

LYCÉE KLÉBER - STRASBOURG

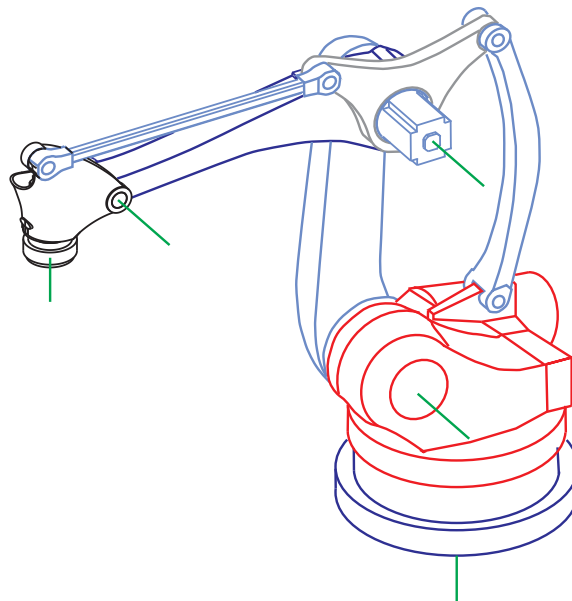
Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Cahier n°2

Mécanique des systèmes de solides

Statique

Version 2015 - 2017



Nom :

L. ESCHBACH
P. LECLERCQ
S. LONNI
JD. MOSSER
J. TANOH
R. VINOT

Liste des exercices

D'une modélisation locale au modèle global	5
STA_11 Pales d'hélicoptère	5
STA_12 Force de pression hydrostatique	6
STA_13 Pression dans un tube	7
STA_14 Action mécanique d'origine électro-magnétique	8
STA_15 Frottement fluide sur un malaxeur	9
STA_16 Frottement fluide sur un malaxeur « arc »	10
STA_17 Couple transmissible par un embrayage	11
Rechercher une composante particulière	12
STA_21 Bloc sur montage d'usinage	12
STA_22 Couple moteur et couple résistant	13
STA_23 Couloir télescopique d'aéroport	14
Lois Entrée-Sortie	16
STA_31 Coinceur	16
STA_32 Élévateur	17
STA_33 Ouvre-portail automatique	18
STA_34 Pèse-camion	20
STA_35 Ouvre-portail FAAC	21
Assemblages avec des câbles	24
STA_41 Une potence et un câble	24
STA_42 Une potence et deux câbles	25
Transmission par engrenage	26
STA_51 Étau hydraulique auto-centrant	26
Exprimer des conditions d'équilibres	28
STA_61 Véhicule sur une route inclinée	28
STA_62 Coinceur à cames	30
STA_63 Une calebasse accrochée au mur	32
STA_64 Agitateur	33

STA_11 Pales d'hélicoptère

[t1-5.2]

pub-pales-helicoptere-v2

On s'intéresse à un hélicoptère en vol stationnaire, donc lors d'une phase de vol où il est immobile par rapport au sol :

- La verticale ascendante du lieu géographique est orientée par le vecteur \vec{z} .
- Lors du mouvement étudié, le rotor R tourne par rapport à un repère sol noté S autour d'un axe (C, \vec{z}) à la vitesse angulaire ω .
- Le rotor R est composé de quatre pales $p_i, i \in \{1, \dots, 4\}$, modélisées par quatre segments de même longueur L , à savoir respectivement CA_1, CA_2, CA_3 et CA_4 .

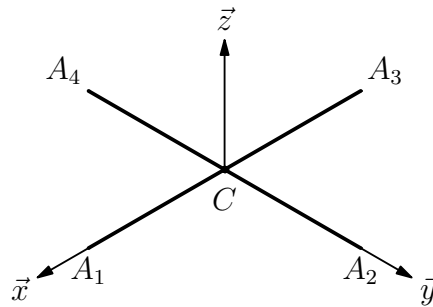


FIGURE 1 – Les quatre pales simplifiées d'un hélicoptère

On modélise l'action mécanique exercée par l'air sur la pale p_1 par une force linéique \vec{q} proportionnelle au carré de la fréquence de rotation et au carré du rayon x :

$$\vec{q} = (\omega x)^2 (k_y \vec{y} + k_z \vec{z})$$

- Q1** Les coefficients k_y et k_z sont des constantes positives : donner leurs unités respectives.
- Q2** Déterminer le torseur modélisant l'action mécanique de l'air sur la pale p_1 noté $\mathcal{F}(a \rightarrow p_1)$.
- Q3** Montrer que $\mathcal{F}(a \rightarrow p_1)$ est un glisseur et trouver B_1 le point de la pale par lequel passe l'axe central.
- Q4** Proposer une représentation graphique de ce glisseur en décomposant la résultante en une composante de portance notée F_P suivant \vec{z} et une composante de traînée notée F_T suivant \vec{y} .
Généraliser cette représentation pour chacune des trois autres pales en utilisant les symétries du rotor.
- Q5** Déterminer le torseur des actions mécaniques exercées par l'air sur le rotor $\mathcal{F}(a \rightarrow R)$ et détailler les effets de la portance et de la traînée.
- Q6** Quel est à votre avis le sens de rotation du rotor par rapport à la cabine ?



FIGURE 2 – Un hélicoptère de la sécurité civile

STA_12 Force de pression hydrostatique

[t1-ch5-cl]

exo-pression-barrage-v1

Soit une retenue d'eau de hauteur h matérialisée par un barrage noté b de largeur L supposée constante :

- on s'intéresse au point courant P situé à la cote z et on pose dS la surface de barrage élémentaire prise autour de ce point ;
- les lois de l'hydrostatique propose une répartition linéaire de pression depuis la surface, soit $p(z) = \rho_e g(h - z)$, avec ρ_e la masse volumique du fluide considéré, ici de l'eau ;
- on pose \vec{n} la normale sortante à la paroi au point P , donc dirigée du barrage vers l'eau.

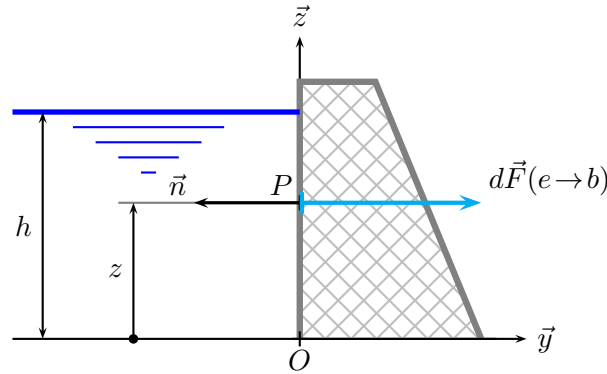


FIGURE 1 – Force de pression hydrostatique sur une paroi

- Q1** Déterminer $\mathcal{F}(e \rightarrow b)$ le torseur de l'action mécanique du fluide sur la surface rectangulaire du barrage en exprimant ses éléments de réduction au point O en fonction de ρ , g , h et L .
- Q2** Montrer que ce torseur est un glisseur et déterminer le point A de la surface de contact permettant d'exprimer le torseur précédant sous sa forme la plus simple.

STA_13 Pression dans un tube	[t1-5.3]
-------------------------------------	----------

pub-pression-tube-v1

Soit un tube t de rayon intérieur R , dans lequel circule un fluide f à la pression uniforme p . On s'intéresse à l'action mécanique ($f \rightarrow t$) du fluide sur le tube pour un morceau rectiligne d'épaisseur dL .

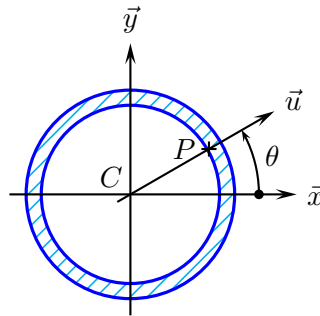


FIGURE 1 – Section droite du tube

Une section droite du tube est l'intersection de ce tube avec un plan perpendiculaire à l'axe de révolution.

- Q1 Quel élément géométrique différentiel prendre au niveau du point courant P ?
- Q2 Déterminer au point courant P la force élémentaire $d\vec{F}(f \rightarrow t)$.
- Q3 Déterminer $\mathcal{F}(f \rightarrow t)$ le torseur des actions mécaniques du fluide sur la portion rectiligne de tube.
- Q4 Le résultat de la question 3 signifie-t-il que le tube peut supporter n'importe quelle valeur de pression ?

Quand on met un tuyau d'arrosage sous pression, un brin courbé a tendance à se redresser.

- Q5 Sans calcul supplémentaire, est-il possible d'expliquer qualitativement ce phénomène ?

STA_14 Action mécanique d'origine électro-magnétique	[t1-5.4]
---	----------

pub-force-de-Laplace-v1

On considère une spire circulaire de centre O et de rayon R , située dans un plan (O, \vec{x}, \vec{y}) :

- cette spire est parcourue par un courant I ;
- elle est placée dans un champ magnétique supposé uniforme et défini par $\vec{B} = B\vec{u}$ où le vecteur \vec{u} est dans le plan (\vec{z}, \vec{x}) et orienté par l'angle $\psi = (\vec{z}, \vec{u})$;
- on pose $\vec{OP} = R\vec{u}_r$, avec $\theta = (\vec{x}, \vec{u}_r)$.

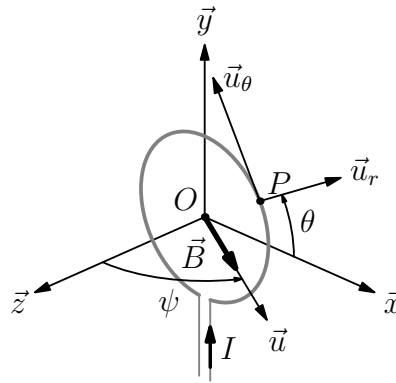


FIGURE 1 – Effet d'un champ magnétique sur une spire parcourue par du courant

La force élémentaire d'origine électromagnétique, appelée force de Laplace, s'exerce sur l'élément de circuit $d\vec{l}$ au point courant P et s'exprime par $d\vec{F}(b \rightarrow s) = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$.

Q1 Exprimer la force élémentaire $d\vec{F}(b \rightarrow s)$ en fonction de B, R, I, θ et ψ .

Q2 Déterminer le torseur des actions mécaniques d'origine électromagnétique sur toute la spire dont on néglige l'ouverture.

STA_15 Frottement fluide sur un malaxeur

On considère une pale filaire repérée 2 plongée dans un liquide visqueux. Elle tourne autour de l'axe (A, \vec{z}_2) par rapport à un bâti repéré 1, et cette rotation est caractérisée par le vecteur $\vec{\Omega}(2/1) = \omega_{21} \vec{z}_2$.

