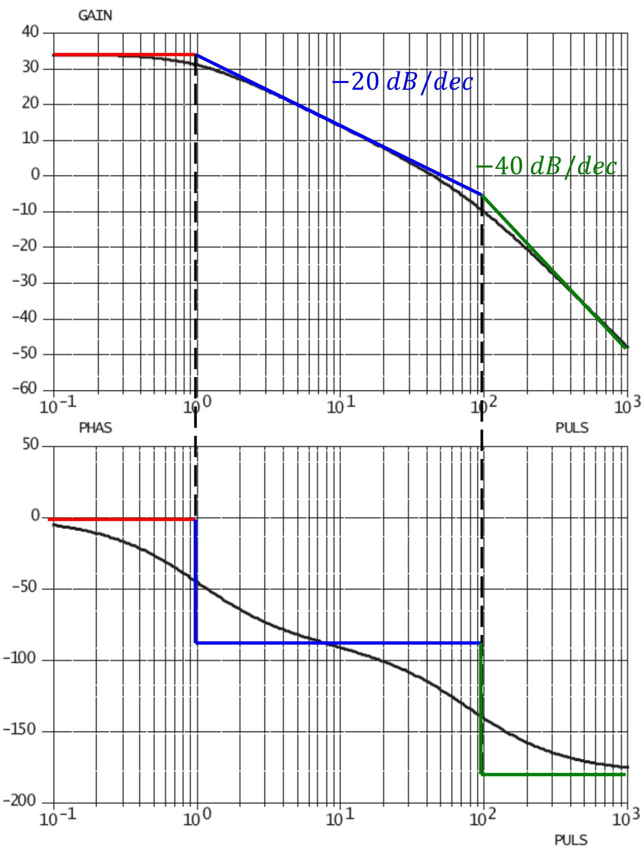
On lit graphiquement $\tau \approx \frac{1}{0,2} \approx 5\ rad/s$

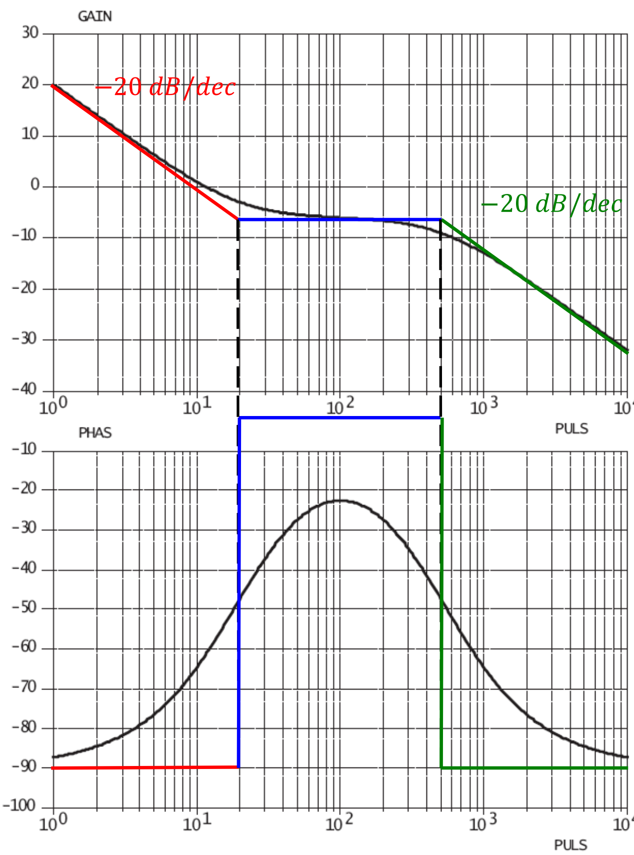
$F(p) = 20\frac{1}{1+5p}$

On lit graphiquement $\omega_0 \approx 2\ rad/s$

$-20\ \ log(2z) \approx 27\ dB \Rightarrow z \approx \frac{1}{2}10^{-\frac{27}{20}} \approx 0,02 < 0,707$

$F(p) \approx \frac{1}{1+\frac{2.0,02}{2}p+\frac{1}{2^2}p^2} \approx \frac{1}{1+0,02p+0,25p^2}$





On lit graphiquement $\omega_{c1} \approx 1\ rad/s$ et $\omega_{c2} \approx 100\ rad/s$

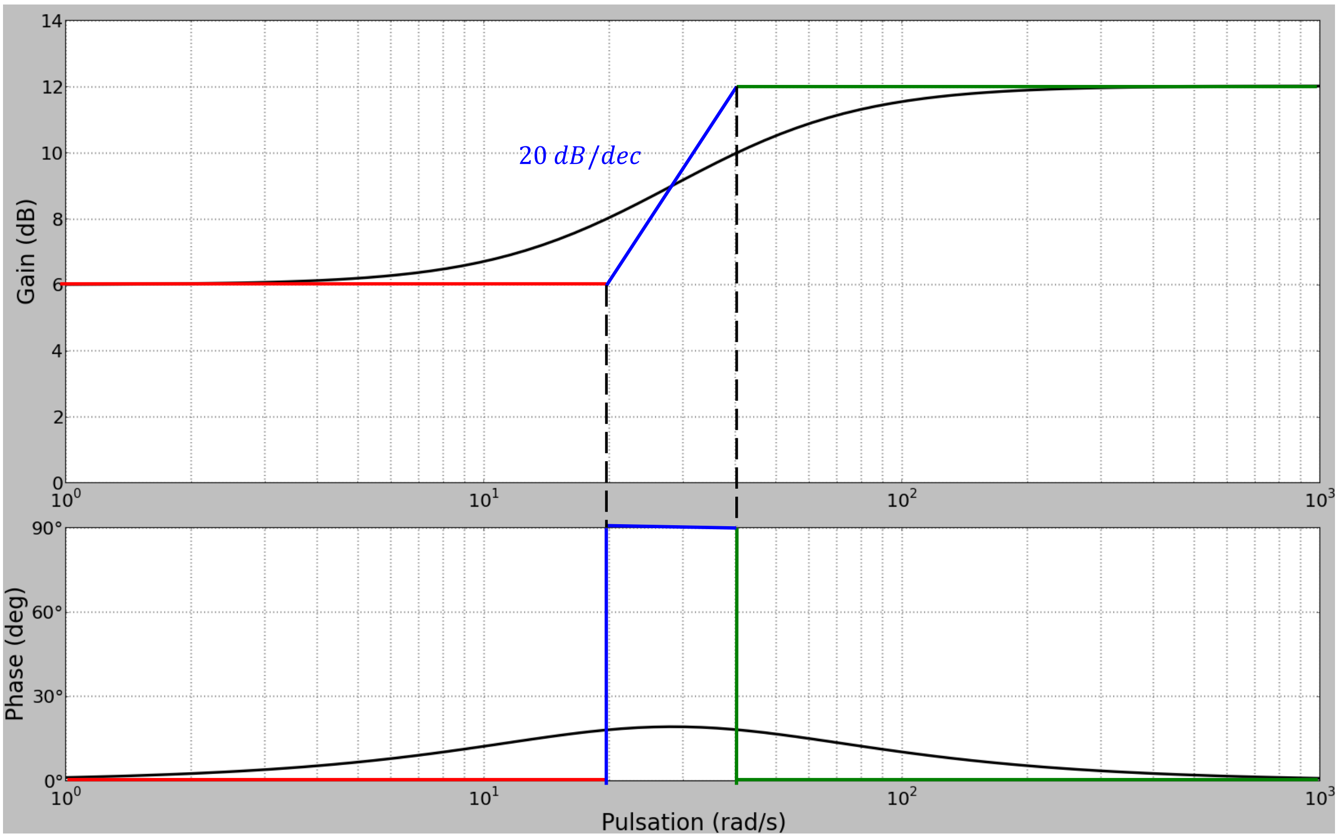
$G_{dB}(0) = 20\log K \approx 34\ dB \Rightarrow K \approx 10^{\frac{34}{20}} \approx 50$

