Sciences industrielles

CPGE 2nd année

Théorie des mécanismes

Sommaire

(1) le mot mécanisme est synonyme du mot transmetteur.

Les mécanismes[1] transmettent et adaptent une énergie mécanique en une autre énergie mécanique. Pour les concevoirs, on peut mener deux approches :

- Une approche technologique, pour l'art du choix et de l'assemblage des composants ;
- Une approche mécanique, pour les outils et les méthodes de calcul à appliquer sur les modèles associés.

La **théorie des mécanismes** est l'étude des **architectures** des mécanismes.

Cette théorie relève de l'approche mécanique. Elle s'appuie sur la théorie des graphes, et sur les techniques de résolutions des systèmes d'équations linéaires. L'objectif est de :

- Mettre en équation le problème ;
- Evaluer les possibilités de résolution ;
- Automatiser la recherche d'influence de chacun des paramètres ;
- Comparer des solutions technologiques ;
- Evaluer la montabilité et la robustesse d'une architecture.

1 Liaison équivalente

Une **liaison équivalente** correspond à la liaison qui modélise le même comportement que l'association des liaisons en série ou en parallèle qu'elle remplace.

1.1 Liaisons en série

Pour des liaisons en série :

- la liaison équivalente peut réaliser la somme des mouvements des liaisons qui la composent[2].
- la liaison équivalente ne peut transmettre un effort que si toutes les liaisons qui la composent le peuvent.

(2) En effet dans un bras robotisé anthropomorphe, le mouvement total est la somme des mouvements élémentaires.

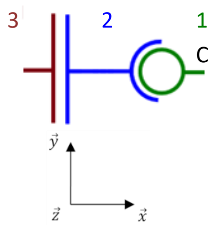
Approche cinématique : La liaison équivalente entre des liaisons en **série** est la somme des torseurs cinématique. $\vec{V}_{2/0\ eq} = \vec{V}_{2/1} + \vec{V}_{1/0}$

Approche statique : On peut aussi égaler les torseurs des actions mécaniques.

$$\vec{M}_{2\to0\ eq} = \vec{M}_{2\to1} = \vec{M}_{1\to0}$$ [3]

(3) Torseur des actions mécaniques transmissibles, voir tableau des liaisons.

Exemple : déterminer la liaison équivalente d'une liaison sphérique et d'une liaison plane en série



On écrit une composition des mouvements.

$$\vec{V}_{3/1\ eq} = \vec{V}_{3/2} + \vec{V}_{2/1}$$

$$= \blacksquare_C \begin{Bmatrix} \omega_{x,3/2}\vec{x} \\ V_{y,3/2}\vec{y} + V_{z,3/2}\vec{z} \end{Bmatrix} + \blacksquare_C \begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1}\vec{x} + \omega_{y,2/1}\vec{y} + \omega_{z,21}\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$= \blacksquare_C \begin{Bmatrix} (\omega_{x,3/2} + \omega_{x,2/1})\vec{x} + \omega_{y,2/1}\vec{y} + \omega_{z,2/1}\vec{z} \\ V_{y,3/2}\vec{y} + V_{z,3/2}\vec{z} \end{Bmatrix}$$

C'est une liaison sphère-plan de centre C et de normale $\vec{x}$.

1.2 Liaisons en parallèle

Pour des liaisons en parallèle :

- la liaison équivalente ne peut réaliser un mouvement que si toutes les liaisons qui la composent le peuvent.
- la liaison équivalente peut transmettre la somme des efforts transmissibles des liaisons qui la composent.

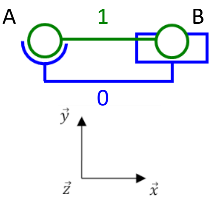
Approche statique : La liaison équivalente entre des liaisons en **parallèle** est la somme des torseurs des actions mécaniques.

$$\vec{M}_{2\to0\ eq} = \vec{M}_{2\to1} + \vec{M}_{1\to0}$$

Approche cinématique : On peut aussi égaler les torseurs cinématiques.

$$\vec{V}_{2/0\ eq} = \vec{V}_{2/1} = \vec{V}_{1/0}$$

Exemple : déterminer la liaison équivalente d'une liaison sphérique et une liaison sphère-cylindre en parallèle.