On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = a\vec{x}_2$, $\overrightarrow{CB} = a\vec{z}_2$ et on pose $\overrightarrow{AP} = x\vec{x}_2$.

exo-malaxeur-4figes-v1

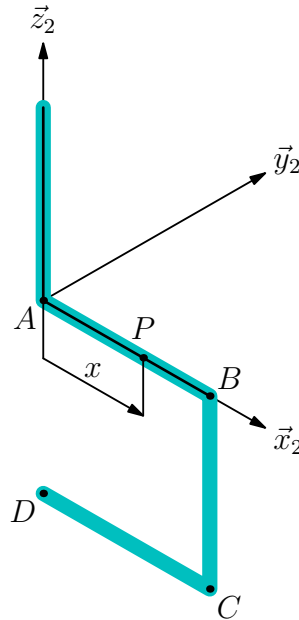


FIGURE 1 – L'axe tournant d'un malaxeur

On suppose l'action mécanique élémentaire du fluide sur la pale modélisable par une force linéique proportionnelle à la vitesse relative $\vec{q}(P) = -\mu \vec{V}(P, 2/1)$

- Q1 Caractériser le mouvement 2/1 et exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(P, 2/1)$.
- Q2 Exprimer la force élémentaire $d\vec{F}(f \rightarrow 2)$ appliquée à un élément de longueur dx centré au point courant P .
- Q3 Déterminer le torseur $\mathcal{F}(f \rightarrow AB)$ modélisant l'action du fluide f sur la tige AB .
- Q4 Déterminer le torseur $\mathcal{F}(f \rightarrow BC)$ modélisant l'action du fluide f sur la tige BC .
- Q5 Déterminer le torseur $\mathcal{F}(f \rightarrow 2)$ modélisant l'action du fluide f sur l'arbre 2, et préciser sa nature.

STA_16 Frottement fluide sur un malaxeur « arc »

exo-malaxeur-arc-v3

On considère une pale filaire repérée 2 en forme de quart de cercle de rayon R plongée dans un liquide visqueux. Elle est schématisée sur la figure 1 en liaison pivot d'axe (C, \vec{y}_1) avec un bâti repéré 1, et la rotation 2/1 est caractérisée par le vecteur $\vec{\Omega}(2/1) = \omega_{21}\vec{y}_1$.

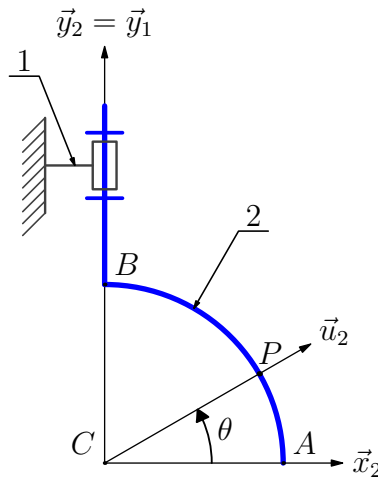


FIGURE 1 – Un malaxeur en forme de quart de cercle

Le champ de pesanteur est donné par $\vec{g} = -g\vec{y}_1$, avec $g > 0$

On suppose l'action mécanique élémentaire du fluide sur la pale modélisable par une force linéique proportionnelle à la vitesse relative $\vec{q}(P) = -\mu\vec{V}(P, 2/1)$

- Q1 À partir des indications de la figure 1, paramétrer la position du point courant P sur le solide 2.
- Q2 Caractériser le mouvement 2/1 et exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(P, 2/1)$.
- Q3 Exprimer la force élémentaire $d\vec{F}(f \rightarrow 2)$ appliquée à un élément de longueur $Rd\theta$ centré au point courant P .
- Q4 Déterminer le torseur modélisant l'action du fluide f sur l'arbre 2, et préciser sa nature.

STA_17 Couple transmissible par un embrayage

[t1-5.10]

pub-embayage-v1

On considère le mécanisme d'embrayage schématisé sur la figure 1 ci-dessous.

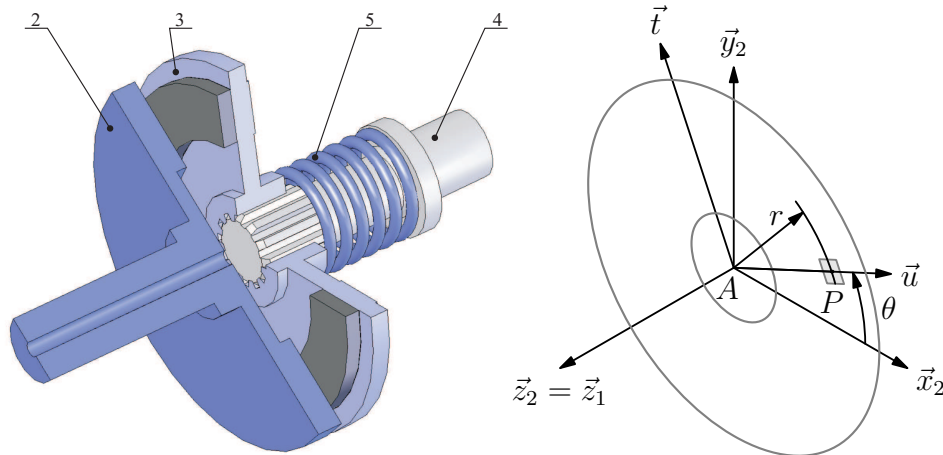


FIGURE 1 – Schéma de principe d'un embrayage

Il est constitué de cinq ensembles distincts :

- un bâti 1 non représenté auquel on associe un repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
- un arbre 4, en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_1) avec le bâti 1, dont la rotation possible 4/1 est générée dans le sens positif par un moteur ;
- le disque d'embrayage 3, de rayon intérieur R_i , de rayon extérieur R_e , qui est en liaison glissière de direction \vec{z}_1 avec l'arbre 4 ;
- un plateau récepteur 2, en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_1) avec 1, auquel on associe un repère $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en choisissant $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$;
- un ressort 5, qui prend appui sur l'arbre 4 pour plaquer le disque d'embrayage 3 sur le plateau 2 ;
 - le coefficient de frottement du couple de matériaux en contact est noté f ,
 - Le point courant P de la surface de contact du plateau 2 est repéré par ses coordonnées polaires $(r, \theta, 0)$ dans le repère $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.

- Q1** Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme, et proposer un modèle de liaison pour le contact entre le disque 3 et l'arbre récepteur 2.
- Q2** En l'absence de frottement, le disque 3 peut-il entraîner en rotation le plateau 2 par rapport au bâti 1 ?
Déterminer dans ce cas la direction éventuelle du vecteur vitesse $\vec{V}(P, 2/3)$.
- Q3** En tenant compte du phénomène de frottement, proposer un modèle pour l'action mécanique élémentaire $d\vec{F}(3 \rightarrow 2)$ au point courant P .
- Q4** En supposant la pression de contact normale p uniforme au contact entre le disque 2 et la plaque 3, déterminer le torseur des actions mécaniques $\mathcal{F}(3 \rightarrow 2)$.
- Q5** Soit F l'effort de poussée du disque 3 sur le plateau 2. Exprimer le couple maximal C_{Max} transmissible par l'embrayage en fonction de cet effort F .

STA_21 Bloc sur montage d'usinage

exo-montage-usinage-v1

Une pièce 1 schématisée succinctement ci-dessous est une pièce brute à usiner. Elle est ainsi mise en position par rapport à un bâti 0 par 6 points d'appui, nommés A, B, C, D, E et G . Ces six points sont localisées sur les schémas de la figure ci-dessous.

Au point F vient appuyer une bride 2 destinée à la maintenir en position. Les composantes de la force $\vec{F}(2 \rightarrow 1)$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sont également dessinées au point F .

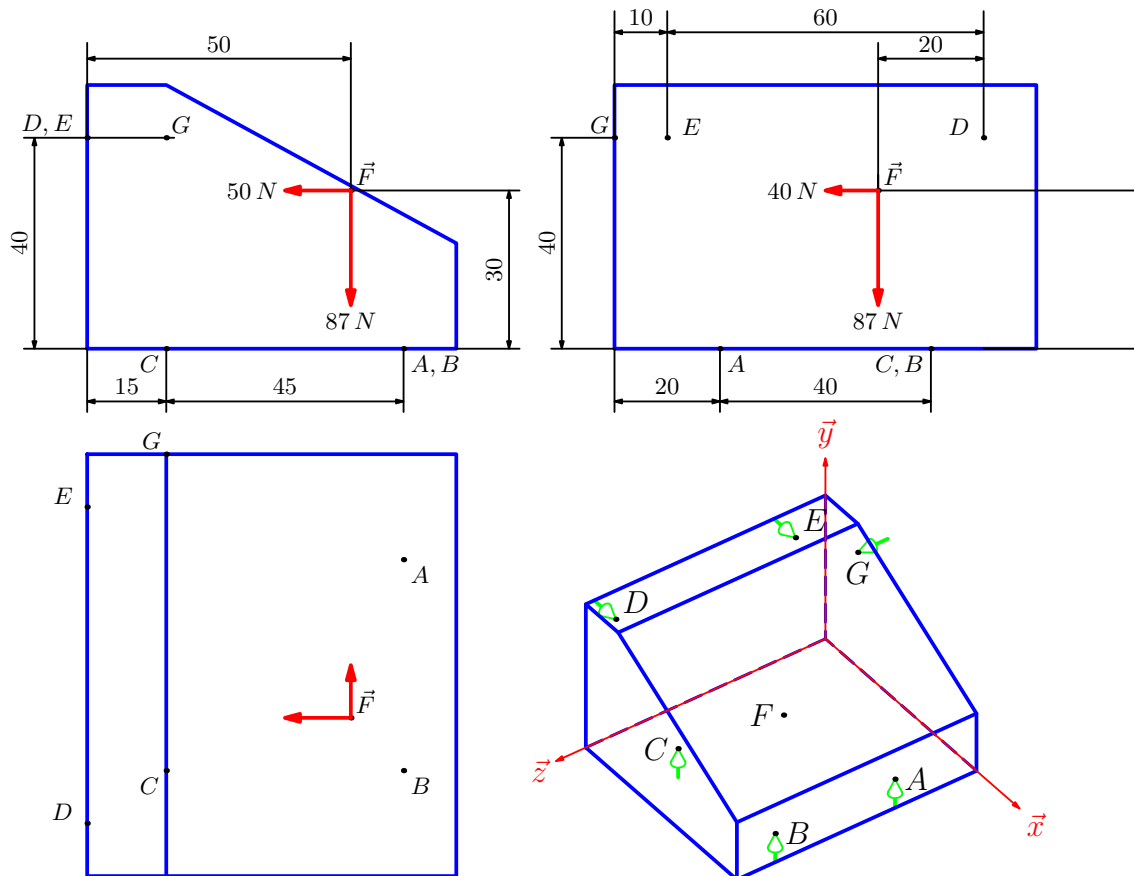


FIGURE 1 – Schémas de mise en situation

- Q1** Par lecture des cotes données, déterminer les coordonnées des six points d'appui dans le repère tracé en perspective.
- Q2** Justifier le fait que les six points d'appui immobilisent la pièce 1 par rapport au bâti 0.
- Q3** En supposant les contacts ponctuels sans frottement, déterminer le plus simplement possible la composante de l'action mécanique $0_D \rightarrow 1$ au point D .