$F(p) = 50\frac{1}{1+p}\frac{1}{1+0{,}01p}$

On lit graphiquement $\omega_{c1} \approx 20\ rad/s$ et $\omega_{c2} \approx 500\ rad/s$

$F(p) = \frac{10}{p}(1+0{,}05p)\frac{1}{1+0{,}002p}$

Remarque : attention les asymptotes du diagramme de gain sont des multiples de 20 dB/dec.
Remarque : attention les asymptotes du diagramme de phase ne sont que des multiples de 90, on ne peut pas être à -10°.
Remarque : le dernier diagramme est de classe 1 car la pente est de $-20\ dB/dec$ en $0\ rad/s$ et cette asymptote coupe les abscisses en $10\ rad/s$.

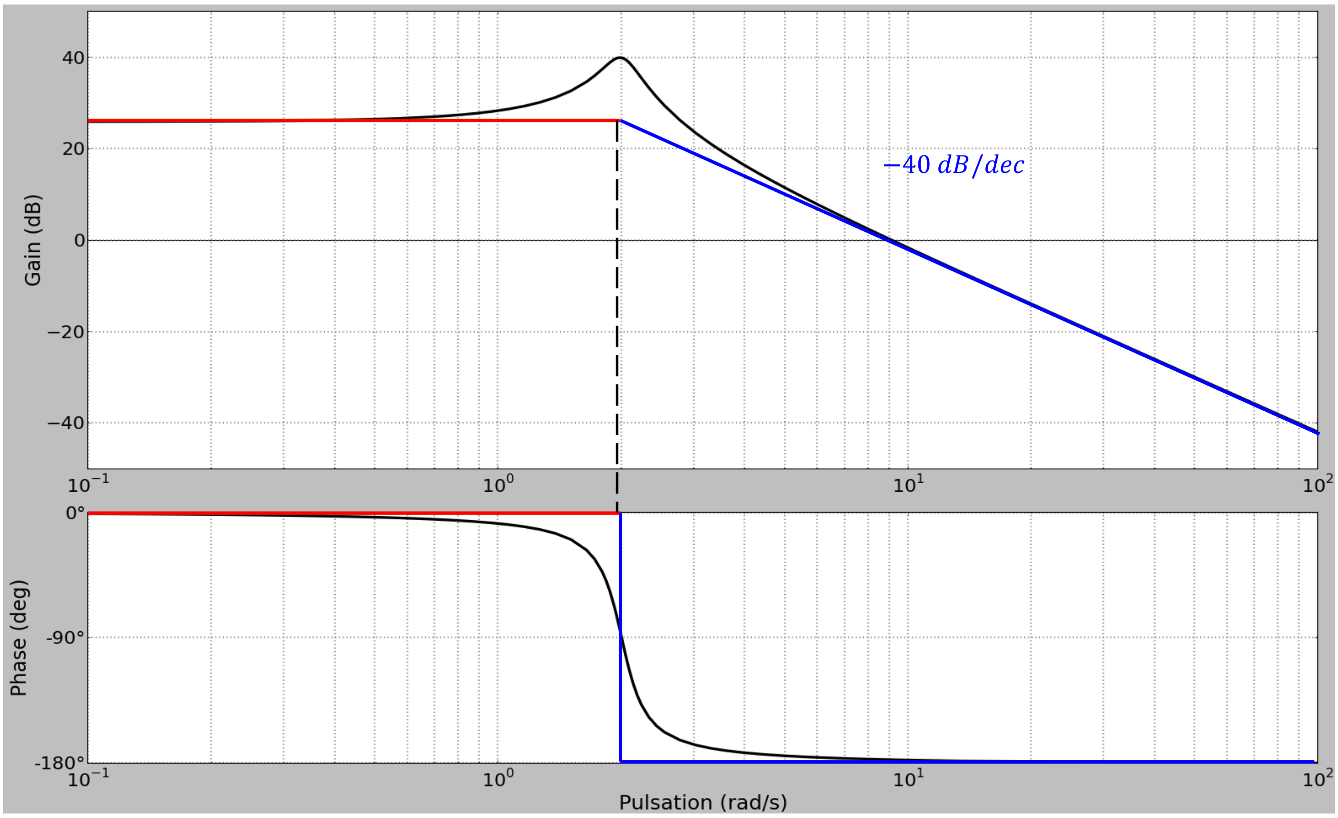


$G_{dB}(0) = 20\log K \approx 6\ dB \Rightarrow K \approx 10^{\frac{6}{20}} \approx 2$

On lit graphiquement $\omega_{c1} \approx 20\ rad/s$ et $\omega_{c2} \approx 40\ rad/s$

$$F(p) = 2(1+0{,}05p)\frac{1}{1+0{,}025p}$$

Remarque : attention le diagramme asymptotique de la phase n'est que des multiples de 90°, ne mettez pas un trait à 20°.