$$\mathbb{V}_{1/0}^{A} = \underset{A}{\blacksquare}\begin{Bmatrix} \omega_{x,1/0}^{A}\vec{x} + \omega_{y,1/0}^{A}\vec{y} + \omega_{z,1/0}^{A}\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$= \underset{B}{\blacksquare}\begin{Bmatrix} \omega_{x,1/0}^{A}\vec{x} + \omega_{y,1/0}^{A}\vec{y} + \omega_{z,1/0}^{A}\vec{z} \\ \mathrm{BA}\vec{x} \wedge \left(\omega_{x,1/0}^{A}\vec{x} + \omega_{y,1/0}^{A}\vec{y} + \omega_{z,1/0}^{A}\vec{z}\right) \end{Bmatrix}$$

$$= \underset{B}{\blacksquare}\begin{Bmatrix} \omega_{x,1/0}^{A}\vec{x} + \omega_{y,1/0}^{A}\vec{y} + \omega_{z,1/0}^{A}\vec{z} \\ \mathrm{BA}\omega_{y,1/0}^{A}\vec{z} - \mathrm{BA}\omega_{z,1/0}^{A}\vec{y} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbb{V}_{1/0}^{B} = \underset{B}{\blacksquare}\begin{Bmatrix} \omega_{x,1/0}^{B}\vec{x} + \omega_{y,1/0}^{B}\vec{y} + \omega_{z,1/0}^{B}\vec{z} \\ V_{x,1/0}^{B}\vec{x} \end{Bmatrix}$$

On écrit une fermeture cinématique.

$$\mathbb{V}_{1/0}^{A} + \mathbb{V}_{0/1}^{B} = 0 \Rightarrow \mathbb{V}_{1/0}^{eq} = \mathbb{V}_{1/0}^{A} = \mathbb{V}_{1/0}^{B} = \underset{B}{\blacksquare}\begin{Bmatrix} \omega_{x,1/0}^{B}\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

C'est une liaison pivot d'axe $(A, \vec{x})$.

2 Paramétrage

2.1 Poser les variables

On appelle **paramètres du mouvement, ou variables** les grandeurs variables : λ, x, y, z, r…
On appelle **paramètres caractéristiques, ou invariants** les grandeurs constantes : a, b, c, d, e, R, L, l…

2.2 Mobilité et degré de liberté

On appelle **mobilité** (m) la différentielle d'un paramètre de mise en position.

Un mouvement possible n'est pas un mouvement effectif, par exemple, un mouvement peut être autorisé entre deux Classes d'Equivalences Cinématiques (CEC) mais bloqué dans une chaîne fermée.

On ne cherche pas à évaluer la variation effective d'un paramètre, mais sa capacité à évoluer.

On appelle **degré de liberté** (ddl) une mobilité non nulle.

C'est ainsi que par rapport à un repère :
- Un solide possède 6 mobilités ;
- Un solide possède au plus 6 ddl.

3 Approche cinématique

Soit un graphe des liaisons connu pour un mécanisme donné, ou proposé pour un mécanisme à concevoir. On note :

N_P le nombre de sommets du graphe ;

N_L le nombre d'arcs du graphe[1].

(1) N_P fait référence à nombre de pièces, N_L à nombre de liaisons.

3.1 Nombre de cycles indépendants

La théorie des mécanismes concerne l'étude des chaînes fermées. On cherche donc à les dénombrer.

On appelle **nombre de cycles μ**, ou **nombre cyclomatique**, le nombre de chaînes fermées indépendantes à parcourir pour décrire un graphe des liaisons.

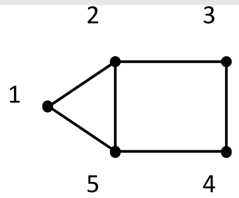
$$\boxed{\mu = 1 + N_L - N_P}$$

		Nombre de sommets		
		1	2	3
Nombre d'arcs	0	$\mu = 0$		
	1		$\mu = 0$	
	2		$\mu = 1$	$\mu = 0$
	3		$\mu = 2$	$\mu = 1$

Ajouter un arc augmente μ de 1.

Ajouter un arc et un sommet ne change pas μ.

Exemple : Calculer le nombre de cycles du graphe suivant



$\mu = 1 + N_L - N_P = 1 + 6 - 5 = 2$

3.2 Nombre d'équations

Chaque fermetures cinématique donne 6 équations scalaires.

Exemple :

Dans l'exemple ci-dessus, il y a par exemple la chaîne 1-2-5-1 et la chaîne 2-3-4-5-2.

Et donc $\vec{V}_{1/2} + \vec{V}_{2/5} + \vec{V}_{5/1} = \vec{0}$ et $\vec{V}_{2/3} + \vec{V}_{3/4} + \vec{V}_{4/5} + \vec{V}_{5/2} = \vec{0}$

Le nombre d'**équations cinématiques E_c** est :

$$\boxed{E_c = 6\mu}$$

3.3 Nombre d'inconnues

(1) changer une liaison modifie donc le décompte.