STA_22 Couple moteur et couple résistant

[t1-6.2]

pub-couple-moteur-v1

On se propose de définir les deux termes « couple moteur » et « couple résistant » à partir de la description d'un moteur électrique.

Un moteur électrique est constitué principalement de quatre pièces :

- un carter repéré 1 ;
- un arbre repéré 2, en contact avec le carter par l'intermédiaire de deux roulements à billes 3 et 4 ;
- un rotor r solidaire de l'arbre ;
- un stator s solidaire du carter.

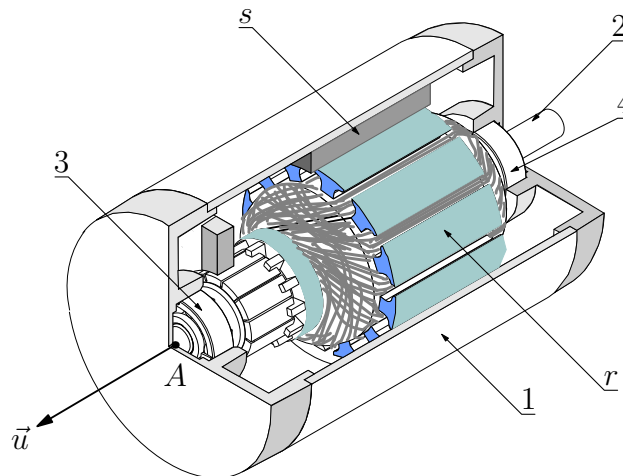


FIGURE 1 – Schéma simplifié d'un moteur électrique

On suppose le moteur en situation, entraînant une charge en rotation. On modélise l'action de cette charge sur l'arbre par un torseur $\mathcal{F}(c \rightarrow 2)$ indéterminé.

- Q1** Tracer le graphe des liaisons, et proposer un modèle de comportement pour le contact entre l'arbre 2 et le carter 1.
- Q2** Faire l'inventaire des actions mécaniques qui s'exercent sur l'arbre 2.
- Q3** L'arbre est supposé parfaitement équilibré et en rotation uniforme par rapport au carter, ce qui permet de lui appliquer les lois de l'équilibre. Quel est l'intérêt d'écrire l'équation de moment au point A scalaire \vec{u} ?
- Q4** En exploitant l'équation précédente, proposer une définition d'un couple moteur C_m , d'un couple résistant C_r .

STA_23 Couloir télescopique d'aéroport

exo-couloir-telescopique-v1

Mise en situation

Dans les aéroports modernes, des couloirs télescopiques (figure 1) relient le hall d'embarquement à l'avion. Les passagers sont ainsi à l'abri des intempéries :

- l'extrémité raccordée au bâtiment est soutenue par une articulation à la CARDAN ;
- l'extrémité s'adaptant à l'avion peut se déplacer dans toutes les directions afin de pouvoir atteindre la porte de l'avion, ceci grâce à un ensemble 3 comportant un vérin ainsi qu'une roue motrice et orientable.

Dans toute cette étude, on ne considère que le cas particulier où le couloir est horizontal :

- $\mathcal{R}(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est un repère lié au bâtiment 5 ;
- $\mathcal{R}(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est un repère attaché au corps principal 1 avec $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$, le vecteur \vec{y}_1 orientant le couloir et on pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$.

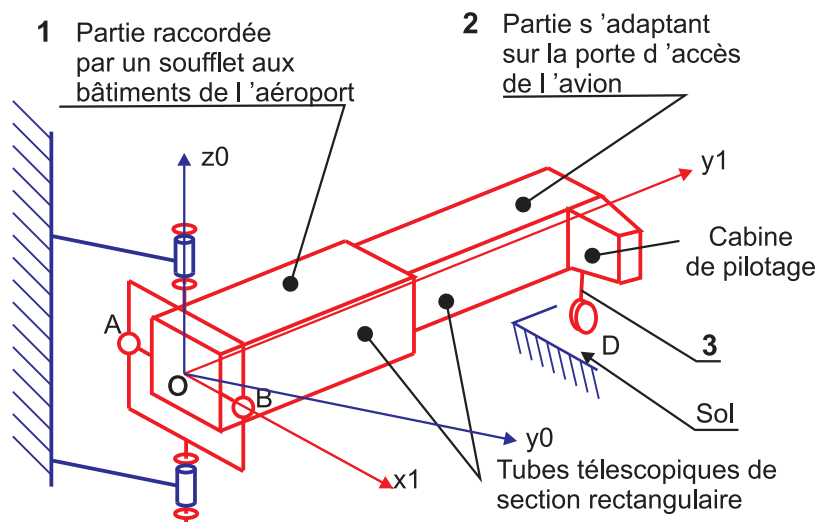


FIGURE 1 – Présentation succincte d'un couloir télescopique d'aéroport

Description de l'ensemble

L'appareil étudié est constitué de trois solides principaux représentés schématiquement sur la figure 2 :

- Un corps principal 1, de poids noté P_1 et de centre de gravité G_1 tel que $\vec{OG}_1 = e\vec{y}_1$. Il est articulé sur une potence 4, elle-même guidée en rotation par rapport au bâtiment suivant l'axe vertical (O, \vec{z}_0) . On modélise les contacts entre 1 et 4 par une liaison sphérique de centre A et par une liaison sphère-cylindre de centre B et d'axe (B, \vec{x}_4) . On pose

$$\vec{OA} = -a\vec{x}_1 \quad \vec{OB} = b\vec{x}_1 \quad \vec{OF} = -f\vec{z}_0$$

- Le couloir télescopique 2 en liaison glissière de direction \vec{y}_1 avec 1, de poids noté P_2 et de centre de gravité G_2 tel que

$$\vec{OG}_2 = \vec{OC} + \vec{CG}_2 \quad \text{avec} \quad \vec{OC} = l\vec{y}_1 \quad \text{et} \quad \vec{CG}_2 = c\vec{x}_1$$

- Un chariot moteur 3, de poids noté P_3 et de centre de gravité G_3 . Le contact entre la roue motrice et le sol est décrit par un contact ponctuel au point D de normale \vec{z}_0 . On pose

$$\vec{DC} = h\vec{z}_0 \quad \vec{DG}_3 = d\vec{z}_0 \quad \vec{OE} = \lambda\vec{y}_1$$

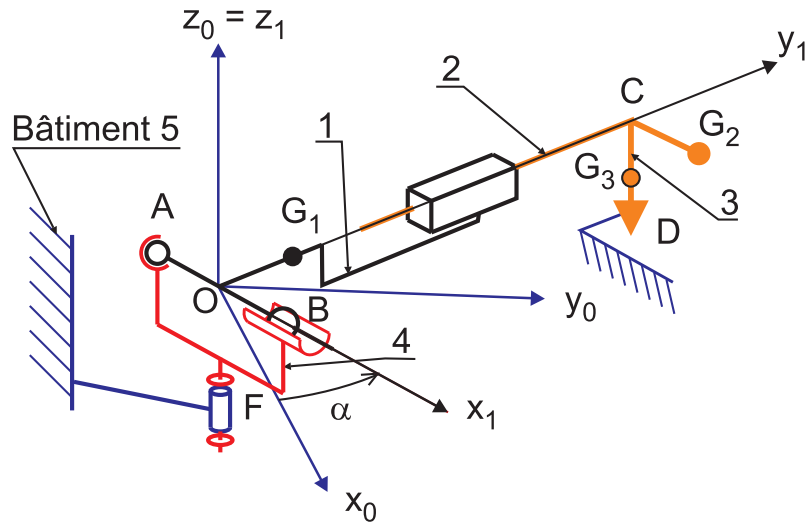


FIGURE 2 – Description mécanique du couloir télescopique d'aéroport étudié

Données numériques :

$$\begin{array}{lll}
 \|\vec{P}_1\| = 10^5 \text{ N} & \|\vec{P}_2\| = 15 \cdot 10^4 \text{ N} & \|\vec{P}_3\| = 10^4 \text{ N} \\
 a = 1,5 \text{ m} & b = 1,5 \text{ m} & c = 1,0 \text{ m} \\
 d = 1,0 \text{ m} & e = 4,0 \text{ m} & h = 4,0 \text{ m} \\
 l = 16 \text{ m} & \lambda = 7,0 \text{ m} & f = 2,0 \text{ m}
 \end{array}$$

Travail demandé

Q1 Modéliser les actions mécaniques à associer à chaque liaison.

Les vecteurs des questions suivantes sont à exprimer dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en fonction des poids et des longueurs :

- en notant X_{ij}, Y_{ij} et Z_{ij} les composantes de la résultante $\vec{R}(i \rightarrow j)$;
- en notant L_{ij}, M_{ij} et N_{ij} les composantes du moment $\vec{M}(H, i \rightarrow j)$ au point H proposé.

Q2 Exploiter l'équilibre de l'ensemble (1 + 2 + 3) et déterminer les éléments de réduction :

- au point A de l'action mécanique $4_A \rightarrow 1$;
- au point B de l'action mécanique $4_B \rightarrow 1$;
- au point D de l'action mécanique $5 \rightarrow 3$.

Q3 Exploiter l'équilibre de la pièce (4) et déterminer les éléments de réduction au point F de l'action mécanique $5 \rightarrow 4$.

Q4 Exploiter l'équilibre de la pièce (1) et déterminer les éléments de réduction au point E de l'action mécanique $2 \rightarrow 1$.

Q5 Proposer une synthèse des différents résultats numériques.

STA_31 Coinceur	[t1-6.cours]
------------------------	--------------

exo-coin-v2

On s'intéresse à un dispositif de serrage par renvoi utilisant un coin schématisé sur la figure 1 ci-dessous. Il comporte trois ensembles :

- Un bâti 1 auquel on associe le repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
- Un poussoir 2 en liaison glissière de direction \vec{z}_1 avec le bâti 1. On lui associe un repère $(A, \vec{x}_2, \vec{v}_2, \vec{w}_2)$ et on pose $(\vec{z}_2, \vec{w}_2) = \alpha$.

Cet ensemble est soumis à l'action mécanique inconnue d'un vérin modélisée par le torseur

$$\mathcal{F}(v \rightarrow 2) = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} X \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

- Un coulisseau 3 en liaison glissière de direction \vec{y}_1 avec le bâti 1. Ce coulisseau est également lié au poussoir 2 par une liaison sphère-plan, de centre C et de normale \vec{v}_2 . Une action mécanique connue s'exerce sur cette barre, modélisée par le torseur

$$\mathcal{F}(e \rightarrow 3) = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{l} -F \vec{y}_1, \text{ avec } F \geq 0 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

Les poids des solides sont négligés devant les actions mécaniques de serrage.