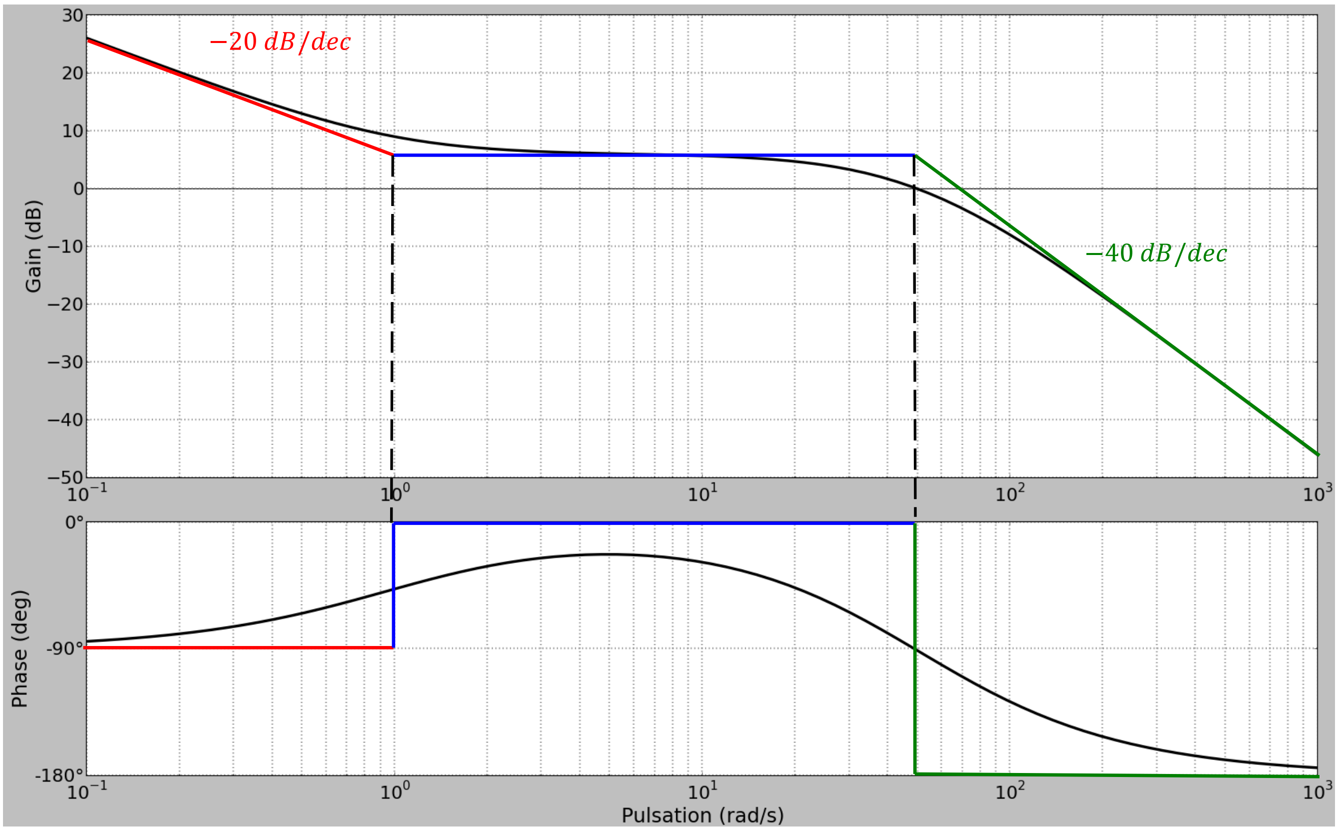


On lit graphiquement $\omega_0 \approx 2\ rad/s$

$G_{dB}(0) = 20\ log\ K \approx 26\ dB \Rightarrow K \approx 10^{\frac{26}{20}} \approx 20$

$-20\ \ log(2z) \approx 14\ dB \Rightarrow z \approx \frac{1}{2} 10^{-\frac{14}{20}} \approx 0{,}1 < 0{,}707$

$$F(p) \approx 20 \frac{1}{1 + \frac{2.0{,}1}{2} p + \frac{1}{2^2} p^2} \approx \frac{20}{1 + 0{,}1p + 0{,}25p^2}$$

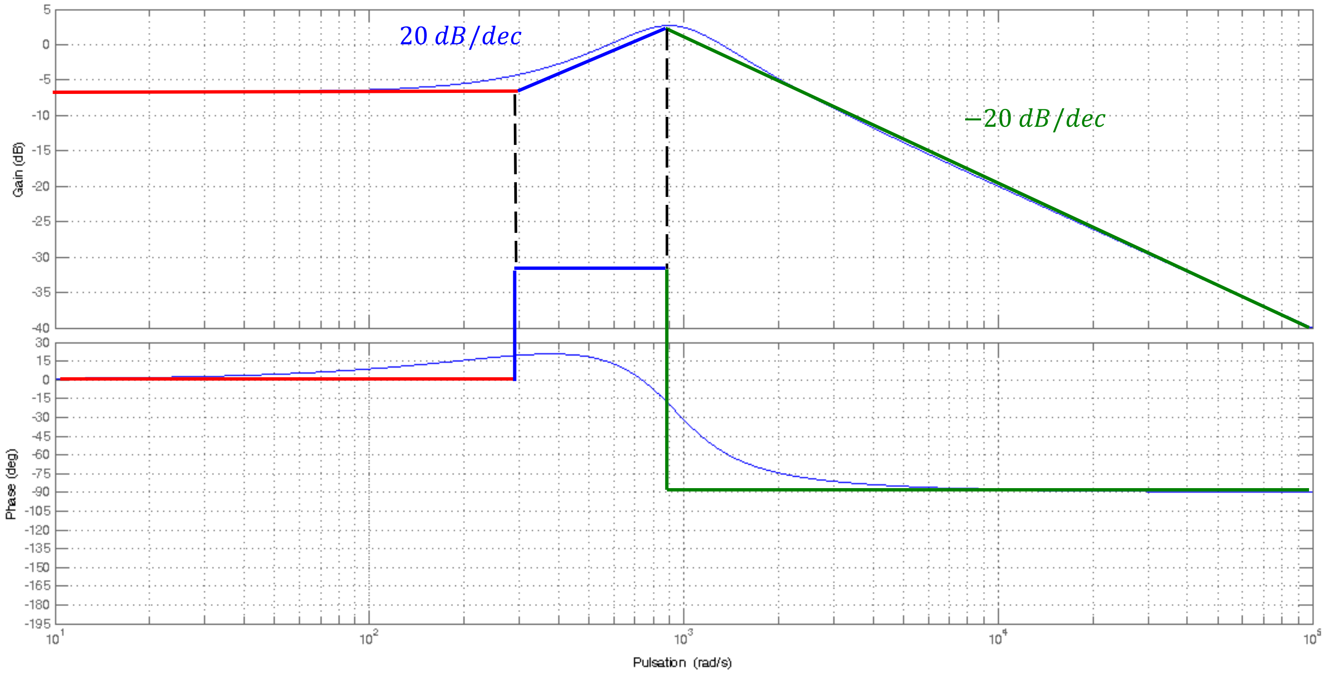


On lit graphiquement $\omega_{c1} \approx 1\ rad/s$ et $\omega_{c2} \approx 50\ rad/s$