Le nombre d'**inconnues cinématiques I_c** est la somme des ddl des liaisons(1).

3.4 Indice de mobilité

On doit résoudre un système d'équations linéaires homogènes de E_c équations et de I_c inconnues que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$E_c\ lignes \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}}_{I_c\ colonnes} \right. \begin{pmatrix} I_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) le mot indice, est à entendre au sens de détective, il donne une indication sur la mobilité.

On appelle **indice de mobilité**(2) l'entier relatif $I_c - E_c$, différence entre le nombre d'inconnues cinématiques et le nombre d'équations cinématiques.

Si $I_c > E_c$ alors l'indice de mobilité donne le nombre d'inconnues qu'il faut basculer dans le second membre (c'est-à-dire fixer) pour pouvoir résoudre.

3.5 Degré de mobilité

(1) par exemple une équation 0 = 0 n'est pas significative

On pose r_c le rang du système. Le rang désigne le nombre d'équations indépendantes. C'est également le nombre d'équation significative[1]. Le rang r_c permet de distinguer les inconnues principales (qui peuvent être motorisées) et les inconnues secondaires.

$$E_c\ lignes \left\{ \underbrace{\left(\underbrace{\boxed{}}_{r_c} \quad \underbrace{}_{m} \right)}_{I_c\ colonnes} \right. \begin{pmatrix} I_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $r_c = I_c$ la seule solution est la nullité de toutes les inconnues, donc de tous les paramètres cinématiques. Il n'y a alors aucun mouvement possible et le mécanisme est rigide.

On appelle loi entrée-sortie d'un mécanisme toutes relation entre des inconnues cinématiques principales. Un mécanisme admet au plus r_c lois entrée-sortie.

(2) car mathématiquement, on a obligatoirement :

$r_c \leq min(I_c, E_c) \leq I_c$

(3) on distingue parfois

$m = m_u - m_i$

avec m_u les mobilités utiles, qui participent à la loi entrée-sortie.

m_i les mobilités internes, qui ne participent pas à loi entrée-sortie.

Mais ce vocabulaire est très mal choisi. Interne s'oppose à externe, utile s'oppose à inutile. Or en pratique, toutes les mobilités sont internes et utiles.

> On appelle **degré de mobilité m** d'un mécanisme le nombre, entier naturel, de mouvements indépendants possibles.
>
> $$m = I_c - r_c \geq 0 \ ^{(2)(3)}$$
>
> Le degré de mobilité représente les paramètres du mouvement qu'il faut fixer pour que le mécanisme ne bouge plus.

3.6 Degré de statisme

(4) Les chaînes ouvertes sont évidemment isostatiques, on ne s'intéresse dans ce chapitre qu'aux chaines fermées.

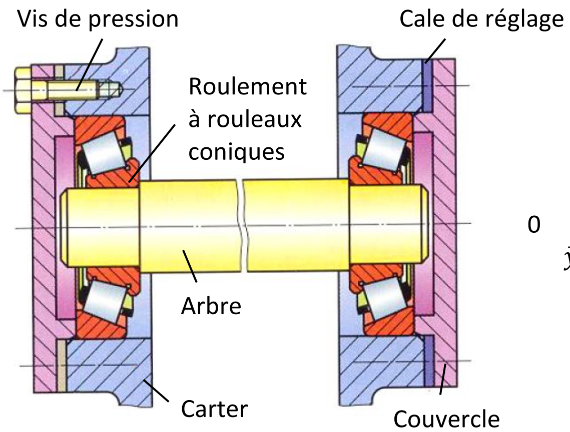
Certaines équations ne servent pas à la résolution.

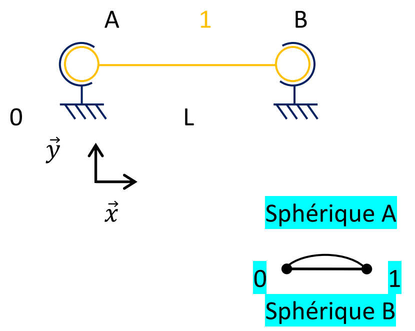
> On appelle **degré de statisme** ou **degré d'hyperstatisme h** d'un mécanisme le nombre, entier naturel :
>
> $$h = E_c - r_c$$
>
> Si $h = 0$ alors le mécanisme est dit **isostatique**[4].
>
> Si $h > 0$ alors le mécanisme est dit **hyperstatique** de degré h.
>
> Le degré de statisme h représente le nombre de ddl manquant pour garantir un **montage** du mécanisme **sans contraintes**.
>
> Il exprime le nombre d'équations ne servant pas à la résolution.

$$E_c\ lignes \left\{ \underbrace{\left(\begin{matrix} \underbrace{\boxed{}}_{r_c} \quad \underbrace{}_{m} \\ \}\, h \end{matrix} \right)}_{I_c\ colonnes} \right. \begin{pmatrix} I_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple :

On considère le guidage d'un arbre 1 monté avec deux roulements par rapport à un alésage 0. Déterminer le degré de mobilité et de statisme.