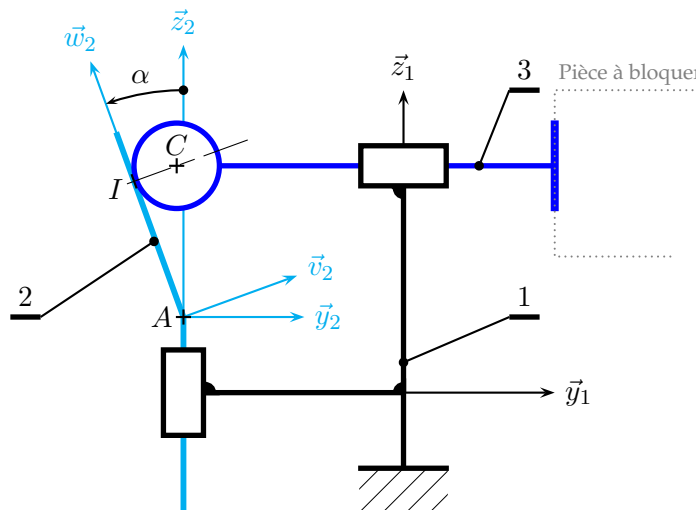


FIGURE 1 – Schéma cinématique du mécanisme

- Q1 Paramétrer le mécanisme.
- Q2 Caractériser les torseurs des actions mécaniques transmissibles pour chaque liaison.
- Q3 Déterminer le plus simplement possible la loi entrée-sortie $f(X, F, \alpha) = 0$.
- Q4 Déterminer les actions mécaniques de liaison.

On considère pour la suite l'extrémité sphérique du coulisseau 3, de rayon R , en contact au point I avec un plan du poussoir 2, contact caractérisé par le coefficient de frottement f .

- Q5 À quelle(s) condition(s) le mécanisme est-il réversible ?

STA_32 Élévateur

exo-elevateur-v1

On s'intéresse à une table élévatrice telle que présentée sur la figure 1 ci-dessous. Son architecture s'appuie sur un parallélogramme déformable. Elle comprend :

- un bâti noté 1 auquel on associe un repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. On pose $\vec{OC} = L\vec{x}_1$;
- un bras motorisé 2, en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_1) avec le bâti 1. On lui associe un repère $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ et on pose d'une part $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, d'autre part $\vec{OA} = R\vec{x}_2$;
- une plateforme 3 sur laquelle est posée la charge. Cette plateforme est en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_2) avec le bras motorisé 2. On lui associe un repère $(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2)$ et on pose $\vec{AB} = L\vec{x}_3$;
- une jambe 4 de longueur R , en liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_1) avec le bâti et en liaison sphère-cylindre de centre B et d'axe (B, \vec{z}_4) avec la plateforme 3.

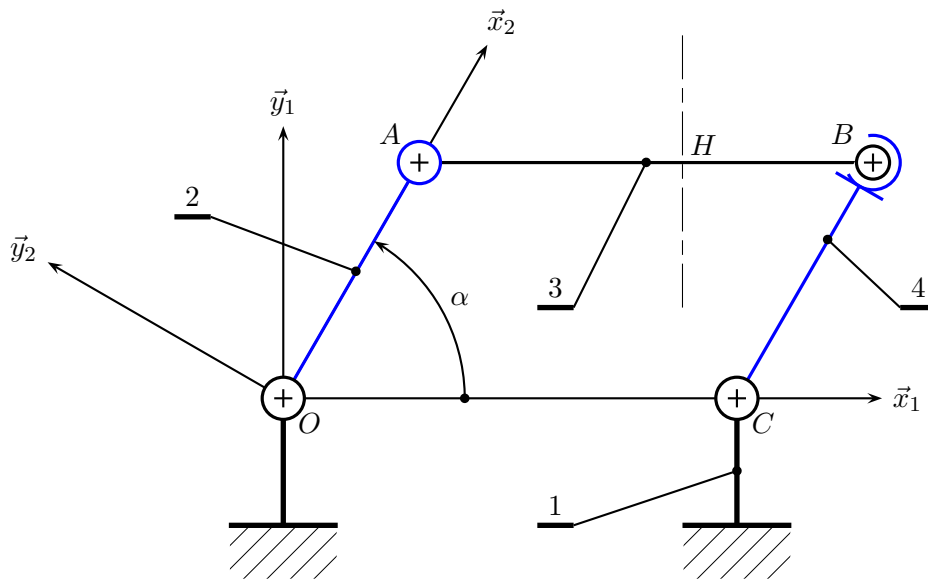


FIGURE 1 – Un schéma plan de l'élévateur

Actions mécaniques

- Le plateau 3 supporte une charge concentrée au point H défini par $\vec{AH} = \lambda\vec{x}_3$

$$\mathcal{F}(c \rightarrow 3) = \begin{matrix} -F\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{matrix}_H$$

- Un motoréducteur entraîne le bras 2 dans le mouvement 2/1

$$\mathcal{F}(m \rightarrow 2) = \begin{matrix} \vec{0} \\ C_m\vec{z}_1 \end{matrix}$$

Q1 À l'équilibre, déterminer l'expression de C_m en fonction de F et des grandeurs géométriques.

Q2 Le couple moteur C_m dépend-il de la position λ de la charge ? Pourquoi.

STA_33 Ouvre-portail automatique

exo-ouvre-portail-v1

Objectifs de l'exercice

Déterminer la relation entre le moment du couple fourni par le moteur et l'action mécanique du vent sur le vantail. Ceci permettra de voir l'influence de la position du point de fixation du moto-réducteur sur le pilier et de la position du point d'encrage du bras de poussée sur le vantail sur le couple que devra fournir le moto-réducteur.

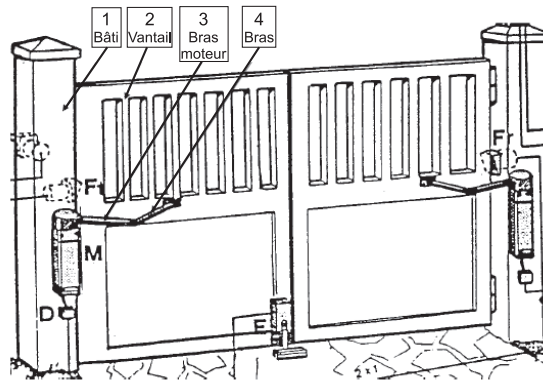


FIGURE 1 – Mise en situation et modélisation cinématique d'un ouvre-portail

Hypothèses de travail

- Le système mécanique étudié est composé du bâti (1), du vantail (2), du bras moteur (3) et du bras de poussée (4).
- Les liaisons sont supposées parfaites et sans frottement, et leurs modélisations sont proposées sur la figure 2.
- Les points A , B et C sont posés dans le plan $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$.
- L'action du moto-réducteur sur le bras moteur est modélisée par un couple de moment $C_m \vec{z}$.
- L'action du vent sur le vantail est modélisée par un glisseur de résultante $F_v \vec{y}_2$ et d'axe central (G, \vec{y}_2) .
- L'action de la pesanteur sur le vantail est modélisée par un glisseur de résultante $-P \vec{z}$ et d'axe central (G, \vec{z}) .
- Les poids des autres pièces sont négligés.

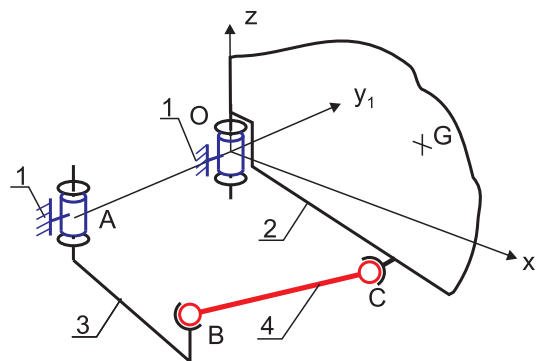


FIGURE 2 – Modélisation cinématique de l'ouvre-portail

Le schéma plan de la figure 3 ci-dessous propose le paramétrage des différents éléments du mécanisme.

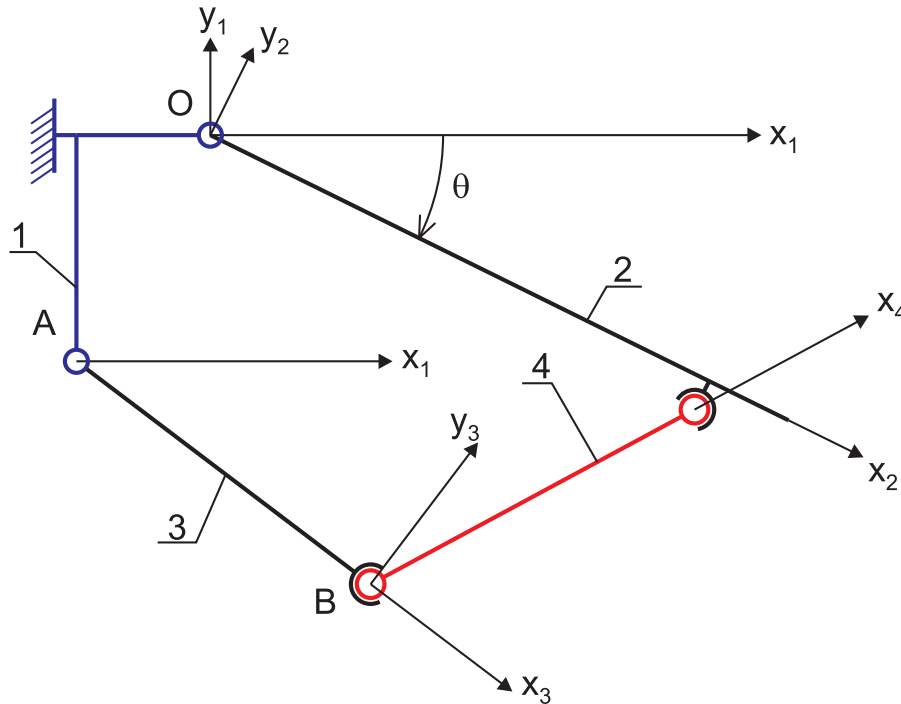


FIGURE 3 – Paramétrage du mécanisme

Paramètres du système :

$$\vec{OA} = -a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1 \quad \vec{OC} = d\vec{x}_2 - c\vec{y}_2 \quad \vec{AB} = L\vec{x}_3 \quad \vec{BC} = L\vec{x}_4 \quad \vec{OG} = \lambda\vec{x}_2 - h\vec{z}$$

avec $a = 100 \text{ mm}$, b réglable, $c = 20 \text{ mm}$, d réglable, $L = 280 \text{ mm}$. Les longueurs λ et h dépendent du modèle de vantail motorisé.