$-20\ \log(2z) \approx -6\ dB \Rightarrow z \approx \frac{1}{2} 10^{\frac{6}{20}} \approx 1 > 0,707$

Remarque : attention signe négatif -6 dB. La courbe est en dessous.

$$F(p) \approx \frac{2}{p}(1+p)\frac{1}{1+\frac{2.1}{50}p+\frac{1}{50^2}p^2}$$



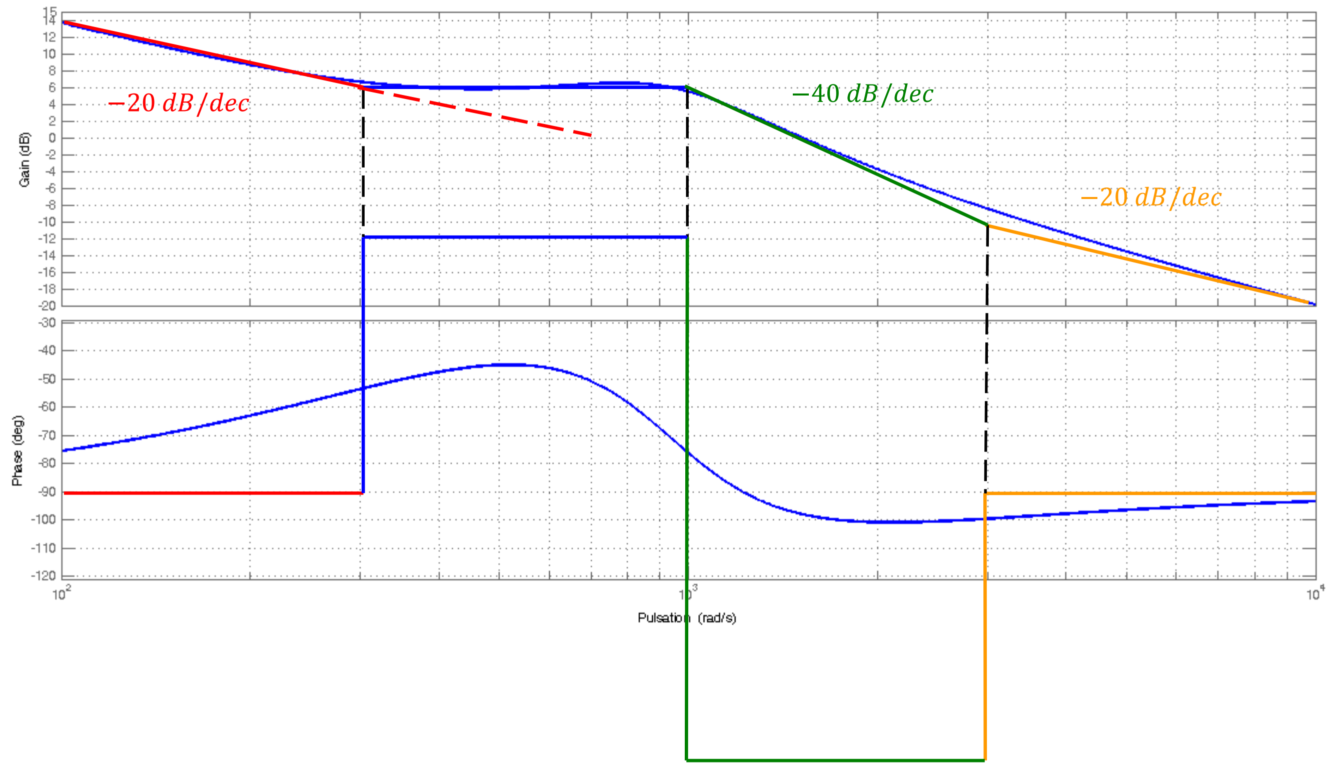
Remarque : attention le diagramme asymptotique de la phase n'est que des multiples de 90°, ne mettez pas un trait à 30°.

On lit graphiquement $\omega_{c1} \approx 300\ rad/s$ et $\omega_{c2} \approx 900\ rad/s$

$G_{dB}(0) = 20 \log K \approx -6\ dB \Rightarrow K \approx 10^{-\frac{6}{20}} \approx 0,5$

$-20\ \log(2z) \approx 0\ dB \Rightarrow z \approx 0,5 < 0,707$

$$F(p) \approx 0,5\left(1+\frac{1}{300}p\right)\frac{1}{1+\frac{2.0,5}{900}p+\frac{1}{900^2}p^2}$$



On lit graphiquement $\omega_{c1} \approx 300\ rad/s$, $\omega_{c2} \approx 1000\ rad/s$ et $\omega_{c3} \approx 3000\ rad/s$

$-20\ \log(2z) \approx 0\ dB \Rightarrow z \approx 0{,}5 < 0{,}707$

$$F(p) \approx \frac{700}{p}\left(1+\frac{1}{300}p\right)\frac{1}{1+\frac{2.0{,}5}{1000}p+\frac{1}{1000^2}p^2}\left(1+\frac{1}{3000}p\right)$$

Question 2 : *Déterminer les bandes passantes à -3 dB de $F_1(p)$ et $F_2(p)$. Contrôler le résultat graphiquement.*

On cherche ω_{c-3dB} tel que :

$$20\log\left|\frac{1}{1+5j\omega_{c-3dB}}\right| = 26-3\ dB$$

$$\text{solve}\left(20\cdot\log_{10}\left(\left|\frac{20}{1+5\cdot i\cdot x}\right|\right)=26-3, x\right)$$

$x=-0.200474$ or $x=0.200474$

$BP_{-3\ dB} \approx [0; 0{,}2]\ rad/s$

Ce que l'on retrouve graphiquement.

$$20\log\left|\frac{1}{1+0{,}02j\omega_{c-3dB}-0{,}25\omega_{c-3dB}^{\ 2}}\right| = -3\ dB$$

$$\text{solve}\left(20\cdot\log_{10}\left(\left|\frac{1}{1+0.02\cdot i\cdot x-0.25\cdot x^2}\right|\right)=-3, x\right)$$