L'indice de mobilité est $I_c - E_c = (3+3) - 6.1 = 0$

On pose les torseurs cinématiques :

$$\mathcal{V}^A_{1/0} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}^A_{1/0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega^A_{x,1/0}\vec{x} + \omega^A_{y,1/0}\vec{y} + \omega^A_{z,1/0}\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{V}^B_{1/0} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}^B_{1/0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} \omega^B_{x,1/0}\vec{x} + \omega^B_{y,1/0}\vec{y} + \omega^B_{z,1/0}\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega^B_{x,1/0}\vec{x} + \omega^B_{y,1/0}\vec{y} + \omega^B_{z,1/0}\vec{z} \\ -L\omega^B_{z,1/0}\vec{y} + L\omega^B_{y,1/0}\vec{z} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{V}^B_{1/0}(A) = \vec{V}^B_{1/0}(B) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}^B_{1/0} = L\vec{x}_1 \wedge \left(\omega^B_{x,1/0}\vec{x} + \omega^B_{y,1/0}\vec{y} + \omega^B_{z,1/0}\vec{z}\right) = -L\omega^B_{z,1/0}\vec{y} + L\omega^B_{y,1/0}\vec{z}$$

$$\mathcal{V}^A_{1/0} - \mathcal{V}^B_{1/0} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega^A_{x,1/0} - \omega^B_{x,1/0} = 0 \\ \omega^A_{y,1/0} - \omega^B_{y,1/0} = 0 \\ \omega^A_{z,1/0} - \omega^B_{z,1/0} = 0 \\ 0 = 0 \\ -L\omega^B_{z,1/0} = 0 \\ L\omega^B_{y,1/0} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega^A_{x,1/0} \\ \omega^A_{y,1/0} \\ \omega^A_{z,1/0} \\ \omega^B_{x,1/0} \\ \omega^B_{y,1/0} \\ \omega^B_{z,1/0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_c \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ h\ \{\ \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{r_c} & \underbrace{0}_{m} \end{pmatrix}}_{I_c} \right. \cdot \begin{pmatrix} \omega^A_{x,1/0} \\ \omega^A_{y,1/0} \\ \omega^A_{z,1/0} \\ \omega^B_{y,1/0} \\ \omega^B_{z,1/0} \\ \omega^B_{x,1/0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega^A_{x,1/0} = \omega^B_{x,1/0} \\ \omega^A_{y,1/0} = 0 \\ \omega^A_{z,1/0} = 0 \\ \omega^B_{y,1/0} = 0 \\ \omega^B_{z,1/0} = 0 \end{cases}$$

On a un système de 5 équations et 6 inconnues.

Le rang $r_c = 5$

(1) on peut aussi voir la mobilité directement sur le schéma cinématique.

La mobilité[1] $m = 1$ avec $\omega^A_{x,1/0}$ ou $\omega^B_{x,1/0}$ inconnue principale, et donc motorisable. Il n'y a plus qu'une rotation possible.

Calcul :

Le degré de statisme est $h = E_c - r_c = 6 - 5 = 1$ avec une équation de la forme $0 = 0$ pour les vitesses en A selon $\vec{x}$. Le système est donc hyperstatique de degré 1.

Interprétation :

On peut expliquer cet hyperstatisme par une contrainte géométrique de longueur selon $\vec{x}$. En effet, si on imagine que la pièce 1 est mal usiné, alors le mécanisme devient immontable.

Remédiation :

On peut pallier ce problème en ajoutant des cales de réglages.

3.7 Interpétation et remédiation

(1) la géométrie est l'étude des longueurs et des angles.

(1) Par exemple :

Un entraxe correspond à 1 distance.
Un parallélisme à 2 angles.
Une coaxialité à 2 distances et 2 angles.

Les **contraintes géométriques**(1)(2) peuvent être des **distances** ou des **angles**.