Travail demandé

Q1 Équilibre du bras de poussée 4

Faire le bilan des actions mécaniques appliquées au bras (4) et montrer que l'action de (3) sur (4) se réduit à un glisseur de résultante $F_4\vec{x}_4$ d'axe central (B, \vec{x}_4) .

Soient les points H_O et H_A respectivement les projections orthogonales des points O et A sur la droite BC . On définit $\vec{OC} = \vec{OH}_O + \vec{H}_O\vec{C}$ et $\vec{AC} = \vec{AH}_A + \vec{H}_A\vec{C}$, avec $\vec{OH}_O = -d_O\vec{y}_4$ et $\vec{AH}_A = -d_A\vec{y}_4$. Les distances d_O et d_A dépendent ainsi de la position du mécanisme.

Tracer sur la figure 3 ci-dessus les points H_O et H_A ainsi que les distances d_O et d_A .

Q2 Équilibre du bras moteur 3

Faire le bilan des actions mécaniques appliquées au bras moteur (3) et déterminer la relation reliant C_m et F_4 .

Q3 Équilibre du vantail 2

Faire l'inventaire des actions mécaniques appliquées au vantail (2) et déterminer la relation reliant F_v et F_4 .

Q4 Conclusions

Déterminer le rapport $\lambda F_v / C_m$.

Est-ce que ce rapport est constant ? Pourquoi ?

Que se passe-t-il si b et d sont modifiés ?

STA_34 Pèse-camion

On se propose d'étudier une balance servant au contrôle de la charge des camions circulant sur la voie publique.

exo-pese-camion-v1

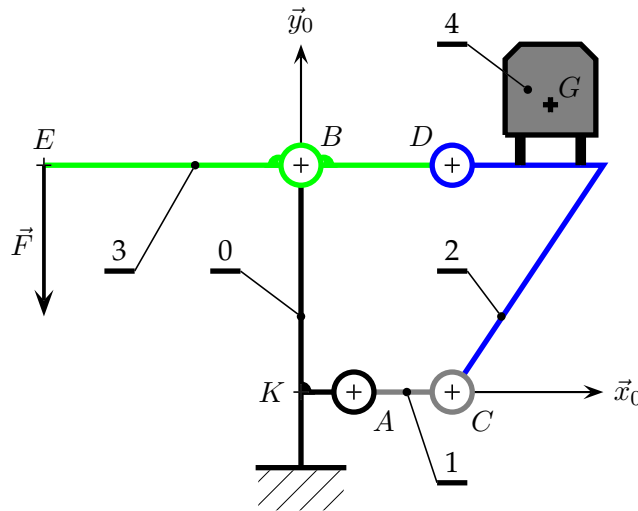


FIGURE 1 – Schéma cinématique de la balance

Ce mécanisme comporte quatre ensembles :

- un bâti 0, auquel est associé le repère $(K, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. On pose $\overrightarrow{KA} = a\vec{x}_0$ et $\overrightarrow{KB} = b\vec{y}_0$;
- une bielle 1, relié au bâti 0 par une liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0) et on pose $\overrightarrow{AC} = c\vec{x}_0$;
- un plateau porte-camion 2, relié à la bielle 1 par une liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_0) . On pose $\overrightarrow{CD} = b\vec{y}_0$;
- un levier 3, lié au bâti 0 par une liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_0) et au plateau 4 par une liaison pivot d'axe (D, \vec{z}_3) . On pose $\overrightarrow{BD} = d\vec{x}_0$ et $\overrightarrow{EB} = e\vec{x}_0$, avec $d = a + c$;

Le champ de pesanteur est caractérisé par $\vec{g} = -g\vec{y}_0$

Soit un camion 4, de centre de masse G et de masse M inconnue, arrêté sur le plateau 2 et l'ensemble du mécanisme en équilibre par rapport au bâti. On pose $\overrightarrow{DG} \cdot \vec{x}_0 = \lambda$

L'action mécanique relevée par le contrôleur est modélisée par un glisseur

$$\mathcal{F}(e \rightarrow 3) = \begin{matrix} E \\ \vec{0} \end{matrix} \begin{matrix} -F\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}$$

Les masses des éléments constituant le mécanisme sont négligées devant celle du camion.

- Q1** Proposer une stratégie à suivre pour trouver la relation $M = h(F)$ à l'aide de 3 équations scalaires.
- Q2** Résoudre et montrer que la distance λ n'a pas d'influence sur le résultat.

STA_35 Ouvre-portail FAAC

exo-faac-v1

On peut considérer l'ouvre-portail FAAC comme un vérin électrohydraulique : un moteur électrique entraîne une pompe hydraulique qui alimente un vérin hydraulique double-effet. Des limiteurs de pression placés sur le circuit hydraulique permettent de contrôler la pression aussi bien en sortie qu'en rentrée de tige, obtenant ainsi une limitation de l'effort développé par le vérin ; on limite ainsi pour des raisons de sécurité l'effort que peut exercer le vantail sur un obstacle lors du mouvement.

Modélisation de l'ensemble portail, ouvre-portail, mur

- le vantail est ouvert lorsque \vec{x}_1 est confondu avec \vec{x} , fermé lorsque \vec{x}_1 est confondu avec \vec{y} ;
- le corps du vérin 2 est en liaison sphérique de centre A avec le mur 0, la tige 3 est en liaison sphérique de centre B avec le vantail 1. La tige 3 est en liaison glissière de direction AB avec le corps 2, le vantail 1 est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}) avec le mur 0. Toutes les liaisons sont parfaites et sans frottement ;
- la pesanteur n'est prise en compte que pour le vantail qui est de masse M et de centre d'inertie G ; l'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{z}$;
- un obstacle agit sur le vantail 1 sous la forme d'un glisseur de résultante $-F\vec{y}_1$ et d'axe central passant par C ;
- l'étude de l'équilibre du système 2+3 a permis d'obtenir le résultat suivant, avec F_V l'effort de poussée du vérin

$$\mathcal{F}(0 \rightarrow 2) = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} F_V \vec{u}_3 \\ \vec{0} \end{array} \right.} \quad \mathcal{F}(1 \rightarrow 3) = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} -F_V \vec{u}_3 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

1 Cinématique du système

La vitesse de sortie de la tige du vérin est de 10 mm/s.

Q1 Déterminer le temps de fermeture du vantail en s'aidant du dessin à l'échelle du système. Les constructions utiles et quelques explications sont attendues.

2 Liaison glissière tige-corps

Q2 Donner la forme du torseur d'action transmissible par la liaison corps-tige.

3 Équilibre du vantail 1

Q3 Recenser les actions extérieures appliquées à 1 sous la forme de torseurs exprimés sous une forme simple.

Q4 Exprimer les éléments de réduction des torseurs des actions extérieures appliquées à 1 au point O .

Q5 Exploiter l'équation de moment en projection sur \vec{z} et en déduire l'expression de l'effort F dû à l'obstacle en fonction de l'effort de poussée du vérin F_V .

4 Exploitation de résultats

Pour une configuration donnée, on donne sur la figure 2 la courbe d'évolution de l'effort F en fonction de la position du vantail 1 lors de la fermeture pour un effort $F_V = 1000$ N.

Q6 Déterminer l'effort limite F_V pour le réglage du vérin tel qu'à aucun moment de la fermeture F ne dépasse 100 N. Préciser la position la plus dangereuse pour un obstacle.

Paramétrage géométrique :

$$\vec{OA} = a\vec{x} + b\vec{y} \quad \vec{OB} = c\vec{x}_1 - d\vec{y}_1 \quad \vec{OC} = q\vec{x}_1 \quad \vec{OG} = e\vec{x}_1 + h\vec{z}_1$$

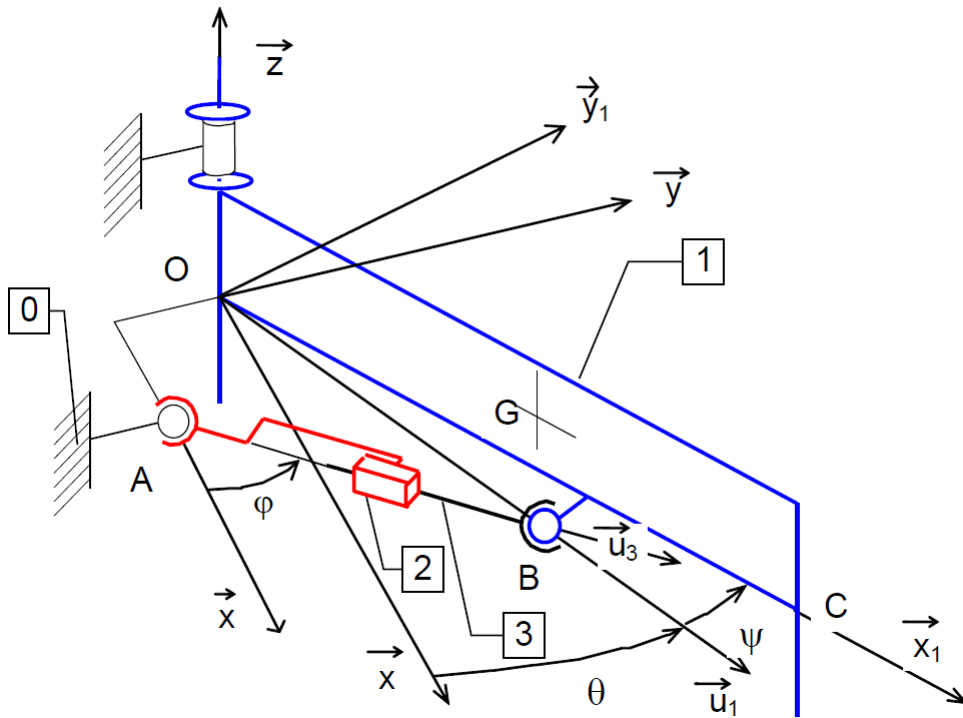


FIGURE 1 – Modélisation cinématique de l'ouvre-portail FAAC

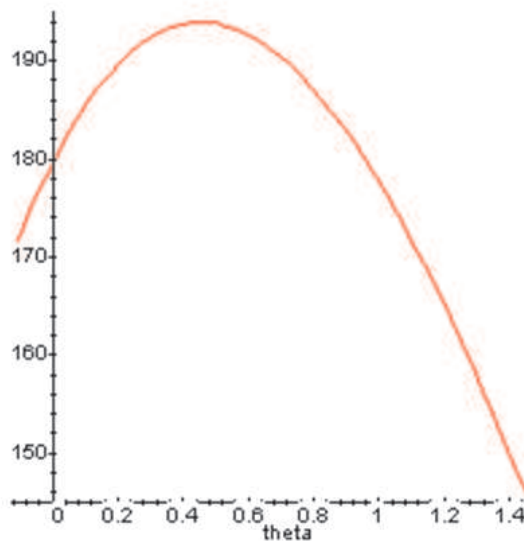


FIGURE 2 – Effort F sur obstacle lors de la fermeture pour $F_v = 1000$ N.