$x=-3.10559$ or $x=3.10559$

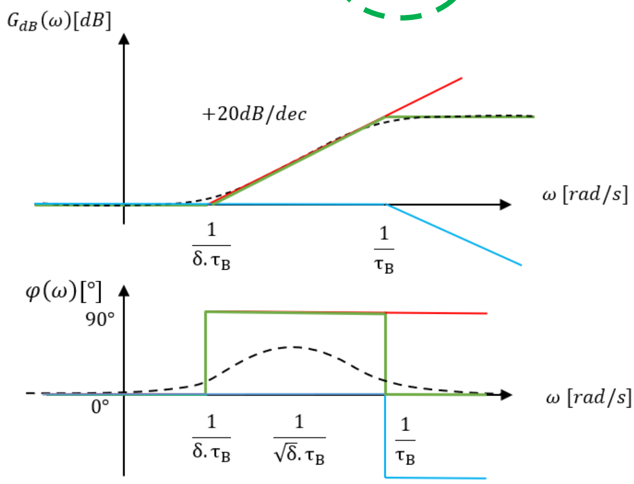
$BP_{-3\ dB} \approx [0; 3{,}1]\ rad/s$

Exercice 4 : **CORRECTEUR A AVANCE DE PHASE DU ROBOVOLC**

(D'après E3A PSI 2017)

Question 1 : *Tracer le diagramme de Bode asymptotique de la fonction $H(p) = \frac{\delta.\tau_B.p+1}{\tau_B.p+1}$ avec $\delta > 1$*

On trace le diagramme de Bode asymptotique : $\mathrm{H(p)} = \frac{T_{pi}.p+1}{\tau_B.p+1} = \frac{\delta.\tau_B.p+1}{\tau_B.p+1}$



Remarque : pour cette correction, nous tracerons aussi le diagramme réel.

Cette fonction de transfert réalise une avance de phase.

Question 2 : *Quel est l'intérêt de ce correcteur à avance de phase ?*

Il fait une action dérivée sur une plage de fréquence. Le correcteur à avance de phase ajoute de la phase. Il augmente la stabilité mais introduit des vibrations et du bruit. Il améliore la rapidité.

Question 3 : *En utilisant une moyenne logarithmique entre* $\frac{1}{\delta.\tau_B}$ *et* $\frac{1}{\tau_B}$ *montrer que la valeur maximale de la phase à lieu pour* $\omega_{maxi} = \frac{1}{\sqrt{\delta}.\tau_B}$ *.*

ω_{maxi} correspond à la moyenne logarithmique entre $\frac{1}{\delta.\tau_B}$ et $\frac{1}{\tau_B}$.

$$\log \omega_{maxi} = \frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{\delta.\tau_B} + \log\frac{1}{\tau_B}\right) = \log\left(\sqrt{\frac{1}{\delta.\tau_B}.\frac{1}{\tau_B}}\right) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}.\tau_B}\right)$$

$$\Rightarrow \omega_{maxi} = \frac{1}{\sqrt{\delta}.\tau_B}$$

Question 4 : *Déterminer* δ *tel que* $\varphi(\omega_{maxi}) = 45°$

On cherche δ tel que :

$$\varphi(\omega_{maxi}) = 45° \Rightarrow arg\left(\frac{\delta.\tau_B.j\omega_{maxi} + 1}{\tau_B.j\omega_{maxi} + 1}\right) = 45° \Rightarrow arg\left(\frac{\delta.\tau_B.j\frac{1}{\sqrt{\delta}.\tau_B} + 1}{\tau_B.j\frac{1}{\sqrt{\delta}.\tau_B} + 1}\right) = 45° \Rightarrow arg\left(\frac{j\sqrt{\delta} + 1}{j\frac{1}{\sqrt{\delta}} + 1}\right) = 45°$$

$$\Rightarrow \arctan(\sqrt{\delta}) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right) = 45° \Rightarrow \delta \approx 5{,}83$$

Remarque : à la calculette :

$$\text{solve}\left(\tan^{-1}(\sqrt{x}) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\pi}{4}, x\right) \qquad x=5.82843$$

On étudie l'asservissement d'une MSAP, on donne la fonction suivante :

$$FTBO_{corr\Omega}(p) = K_{pi}.\frac{\delta.\tau_B.p + 1}{\delta.\tau_B.p}.\frac{B}{p.(1 + \tau_B.p)}$$

Avec $\delta = 5{,}83$, $B = 45\ (rad/s)^2/A$, $\tau_B = 33{,}87\ ms$

Question 5 : *Déterminer* K_{pi} *tel que* $G_{dB}(\omega_{maxi}) = 0dB$*. Quel est l'intérêt ?*

On cherche K_{pi} tel que :

$$G_{dB}(\omega_{maxi}) = 0\ dB \Rightarrow \ 20.\log|FTBO_{corr\Omega}(j\omega_{maxi})| = 0\ dB \ \Rightarrow \ |FTBO_{corr\Omega}(j\omega_{maxi})| = 1$$

$$\Rightarrow \left|K_{pi}.\frac{T_{pi}.j\omega_{maxi} + 1}{T_{pi}.j\omega_{maxi}}.\frac{B}{j\omega_{maxi}.(1 + \tau_B.j\omega_{maxi})}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \left|K_{pi}.\frac{\delta.\tau_B.j\frac{1}{\sqrt{\delta}.\tau_B} + 1}{\delta.\tau_B.j\frac{1}{\sqrt{\delta}.\tau_B}}.\frac{B}{j\frac{1}{\sqrt{\delta}.\tau_B}.\left(1 + \tau_B.j\frac{1}{\sqrt{\delta}.\tau_B}\right)}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \left|-K_{pi}.(j\sqrt{\delta} + 1).\frac{B}{\frac{1}{\tau_B}.\left(1 + j\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)}\right| = 1 \ \Rightarrow \ K_{pi} = \frac{1}{B.\sqrt{\delta}.\tau_B} \approx 0{,}272$$

Remarque : à la calculette :

$$\text{solve}\left(\left|-x\cdot\left(i\cdot\sqrt{5.828}+1\right)\cdot\frac{45}{\frac{1}{0.03387}\cdot\left(1+i\cdot\frac{1}{\sqrt{5.828}}\right)}\right| = 1, x\right)$$

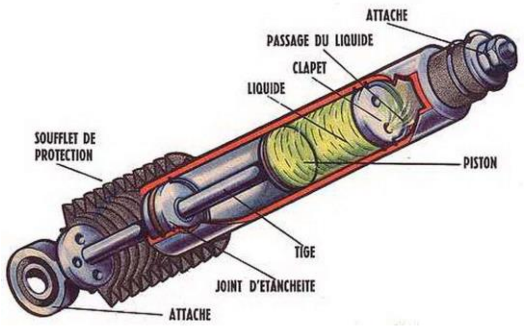
$$x=-0.271777 \text{ or } x=0.271777$$

Ne pas ajouter de gain en ω_{maxi} permet de modifier uniquement la phase.