Les **remédiations** du constructeur lors de la conception peuvent être de différentes natures :

- Présence de jeux dans un guidage pour changer une liaison ;
- Introduction d'un solide intermédiaire pour changer une liaison ;
- Accouplements mécaniques (joint de Oldham, joint de Cardan…) ;
- Cale de réglage ;
- Cotations géométriques fines et couteuses.

4 Approche dynamique

Cette partie détaille une seconde approche de la théorie des mécanismes qui conduit au même résultat que précédemment.

Soit un graphe des liaisons connu pour un mécanisme donné, ou proposé pour un mécanisme à concevoir. On note :

(2) N_P fait référence à nombre de pièces, N_L à nombre de liaisons.

N_P le nombre de sommets du graphe ;

N_L le nombre d'arcs du graphe(2).

4.1 Nombre d'équations

Chaque isolement d'une CEC donne 6 équations scalaires.

On étudie les $N_P - 1$ mouvements par rapport à un repère.

Le nombre d'**équations statiques $\boldsymbol{E_s}$** est :

$$\boxed{E_s = 6(N_P - 1)}$$

4.2 Nombre d'inconnues

(3) changer une liaison modifie donc le décompte.

Le nombre d'**inconnues statiques $\boldsymbol{I_s}$** est la somme des AM transmissibles par les liaisons parfaites(3).

4.3 Indice de mobilité

On doit résoudre un système d'équations linéaires homogènes de E_s équations et de I_s inconnues que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$E_s\ lignes \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}}_{I_s\ colonnes} \right. \begin{pmatrix} I_s \\ \\ \end{pmatrix} = (Second\ membre)$$

Le second membre comprend les AM extérieures autre que les composantes de liaison et les composantes dynamiques éventuelles.

Par dualité des torseurs cinématiques et des AM :

$$I_c + I_s = 6N_L$$

L'indice de mobilité est :

$$I_c - E_c = 6N_L - I_s - 6\mu = 6N_L - I_s - 6(1 + N_L - N_P) = -I_s - 6(1 - N_P) = E_s - I_s$$

4.4 Degré de statisme

On pose r_s le rang du système.

(1) ce second membre se compose d'actions mécanique externes ou internes.

$$E_s\ lignes\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}\underbrace{\boxed{}}_{r_s} & \underbrace{}_{h}\end{pmatrix}}_{I_s\ colonnes}\right.\begin{pmatrix}I_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Second\ membre^{(1)}\end{pmatrix}$$

Si $r_s = I_s$ la seule solution est la nullité de toutes les inconnues, donc de tous les AM des liaisons.

(2) Adjectif : isostatique, hyperstatique.

Substantif : isostatisme, hyperstatisme.

Un mécanisme est dit **isostatique** si, en l'absence de sollicitations extérieures, toutes les AM des liaisons parfaites sont nulles.

Un mécanisme est dit **hyperstatique** si, en l'absence de sollicitations extérieures, il existe des AM des liaisons parfaites non-nulles(2).

(3) car mathématiquement, on a obligatoirement :

$r_s \leq min(I_s, E_s) \leq I_s$

On appelle **degré de statisme** ou **degré d'hyperstatisme h** d'un mécanisme le nombre, entier naturel :

$$h = I_s - r_s \geq 0 \ ^{(3)}$$

Si $h = 0$ alors le mécanisme est dit **isostatique**.

Si $h > 0$ alors le mécanisme est dit **hyperstatique** de degré h.

Le degré de statisme h représente le nombre d'inconnues principales du système ne comportant que les AM des liaisons parfaites.

C'est aussi le nombre d'inconnues ne pouvant pas être déterminées à l'aide de la statique ou de la dynamique.

(4) Il faut utiliser le cours sur la Résistance Des Matériaux (RDM) qui est hors programme.

4.5 Degré de mobilité

Dans l'approche dynamique, le degré de mobilité correspond au nombre d'équations superflues pour déterminer les inconnues de liaisons.

$$E_s\ lignes\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}\underbrace{\boxed{}}_{r_s} & \underbrace{}_{h}\\ \}\,m & \end{pmatrix}}_{I_s\ colonnes}\right.\begin{pmatrix}I_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Second\ membre\end{pmatrix}$$

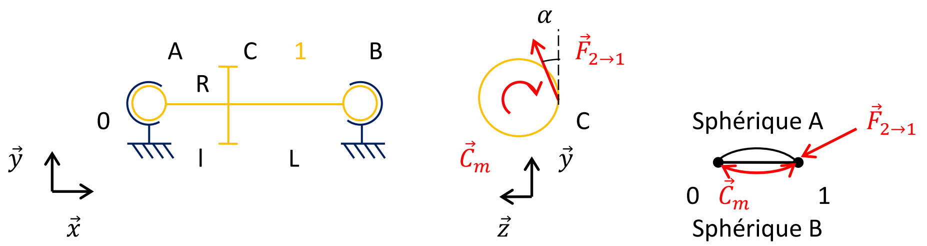
Avec $m = E_s - r_s$.