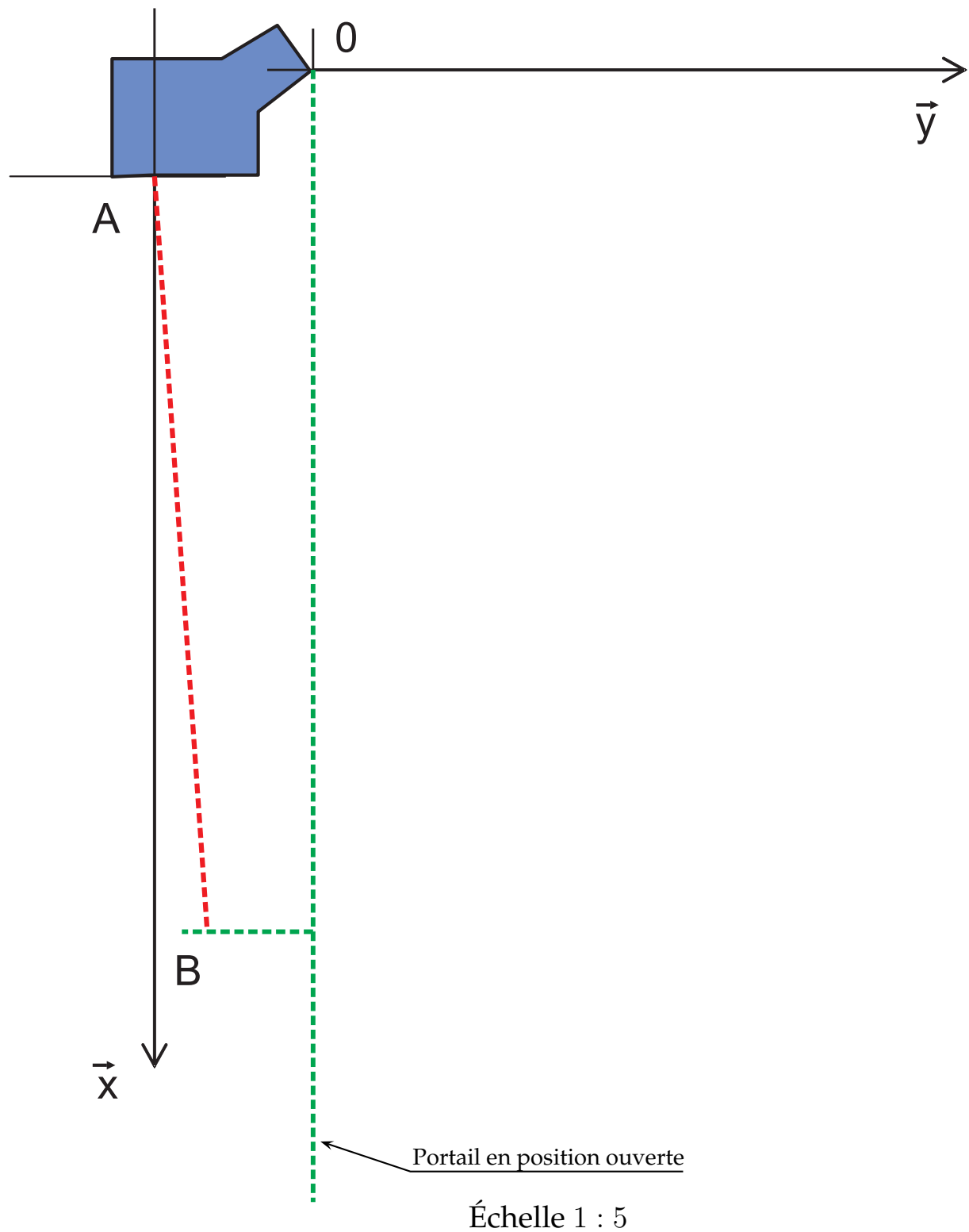


FIGURE 3 – Épure pour l'étude cinématique

STA_41 Une potence et un câble

exo-une-potence-un-cable-v1

Une potence est maintenue en position horizontale par un câble. Le dispositif étudié, schématisé sur la figure 1, est constitué de trois ensembles :

- Un bâti 1 auquel on associe le repère $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, avec \vec{z}_1 orientant la verticale ascendante du lieu. On pose $\vec{CA} = a\vec{y}_1 + c\vec{z}_1$.
- La potence est repérée 2, en liaison pivot d'axe (C, \vec{y}_1) avec le bâti. Elle est positionnée horizontalement, immobile par rapport au bâti. On pose $\vec{CB} = b\vec{x}_1$ et $\vec{CG} = d\vec{x}_1$.
- Un câble 3 sans masse, inextensible mais infiniment flexible, est accroché au point A du bâti et au point B de la potence.

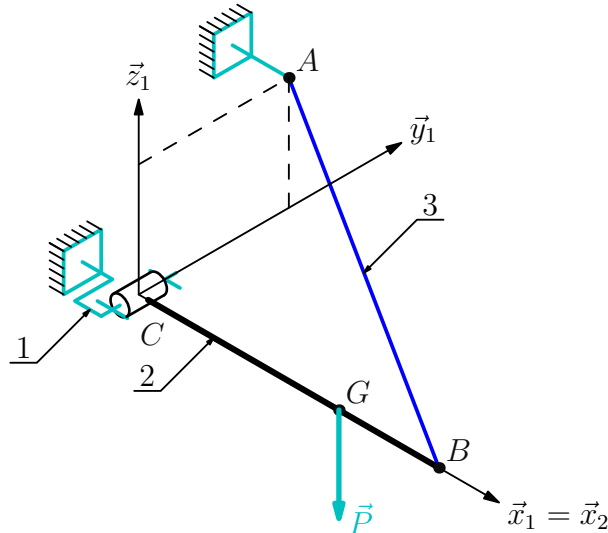


FIGURE 1 – Schéma d'implantation de la potence

Une action mécanique connue s'exerce sur la potence 2, modélisée par le glisseur

$$\mathcal{F}(e \rightarrow 2) = \begin{cases} -P\vec{z}_1, & \text{avec } P > 0 \\ \vec{0} \end{cases}_G$$

Q1 Déterminer la tension¹ du câble.

Q2 Déterminer le torseur des actions mécaniques transmissibles de la liaison pivot.

1. Un câble supposé sans masse et infiniment flexible ne peut être sollicité qu'en traction. Dès lors, le brin tendu est assimilable à une droite et l'action mécanique transmissible est modélisée par un glisseur d'axe central le brin tendu. On pose donc ici par exemple

$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = \begin{cases} k\vec{BA}, & \text{avec } k \geq 0 \\ \vec{0} \end{cases}_B$$

La tension est le module de la résultante du glisseur ainsi posé.

STA_42 Une potence et deux câbles

[t1-6.5]

pub-une-potence-deux-cables-v1

On s'intéresse aux différentes possibilités de mise en place pour deux câbles qui supportent une poutrelle. Le dispositif étudié, schématisé sur la figure 1, est constitué de quatre ensembles :

- le bâti est repéré 1 et on lui associe le repère $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, avec \vec{z}_1 orientant la verticale ascendante du lieu. On pose
 - $\vec{CB} = b\vec{x}_1 + d\vec{z}_1$
 - $\vec{CD} = c\vec{x}_1 + e\vec{z}_1$
- la poutrelle, repérée 2, est de masse m et de centre de masse G . Elle est supposée horizontale, immobile par rapport au bâti et on pose $\vec{CA} = a\vec{y}_1$. Elle est en liaison sphérique de centre C avec le bâti 1. La poutrelle est supposée homogène, on pose donc $\vec{CG} = \frac{1}{2}\vec{CA}$.
- un câble 3 sans masse, inextensible mais infiniment flexible, est accroché entre les points A et B .
- un câble 4 identique est accroché entre les points A et D .

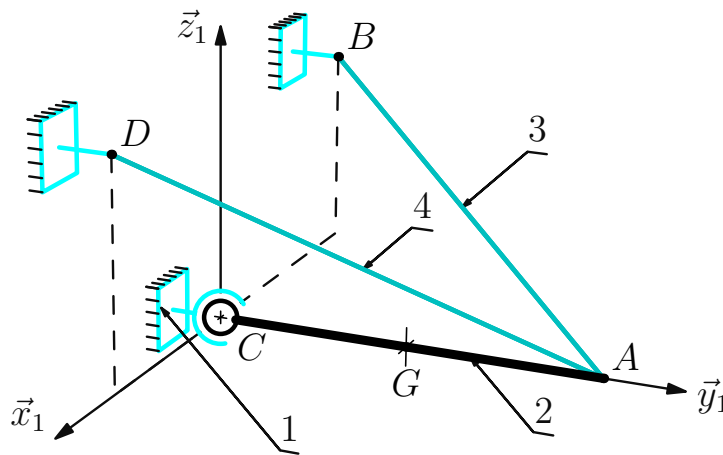


FIGURE 1 – Une poutrelle haubanée

- Q1** Tracer le graphe des liaisons.
- Q2** Détailler l'ensemble des actions mécaniques extérieures à poser pour l'étude de l'équilibre de la poutrelle 2 par rapport au bâti 1 supposé galiléen et dénombrer les inconnues scalaires de liaison.
- Q3** Déterminer les expressions des tensions dans les câbles 3 et 4 en fonction de la masse m de la poutrelle et des grandeurs géométriques posées.
- Q4** Quelles conditions a-t-on sur les coordonnées b, c, d et e des points B et D pour garantir l'équilibre.

STA_51 Étau hydraulique auto-centrant

[e-2.3]

pub-étai-hydraulique-v1

Un étau dont la fonction est de serrer des pièces cylindriques P entre des mors en vé est schématisé sur la figure 1. Il comprend :

- Un bâti 1, auquel on associe un repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. On pose $\vec{OC} = a\vec{x}_1$ et $\vec{OF} = h\vec{y}_1$.
- Deux vés, encastrés sur deux coulisseaux 3 et 4, chacun en liaison glissière de direction \vec{x}_1 avec le bâti.
- Un pignon 2 de rayon primitif R , guidé en rotation par une liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_1) avec le bâti. Ce pignon engrène avec deux crémaillères fixées respectivement sur les coulisseaux 3 et 4.

Les surfaces de contact entre un pignon et une crémaillère sont telles que le mouvement relatif des deux pièces reproduit le roulement sans glissement d'un cylindre de révolution fictif sur un plan fictif. Ce cylindre immatériel est appelé cylindre primitif, de rayon éponyme. Le plan est appelé plan primitif de la crémaillère. Tous les primitifs sont habituellement représentés à l'aide de traits mixtes fins.