Exercice 5 : **SUSPENSION DE MOTO**

Question 1 : *Expliquer en une phrase le fonctionnement d'un amortisseur et d'un joint de cardan.*

Un amortisseur est un système mécanique destiné à diminuer la violence d'un choc. C'est un système dissipateur d'énergie. La force que l'on exerce sur l'amortisseur est proportionnelle à la vitesse de celui-ci.



Un joint de Cardan est un accouplement mécanique, c'est-à-dire qu'il transmet un mouvement de rotation entre deux arbres. Il présente le défaut d'être hétérocinétique, ce qui signifie que la vitesse de rotation des deux arbres autour de leurs axes respectifs n'est pas la même à tout instant. Pour pallier à ce défaut, on utilise les joints de Cardan par deux :

Question 2 : *Donner l'entrée et la sortie du système.*

En entrée, on considère l'altitude du sol.
En sortie, on considère l'altitude du siège.

Question 3 : *Donner l'ordre du système, justifier technologiquement cet ordre.*

Une masse oscillante, donc le système est d'ordre 2.

Question 4 : *En suivant une démarche rigoureuse, appliquer le théorème de la résultante statique (TRS) à la masse dans la configuration 2, au repos. Montrer que la position d'équilibre est* $z_{eq} = a + l_0 - \frac{mg}{k}$.

On isole le solide 2 de masse m lorsque le système est à l'équilibre et que le sol est plat.
On écrit l'inventaire des actions mécaniques extérieures au système isolé :

- l'action de l'amortisseur $\overrightarrow{F_a} = -c\big(\dot{z}_A(t) - \dot{z}_B(t)\big)\,\vec{z}$;
- l'action du ressort $\overrightarrow{F_r} = -k(z_A(t) - z_B(t) - l_0)\,\vec{z}$;
- l'action de la glissière parfaite $\vec{R}(1 \to 2)$ avec $\vec{R}(1 \to 2)\ .\vec{z} = 0$;
- l'action de la pesanteur $\vec{P} = -mg\,\vec{z}$.

On applique le TRS (théorème de la résultante statique) selon $\vec{z}$ à la masse isolée.

$$\Rightarrow 0 = F_a + F_r + P$$
$$\Rightarrow 0 = -k(z_A(t) - z_B(t) - l_0) - mg$$
$$\Rightarrow 0 = -k\big(z_{eq} - a - l_0\big) - mg$$
$$\Rightarrow z_{eq} = a + l_0 - \frac{mg}{k}$$

Question 5 : *En suivant une démarche rigoureuse, appliquer le théorème de la résultante dynamique (TRD) à la masse dans la configuration 3, lorsque le système n'est pas à l'équilibre. Après simplification, montrer que l'on a la relation :*

$$m\,\ddot{z}(t) + c\,\dot{z}(t) + k\,z(t) = h\,\dot{z}_O(t) + k\,z_O(t)$$

On isole le solide 2 de masse m lorsque le système n'est pas à l'équilibre et que le sol est sinusoïdal.

On applique le TRD (théorème de la résultante dynamique) selon $\vec{z}$ à la masse isolée.

$$m\, a_z = F_a + F_r + P$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}\left(z(t) + z_{eq}\right) = -c\left(\dot{z}_A(t) - \dot{z}_B(t)\right) - k(z_A(t) - z_B(t) - l_0) - mg$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}\left(z(t) + z_{eq}\right) = -c\frac{d}{dt}\left(z(t) + z_{eq} - z_O(t) - a\right) - k\left(z(t) + z_{eq} - z_O(t) - a - l_0\right) - mg$$

$$m\ddot{z}(t) = -c\left(\dot{z}(t) - \dot{z}_O(t)\right) - k\left(z(t) + a + l_0 - \frac{mg}{k} - z_O(t) - a - l_0\right) - mg$$

$$m\ddot{z}(t) = -c\left(\dot{z}(t) - \dot{z}_O(t)\right) - k\left(z(t) - z_O(t)\right)$$

$$\frac{m}{k}\ddot{z}(t) + \frac{c}{k}\,\dot{z}(t) + z(t) = \frac{c}{k}\,\dot{z}_O(t) + z_O(t)$$

Question 6 : *On suppose les conditions initiales nulles, écrire la fonction de transfert de la suspension $\frac{Z(p)}{Z_O(p)}$ sous forme canonique.*

Dans le domaine de Laplace, avec les conditions initiales nulles :

$$\Rightarrow \frac{Z(p)}{Z_O(p)} = \frac{1+\frac{c}{k}p}{1+\frac{c}{k}p+\frac{m}{k}p^2}$$