Là où n'apparait aucune inconnue de liaison apparaît une possibilité de mouvement.

Les équations inutiles ne sont pas forcément de la forme $0 = 0$ car le second membre peut être non nul.

Exemple :

On reprend l'exercice précédent mais on ajoute un pignon à l'arbre et un couple moteur. On souhaite connaître les valeurs des composantes d'actions mécaniques de liaison en fonction des sollicitations extérieures.



L'indice de mobilité est $E_s - I_s = 6(N_P - 1) - I_s = 6(2-1) - 6 = 0$

On pose les torseurs des AM :

$$\vec{M}^A_{0\to1} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{R}^A_{0\to1}\\ \vec{0}\end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix}X^A_{0\to1}\vec{x} + Y^A_{0\to1}\vec{y} + Z^A_{0\to1}\vec{z}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

$$\vec{M}^B_{0\to1} = {}_B\begin{Bmatrix}\vec{R}^B_{0\to1}\\ \vec{0}\end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix}X^B_{0\to1}\vec{x} + Y^B_{0\to1}\vec{y} + Z^B_{0\to1}\vec{z}\\ \vec{0}\end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix}X^B_{0\to1}\vec{x} + Y^B_{0\to1}\vec{y} + Z^B_{0\to1}\vec{z}\\ -LZ^B_{0\to1}\vec{y} + LY^B_{0\to1}\vec{z}\end{Bmatrix}$$

$$\vec{M}_{1/0}^{B}(A) = \vec{M}_{1/0}^{B}(B) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_{1/0}^{B} = L\vec{x} \wedge (X_{0\to1}^{B}\vec{x} + Y_{0\to1}^{B}\vec{y} + Z_{0\to1}^{B}\vec{z}) = -LZ_{0\to1}^{B}\vec{y} + LY_{0\to1}^{B}\vec{z}$$

$$\vec{M}_{2\to1} = {}_{C}\begin{cases} F_{2\to1}\cos\alpha\,\vec{y} + F_{2\to1}\sin\alpha\,\vec{z} \\ \vec{0} \end{cases} = {}_{A}\begin{cases} F_{2\to1}\cos\alpha\,\vec{y} + F_{2\to1}\sin\alpha\,\vec{z} \\ RF_{2\to1}\sin\alpha\,\vec{x} - lF_{2\to1}\sin\alpha\,\vec{y} + lF_{2\to1}\cos\alpha\,\vec{z} \end{cases}$$

$$\vec{M}_{2\to1}(A) = \vec{M}_{2\to1}(C) + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}_{2\to1} = (l\vec{x} + R\vec{y}) \wedge (F_{2\to1}\cos\alpha\,\vec{y} + F_{2\to1}\sin\alpha\,\vec{z})$$
$$= RF_{2\to1}\sin\alpha\,\vec{x} - lF_{2\to1}\sin\alpha\,\vec{y} + lF_{2\to1}\cos\alpha\,\vec{z}$$

$$\vec{M}_{2\to1} = {}_{A}\begin{cases} \vec{0} \\ -C_m\vec{x} \end{cases}$$

Le théorème de l'équilibre (TE) en A donne :