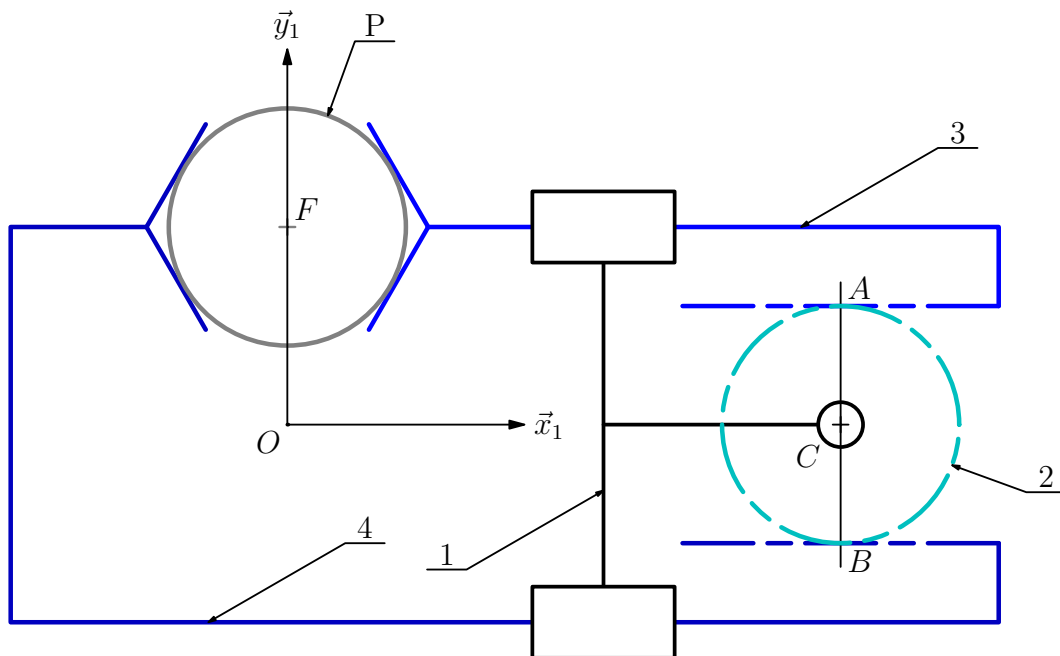


FIGURE 1 – Schéma de principe de l'étau auto-centrant

Un vérin V non représenté exerce sur le coulisseau 4 une action mécanique modélisée par

$$\mathcal{F}(v \rightarrow 4) = O \begin{Bmatrix} X\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Une fois la pièce à serrer en contact avec les mâchoires de l'étau, on pose comme actions mécaniques

$$\mathcal{F}(P \rightarrow 3) = F \begin{Bmatrix} +F\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(P \rightarrow 4) = F \begin{Bmatrix} -F\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

En phase de serrage, les actions mécaniques aux niveaux des engrènements sont modélisées par deux glisseurs

$$\mathcal{F}(2 \rightarrow 3) = A \begin{Bmatrix} F_{23}(-\cos \alpha \vec{x}_1 + \sin \alpha \vec{y}_1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(4 \rightarrow 2) = B \begin{Bmatrix} F_{42}(+\cos \alpha \vec{x}_1 + \sin \alpha \vec{y}_1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

L'angle α est un angle caractéristique associé à la denture, appelé angle de pression.

Les poids des différentes pièces sont négligeables devant les efforts issues du serrage.

Données numériques :

$$\alpha = 20^\circ \quad L = 65 \text{ mm} \quad h = 25 \text{ mm} \quad R = 15 \text{ mm} \quad F = 10^4 \text{ N}$$

- Q1 Élaborer un graphe des liaisons de ce mécanisme en l'absence de pièce à serrer.
- Q2 Dans quel sens le pignon 2 tourne-t-il par rapport au bâti 1 en phase de serrage ?
- Q3 Le serrage étant réalisé, proposer une stratégie pour trouver la relation $X = g(F)$.
- Q4 Déterminer les expressions des inconnues de liaison en se limitant aux inconnues associées au problème plan.
- Q5 Faire les applications numériques.

STA_61 Véhicule sur une route inclinée

On se propose dans cet exercice de déterminer l'angle maximum α que peut prendre l'inclinaison de la route en conservant le véhicule immobile.

exo-voiture-route-inclinee-v1

On considère le problème plan, avec tous les points définis dans le plan médian du véhicule :

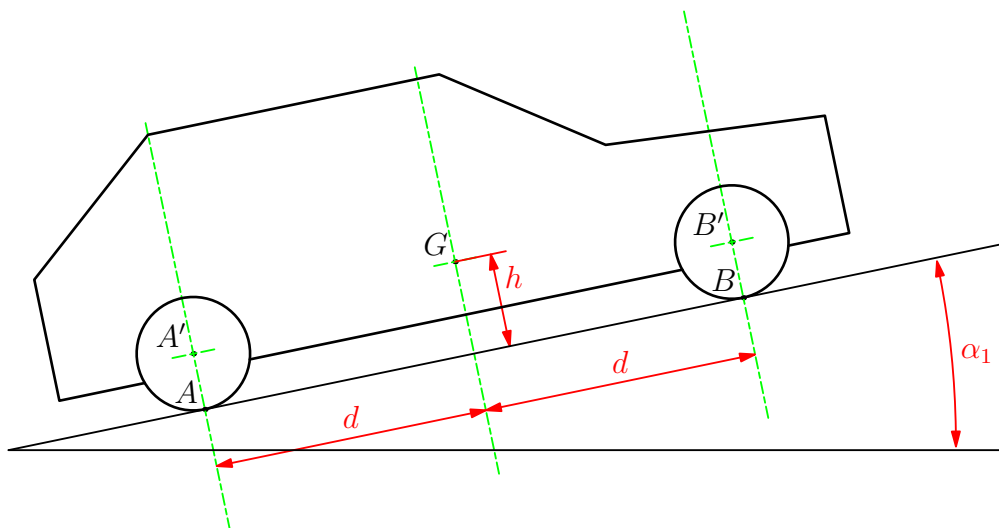
- Le point A est posé comme point de contact entre roues arrières et sol ;
- Le point A' est sur l'axe de rotation des deux roues arrières.
- Le point B est posé comme point de contact entre roues avant et sol ;
- Le point B' est sur l'axe de rotation des deux roues avant.
- Le centre de gravité G est à mi-distance d des roues et à une hauteur h au dessus du sol, avec $h = d/3$.

Le poids total est noté \vec{P} , associé au point G .

Le frottement des roues sur le sol est caractérisé par le coefficient $f = \tan \varphi = 0,6$.

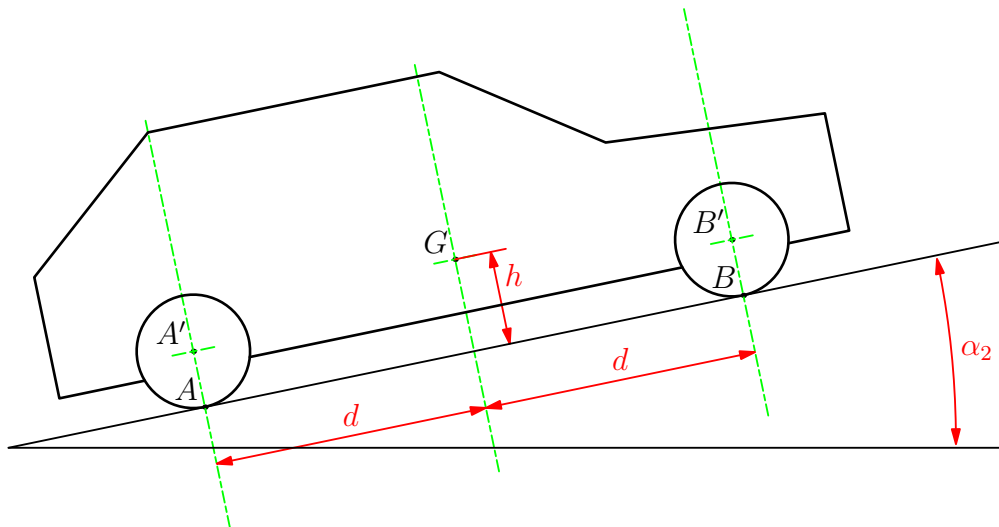
1 Roues arrières bloquées et roues avant libres en rotation

C'est l'exemple d'une voiture avec les roues motrices à l'avant, la boîte de vitesse au point mort et le frein à main serré.



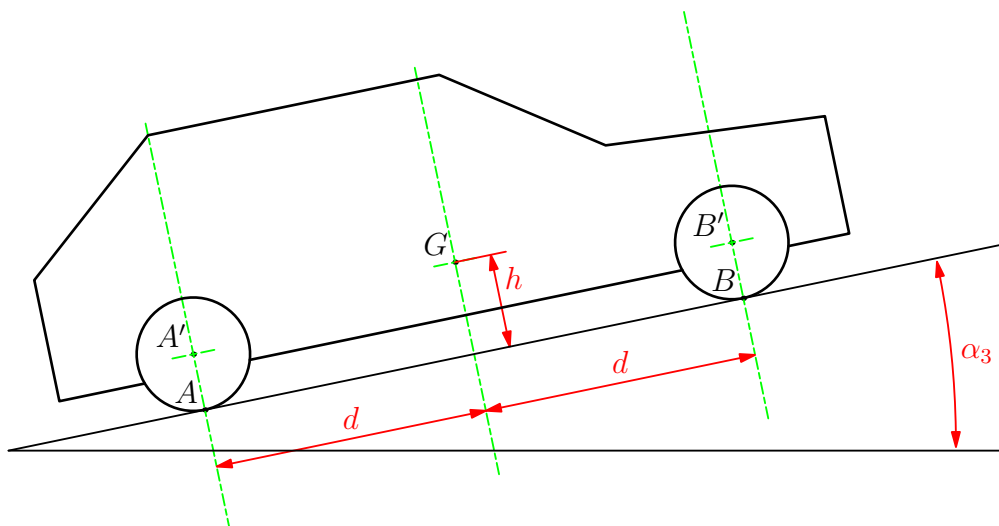
2 Roues avants bloquées et roues arrières libres en rotation

C'est l'exemple d'une voiture avec les roues motrices à l'avant, le moteur arrêté, une vitesse en prise et le frein à main desserré.



3 Roues avants et arrières bloquées

C'est l'exemple d'une voiture avec les roues motrices à l'avant, les freins serrés, ou alors le moteur arrêté avec une vitesse en prise et le frein à main serré.