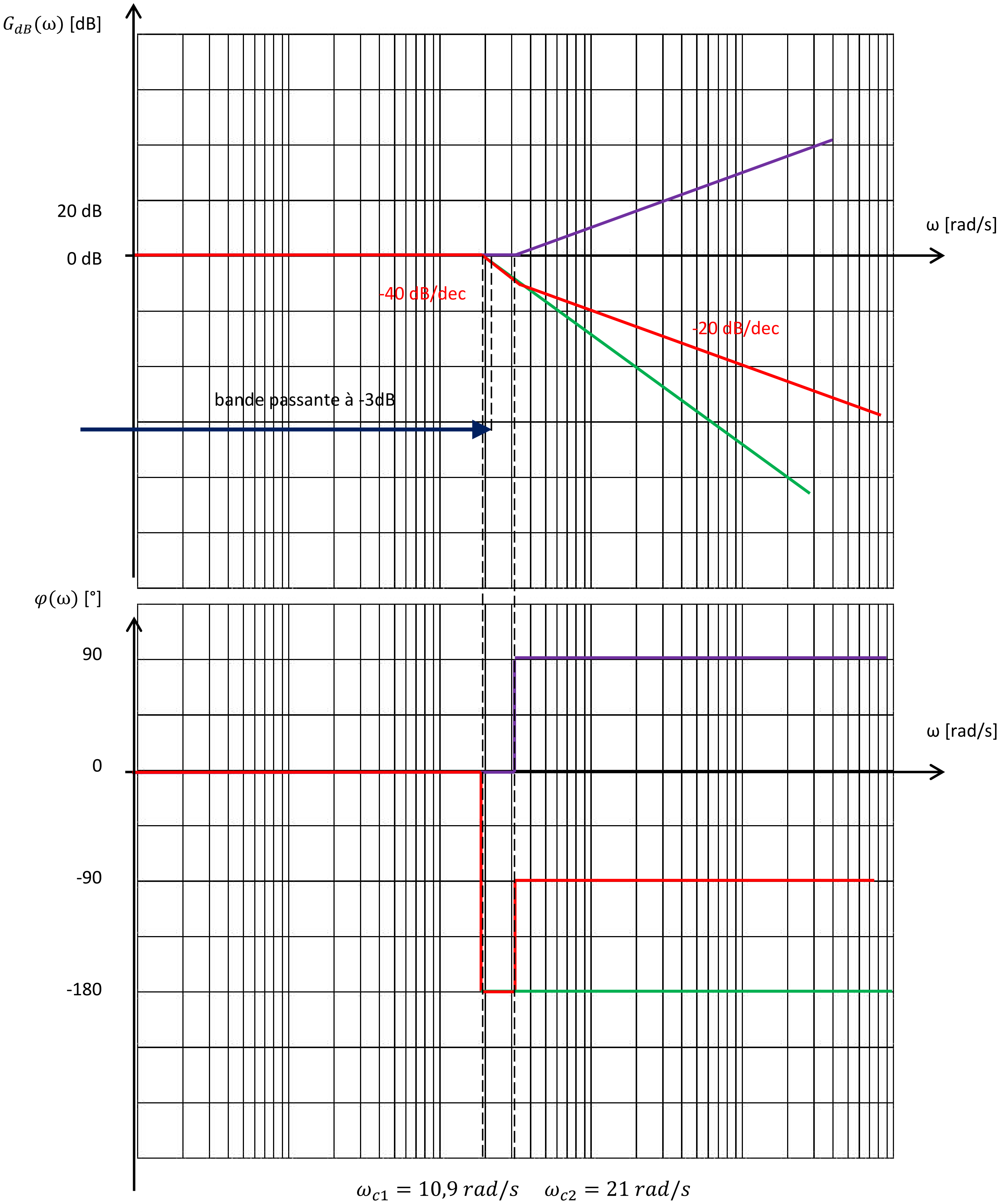
Question 7 : *Déterminer les paramètres caractéristiques K, z, ω_0 et τ de cette fonction de transfert.*

On identifie cette fonction de transfert avec $\frac{Z(p)}{Z_O(p)} = \frac{1+\tau\, p}{1+\frac{2\zeta}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0{}^2}p^2}$

$$\begin{cases} K = 1 \\ \tau = \dfrac{2\zeta}{\omega_0} = \dfrac{c}{k} \\ \dfrac{1}{\omega_0{}^2} = \dfrac{m}{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ \zeta = \dfrac{1}{2}\dfrac{c}{k}\sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ \zeta = \dfrac{1}{2}\dfrac{c}{k}\sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{cases}$$

Question 8 : *Calculer les pulsations de coupures. Et tracer sur le document réponse le diagramme de Bode asymptotique avec les valeurs numériques données.*

Les pulsations de cassures sont donc $\omega_{c1} = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{35700}{300}} = 10{,}9\, rad/s$ et $\omega_{c2} = \frac{1}{\tau} = \frac{k}{c} = \frac{35700}{1700} = 21\, rad/s$



$\omega_{c1} = 10{,}9\ rad/s \quad \omega_{c2} = 21\ rad/s$

Question 9 : *Indiquer à quel type de filtre correspond le système.*

Le système est un filtre passe bas.

Question 10 : *Déterminer la bande passante à -3dB.*

La bande passante à -3dB est d'environ $[0\ rad/s,\ 13\ rad/s]$

Stabilité des systèmes

Exercice 6 : **STABILITE DES SYSTEMES ELEMENTAIRES**

Question 1 : *Système du premier ordre défini par la fonction de transfert*

Un système du premier ordre est toujours stable car sa constante de temps τ est strictement positive.

Question 2 : *Système du deuxième ordre défini par la fonction de transfert*

Pour qu'un système du second ordre soit stable, il est nécessaire et suffisant que son coefficient d'amortissement ξ soit strictement positif.

(démonstrations avec le Critère de Routh hors programme)

Exercice 7 : **FTBO ET FTBF**

Question 1 : $F_0(p) = K$

Remarque : nous prendrons comme notation, F(p) pour les FTBO et H(p) pour les FTBF.

$$H_0(p) = \frac{K}{1+K}$$

Question 2 : $F_1(p) = \frac{K}{1+ap}$

$$H_1(p) = \frac{\frac{K}{1+ap}}{1+\frac{K}{1+ap}} = \frac{K}{1+ap+K} = \frac{\frac{K}{1+K}}{1+\frac{a}{1+K}p}$$

Question 3 : $F_2(p) = \frac{K}{1+ap+bp^2}$

$$H_2(p) = \frac{\frac{K}{1+ap+bp^2}}{1+\frac{K}{1+ap+bp^2}} = \frac{K}{1+ap+bp^2+K} = \frac{\frac{K}{1+K}}{1+\frac{a}{(1+K)}p+\frac{b}{(1+K)}p^2}$$

Question 4 : $F_3(p) = \frac{1}{p}\frac{K}{1+ap+bp^2}$

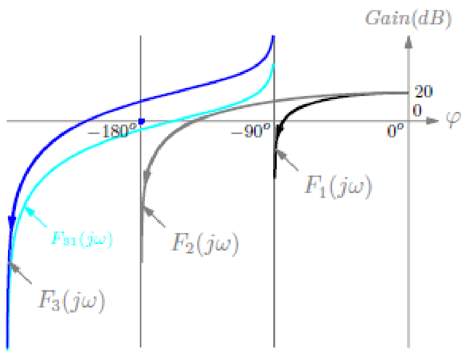
$$H_2(p) = \frac{\frac{1}{p}\frac{K}{1+ap+bp^2}}{1+\frac{1}{p}\frac{K}{1+ap+bp^2}} = \frac{K}{p(1+ap+bp^2)+K} = \frac{1}{1+\frac{1}{K}p+\frac{a}{K}p^2+\frac{b}{K}p^3}$$

Question 5 : $F_4(p) = \frac{K}{1+ap+bp^2+cp^3}$

$$H_2(p) = \frac{\frac{K}{1+ap+bp^2+cp^3}}{1+\frac{K}{1+ap+bp^2+cp^3}} = \frac{K}{1+ap+bp^2+cp^3+K} = \frac{\frac{K}{1+K}}{1+\frac{a}{(1+K)}p+\frac{b}{(1+K)}p^2+\frac{c}{(1+K)}p^3}$$

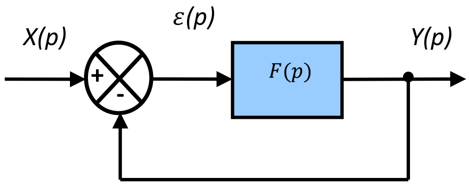
Remarque : la FTBO et la FTBF n'ont pas forcément la même classe mais ont le même ordre.