$$\vec{M}_{0\to1}^{A} + \vec{M}_{0\to1}^{B} + \vec{M}_{2\to1} + \vec{M}_{0\to1}^{mot} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} X_{0\to1}^{A} + X_{0\to1}^{B} = 0 \\ Y_{0\to1}^{A} + Y_{0\to1}^{B} = -F_{2\to1}\cos\alpha \\ Z_{0\to1}^{A} + Z_{0\to1}^{B} = -F_{2\to1}\sin\alpha \\ 0 = C_m - RF_{2\to1}\sin\alpha \\ -LZ_{0\to1}^{B} = lF_{2\to1}\sin\alpha \\ LY_{0\to1}^{B} = -lF_{2\to1}\cos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{0\to1}^{A} \\ Y_{0\to1}^{A} \\ Z_{0\to1}^{A} \\ X_{0\to1}^{B} \\ Y_{0\to1}^{B} \\ Z_{0\to1}^{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_{2\to1}\cos\alpha \\ -F_{2\to1}\sin\alpha \\ C_m - RF_{2\to1}\sin\alpha \\ lF_{2\to1}\sin\alpha \\ -lF_{2\to1}\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_s \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ m\ \{\ \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{r_s} & \underbrace{0}_{h} \end{pmatrix}}_{I_s} \cdot \begin{pmatrix} X_{0\to1}^{A} \\ Y_{0\to1}^{A} \\ Z_{0\to1}^{A} \\ Y_{0\to1}^{B} \\ Z_{0\to1}^{B} \\ X_{0\to1}^{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_{2\to1}\cos\alpha \\ -F_{2\to1}\sin\alpha \\ lF_{2\to1}\sin\alpha \\ -lF_{2\to1}\cos\alpha \\ C_m - RF_{2\to1}\sin\alpha \end{pmatrix} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_{0\to1}^{A} = -X_{0\to1}^{B} \\ Y_{0\to1}^{A} = \dfrac{l-L}{L}F_{2\to1}\cos\alpha \\ Z_{0\to1}^{A} = \dfrac{l-L}{L}F_{2\to1}\sin\alpha \\ Y_{0\to1}^{B} = -\dfrac{l}{L}F_{2\to1}\cos\alpha \\ Z_{0\to1}^{B} = -\dfrac{l}{L}F_{2\to1}\sin\alpha \\ C_m = RF_{2\to1}\sin\alpha \end{cases}$$

On a un système de 6 équations et 8 inconnues.

Le rang du système homogène $r_s = 5$ Le rang du système non-homogène $r_s = 6$

On peut donc exprimer 6 inconnues en fonctions de 2 inconnues principales, par exemple $X_{0\to1}^{B}$ et $F_{2\to1}$. Il y a 5 équations et une loi entrée-sortie. Celle-ci aurait pu être obtenue directement.

La mobilité $m = 1$ avec une équation de la forme $0 = 0$ pour les moments en A selon $\vec{x}$.

<u>Calcul :</u>

Le degré de statisme est $h = I_s - r_s = (3+3) - 5 = 1$ avec $X_{0\to1}^{A}$ ou $X_{0\to1}^{B}$ inconnue principale. Le système est donc hyperstatique de degré 1.

<u>Interprétation :</u>

Idem

<u>Remédiation :</u>

Idem

5 Approche globale

On a donc démontré pour une approche cinématique :

$$\begin{cases} m = I_c - r_c \\ h = E_c - r_c \end{cases}$$

Pour une approche dynamique :

$$\begin{cases} m = E_s - r_s \\ h = I_s - r_s \end{cases}$$

L'**indice de mobilité** est :

$\boxed{m - h = I_c - E_c = E_s - I_s}$ avec $m \geq 0$ et $h \geq 0$.

On appelle approche globale le raisonnement que l'on peut mener à partir de l'indice de mobilité. L'indice de mobilité se calcule à partir des nombres d'inconnues et d'équations, et s'interprète avec les degrés de mobilité et de statisme.

Si $m - h > 0$ alors il y a des **mouvements**.
Si $m - h = 0$ alors il n'y a aucune information.
Si $m - h < 0$ alors il y a des **contraintes de montage**.

5.1 Synthèse

	Approche cinématique	Approche dynamique
Nb CEC	N_P	
Nb liaisons	N_L	
Nb cycles	$\boxed{\boldsymbol{\mu = N_L - N_P + 1}}$	
Nb mouvements		$N_P - 1$
Nb équations scalaires	$\boxed{\boldsymbol{E_C = 6\mu}}$	$\boxed{\boldsymbol{E_S = 6(N_P - 1)}}$
Nb inconnues scalaires	I_c	I_s
Rang	r_c	r_s
Indice de mobilité	$I_c - E_C$	$E_s - I_s$
Degré de mobilité	$m = I_c - r_c$	$m = E_s - r_s$
Degré de statisme	$h = E_c - r_c$	$h = I_s - r_s$
Approche globale	$\boxed{\boldsymbol{m - h = I_c - E_c}}$	$\boxed{\boldsymbol{m - h = E_s - I_s}}$

5.2 Quelle approche privilégier ?

Toute étude commence par une approche globale. En effet, il est inutile de se lancer dans des calculs qui deviennent très rapidement complexes pour déboucher sur des conclusions triviales.