STA_62 Coinceur à cames

[e2.9]

Dans cet exercice, on s'intéresse à quelques aspects des coinceurs à cames utilisés en escalade. Cet équipement, photographié figure 1, permet à un alpiniste de placer un point d'ancrage dans une fissure pour laquelle il est adapté.

pub-coinceur-a-cames-v1

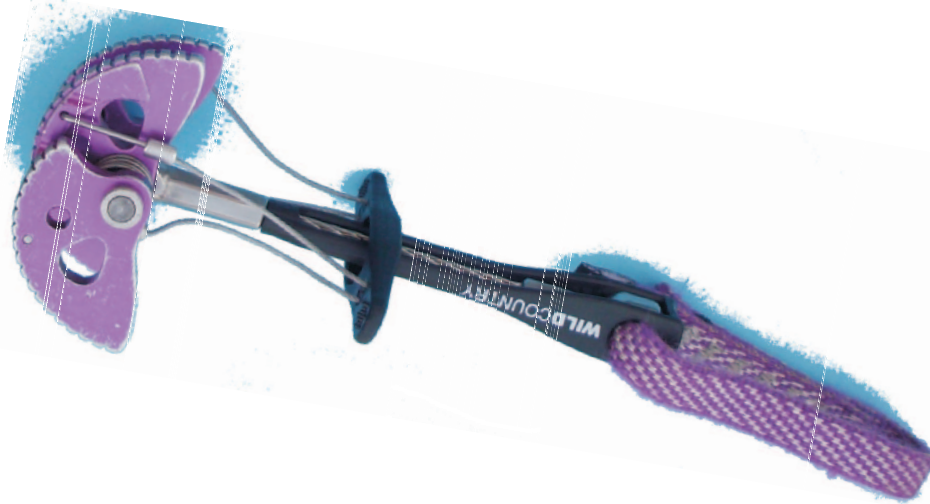


FIGURE 1 – Une photographie d'un coinceur à cames

Il est principalement constitué d'un axe sur lequel sont articulées des cames, d'une tige souple attachée à l'axe, d'une sangle qui termine la tige, de ressorts de torsion de câbles et d'une gâchette. Les ressorts tendent à faire tourner les cames par rapport à l'axe dans le sens de l'écartement des profils des cames, ce qui permet la mise en contact avec les parois de la fissure. La gâchette et les câbles, au contraire, permettent de rendre le coinceur moins encombrant et rendent ainsi possible la mise en place dans la fissure. La figure 2 présente trois positions différentes des cames faisant varier l'écartement.



FIGURE 2 – Trois positions différentes des cames

Le système est autobloquant : si les conditions de géométrie de la fissure, de frottement et de direction de la charge sont vérifiées, le coinceur reste en adhérence avec la paroi indépendamment de la valeur de la charge suspendue à la sangle. Les quatre cames sont à rotation indépendantes et permettent au coinceur de fonctionner avec stabilité pour des parois non strictement parallèles. Chaque modèle est conçu pour une charge nominale donnée ainsi qu'un intervalle pour la taille de la fissure.

Le modèle étudié est caractérisé pour une charge nominale de 14 kN et un intervalle pour la taille de la fissure de 43 mm à 66 mm.

Hypothèses pour l'étude

Le parallélisme entre les deux faces de la fissure, la position dans laquelle le coinqueur est mise en place, la direction de la charge par rapport à la fissure permettent de faire une modélisation plane du mécanisme, telle que proposée figure 3.

On considère donc une charge appliquée à l'ensemble 2 constitué de l'axe et de la sangle modélisée par un glisseur de résultante $-P\vec{y}_1$ de 14 kN de module, parallèle à la fissure et dont l'axe central passe par le point O.

Les cames 3 et 4 sont supposées en contact ponctuel avec la paroi 1, respectivement aux points A et B, et en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_1) avec l'axe 2.

La masse totale du coinqueur est de l'ordre de 150 g ; on négligera donc le poids des pièces ainsi que les actions de rappel des ressorts devant la charge P appliquée.

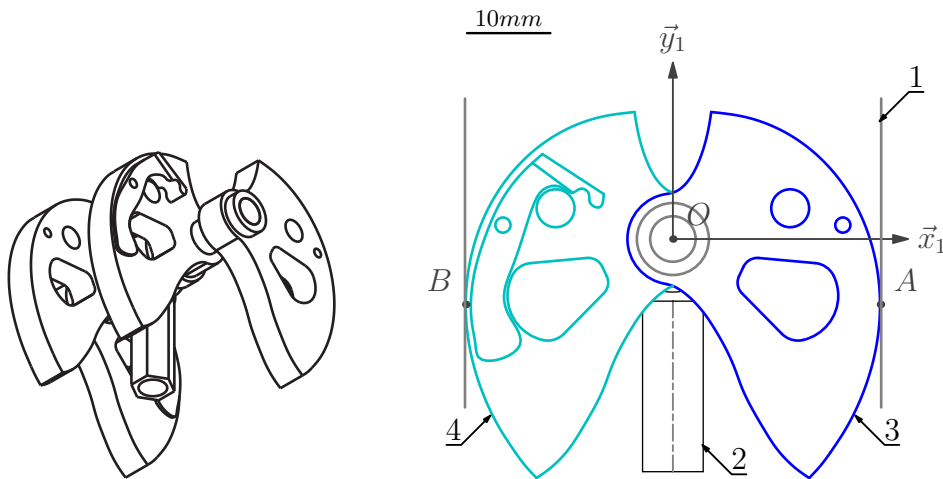


FIGURE 3 – Modélisation géométrique adoptée pour l'étude

Objectif de l'étude

Déterminer dans la position de la figure 3 l'angle de frottement minimum au contact paroi-came pour assurer le coincement.

- Q1 En supposant l'équilibre du coinqueur réalisé, déterminer l'action de la paroi 1 sur la came 3 en fonction de la charge P appliquée.
- Q2 En déduire l'angle minimum de frottement au contact paroi-came pour assurer le coincement.
- Q3 Pourquoi peut-on dire que ce système est autobloquant ?
- Q4 Quelle grandeur géométrique doit être surveillée pour que le système fonctionne pour des fissures variables sans que les efforts ne deviennent trop grands pour une même charge P ?

STA_63 Une calbasse accrochée au mur

Soit un bâti 0, auquel est attaché le repère direct $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Une demi-sphère 1 de centre A , de centre de masse G , de masse m et de rayon r est en contact parfait avec le plan $(O, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ du bâti au point B . Le repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est attaché au solide 1. On pose $\vec{AC} = r\vec{y}_1$, $\vec{AG} = kr\vec{x}_1$ et $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \alpha$.

Un câble 2, de masse négligeable, de longueur c , est attaché en O au bâti 0 et en C à la demi-sphère 1.

On pose $(\vec{x}_0, \vec{OC}) = \beta$.

exo-demi-sphere-v1

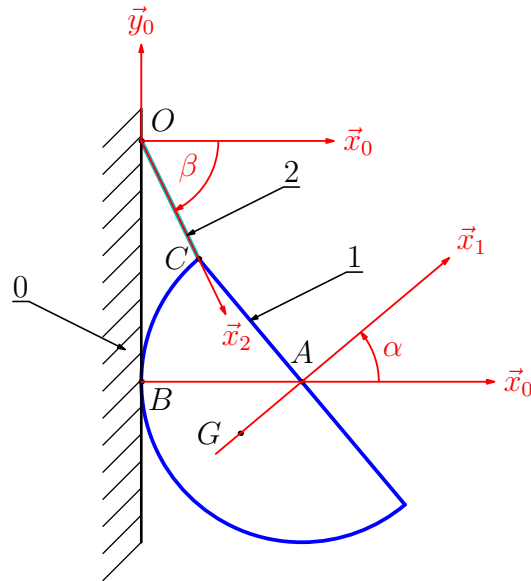


FIGURE 1 – Une calbasse accrochée à un mur

Le champ de pesanteur est caractérisé par $\vec{g} = -g\vec{y}_0$.

- Q1 Modéliser le contact en B .
- Q2 Déterminer une relation entre α et β .
- Q3 Le problème peut-il être traité comme un problème plan ?
- Q4 Modéliser la tension dans le câble 2.
- Q5 Déterminer toutes les actions mécaniques et une seconde relation entre α et β .
- Q6 Application numérique : Calculer α et β pour $c = r$ et $k = -3/8$.
- Q7 Que se passe-t-il si le contact en B se fait avec frottement ?

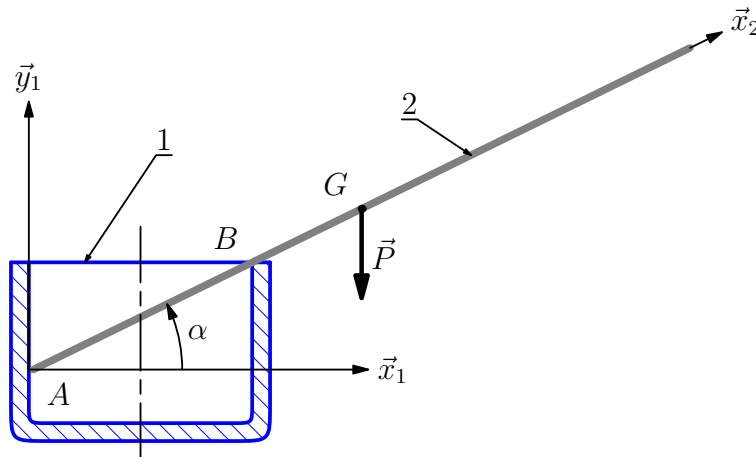
STA_64 Agitateur	[e-2.7]
-------------------------	---------

pub-agitateur-v1

Un agitateur 2 de dimensions transversales négligeables devant sa longueur $2a$ repose en A et B dans un tube cylindrique 1, d'axe vertical et de diamètre intérieur d :

- le repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est attaché au tube ;
- le repère $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est attaché à la tige 2 ; il est choisi tel que $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$;
- on pose $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, $\overrightarrow{AG} = a\vec{x}_2$, le point G étant le centre de masse de la tige, et m la valeur de celle-ci.

Soit $\vec{P} = -P\vec{y}_1$ le poids de 2.



Expérimentation

- Q1** Par de simples constatations expérimentales, émettre un avis sur la possibilité d'équilibre stable de la tige 2 par rapport au tube 1, bien entendu sans en toucher le fond.

Modélisation

- Q2** L'équilibre de la tige 2 par rapport au tube 1 est-il possible en l'absence de frottement ?
- Q3** Dans le cas où un équilibre est possible, déterminer la relation liant la demi-longueur a de la tige, le diamètre d du tube et l'angle α .

Le coefficient de frottement d'adhérence correspondant au couple de matériaux est supposé connu et est noté f .

- Q4** Comment se généralise l'étude précédente ?
- Q5** Tracer les vecteurs « vitesse de glissement » éventuels en A et en B à la limite de l'équilibre, puis comparer les résultats théoriques et les constatations expérimentales.