Question 6 : *Illustrer ces 3 résultats dans le plan de Black, $G_{dB}(\omega) = f(\varphi(\omega))$.*

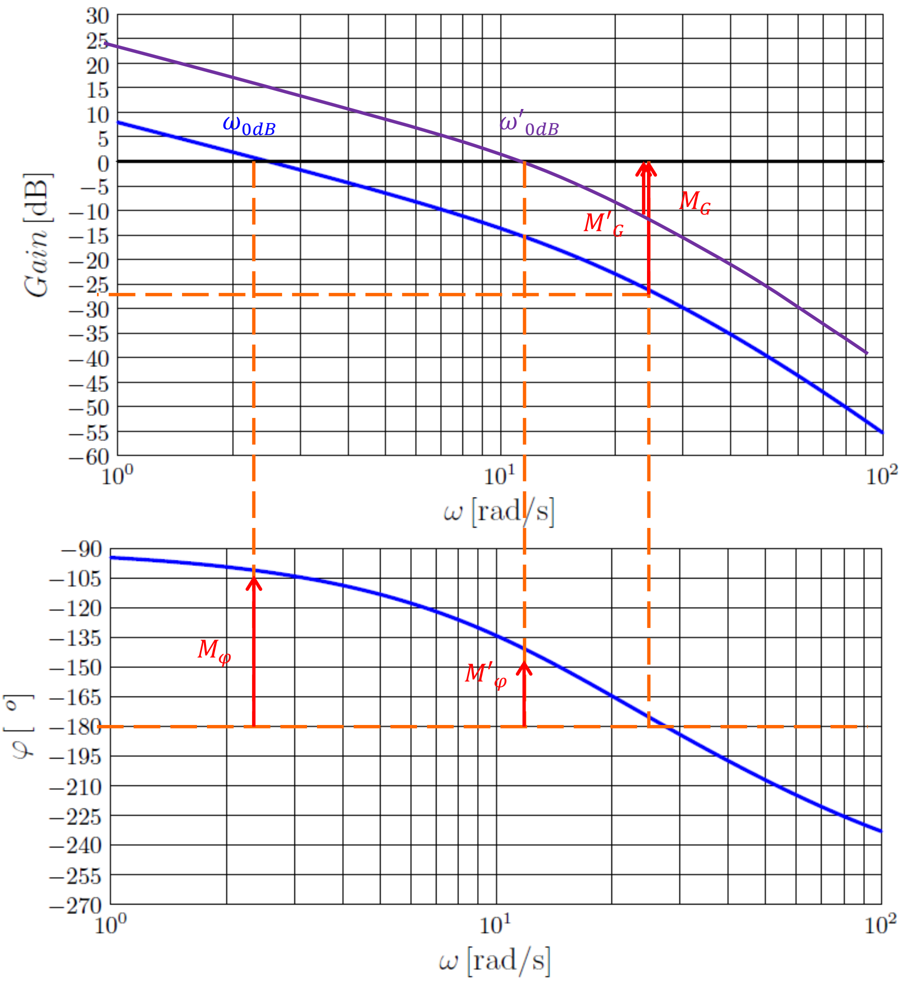


Exercice 8 : **MARGES DE STABILITE**

Question 1 : *Tracer le schéma-bloc du système asservi.*



Question 2 : *Déterminer les marges de phase et de gain du système, puis conclure quant à sa stabilité.*



On lit graphiquement $\varphi(\omega_{0dB}) = -102°$

$$M_\varphi = \varphi(\omega_{0dB}) + 180° = -102° + 180° = 78°$$

$$M_G = 0 - G_{dB}(\omega_{-180°}) = 0 - 20\log|H_{FTBO}(j\omega_{-180°})| = 28\ dB$$

Les marges sont positives, le système est donc stable.

Question 3 : *Déterminer la valeur de K permettant d'obtenir une marge de gain $M_G = 12\ dB$.*

On cherche K tel que $M_G = 12\ dB$.

$$M_G = -G_{dB}(\omega_{-180°}) = 0 - 20\ log|K\ H_{FTBO}(j\omega_{-180°})| = -20\ log|K| + 28 = 12\ dB$$

$$\Rightarrow 20\ log|K| = 16\ dB$$

$$\Rightarrow K = 10^{\frac{16}{20}} = 6{,}3$$

Question 4 : *Déterminer la nouvelle marge de phase du système et conclure quant à sa stabilité.*

On lit graphiquement $\varphi(\omega_{0dB}) = -143°$

$$M_\varphi = \varphi(\omega_{0dB}) + 180° = -143° + 180° = 37°$$

Les marges sont positives, donc le système est encore stable.

La nouvelle marge de phase est plus faible, le système est plus rapide mais plus oscillant.

On prend usuellement une marge de phase de 45° pour optimiser le fonctionnement du système, ce qui augmenterait la marge de gain.

Question 5 : *En précisant la méthode permettant de le calculer, déterminer l'écart statique ε_s du système corrigé pour une entrée indicielle.*

D'après le tableau des écarts statiques d'un système non perturbé du cours, pour une entrée en échelon et un système de classe 1 (car asymptote en $0\ rad/s$ de $-20dB/dec$), $\varepsilon_s = 0$.

Remarque :

Erreur statique $e_{r\infty}$		$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Impulsion	$E(p) = 1$	0	0	0
Echelon	$E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0
Rampe	$E(p) = \frac{V_0}{p^2}$	∞	$\frac{V_0}{K}$	0
Parabole	$E(p) = \frac{a_0}{p^3}$	∞	∞	$\frac{a_0}{K}$
Pour un système de FTBO de classe α et de gain statique K				

Sinon, il faut le redémontrer avec le théorème de la valeur finale.

$$\varepsilon_s = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0^+} \varepsilon(p) = \lim_{p\to 0^+} \varepsilon(p) = \lim_{p\to 0^+} p \frac{1}{1+KF(p)} \frac{1}{p} = 0$$