- Pour une recherche des degrés de mobilité et de statisme, l'approche cinématique est à privilégier, et ce pour deux raisons :
  - les grandeurs manipulées sont observables et mesurables ;
  - le nombre d'équations à traiter est en général bien inférieur à celui obtenu par l'approche dynamique.
- Pour une recherche de la loi entrée-sortie d'un point de vue dynamique, l'approche énergétique est à privilégier. Le théorème de la puissance cinétique donne un résultat immédiat.
- L'approche dynamique enfin est à mener lorsque l'on cherche à dimensionner les composants d'un mécanisme. Il est alors seulement nécessaire de connaître les torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons.

Il est acquis que toute analyse commence par une approche globale. Mais il ne faut pas oublier pour autant que cette dernière ne donne qu'un indice et que seul le système d'équations donne des certitudes.

5.3 Isostatisme et hyperstatisme

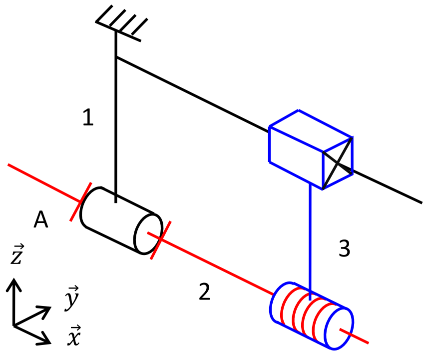
	Avantage	Inconvénient
Mécanisme isostatique	Economique Facilement montable	Souple
Mécanisme hyperstatique	Rigide	Couteux Contraintes géométriques fines

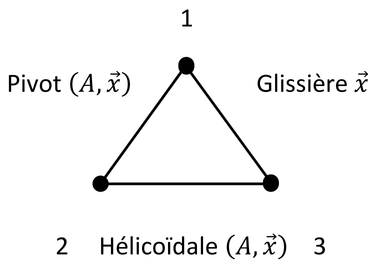
Dans un mécanisme, la **rigidité** s'oppose à la **montabilité**.

Les **contraintes géométriques** mises en évidence dans le cas de l'hyperstatisme induisent soit une **qualité de fabrication** plus grande, soit la mise en place de réglages sur le mécanisme. On sait tout à fait réaliser et l'un, et l'autre, mais cela a un **coût**.
En conclusion, on peut dire que l'hyperstatisme est un choix réfléchi qu'il est nécessaire de financer quand les critères de performances ne sont pas atteints avec une structure équivalente isostatique.

5.4 Exemple de rédaction

Exemple : On s'intéresse à un système vis-écrou. Déterminer le degré d'hyperstatisme.
Proposer un changement pour rendre le schéma isostatique.





Calcul :

L'indice de mobilité est : $m - h = I_c - E_c = (1 + 1 + 1) - 6.1 = -3$
On voit graphiquement une mobilité utile (rotation de la vis d'axe $(A, \vec{x})$ du mouvement 2/1) : $m = 1$

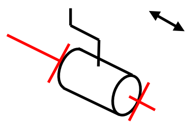
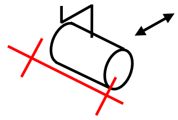
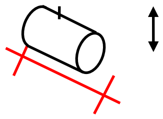
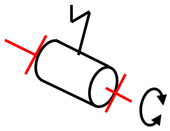
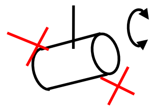
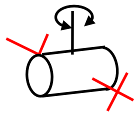
Donc l'hyperstatisme est : $h = m + 3 = 1 + 3 = 4$

Interprétation :

Si par exemple, on imagine toutes les liaisons parfaites sauf la liaison pivot.
Les contraintes géométriques sont 2 distantes selon $\vec{y}$ et $\vec{z}$ et 2 orientations selon $\vec{y}$ et $\vec{z}$.

Remédiation :

Si on souhaite rendre le mécanisme isostatique, on peut remplacer la liaison glissière par une liaison sphère-plan de normale $\vec{y}$.

	$\vec{x}$	$\vec{y}$	$\vec{z}$
Contrainte géométrique linéaire			
Contrainte géométrique angulaire			

Remarque : ici, des défauts de distance $\vec{x}$ et d'alignement $\vec{x}$ n'empêchent pas l'assemblage.

QUESTIONS DE COURS

- Donner 2 méthodes pour déterminer la liaison équivalente de deux liaisons en série.
- Donner 2 méthodes pour déterminer la liaison équivalente de deux liaisons en parallèle.
- Comment choisir un paramétrage ?
- Qu'est-ce que l'isostatisme et l'hyperstatisme ?
- Donner les 2 formules de l'indice de mobilité.
- Donner des exemples de solutions technologiques pour permettre un montage hyperstatique.