



TD02 ACTIONS MECANIQUES

CORRECTION

Exercice 1 : SOLIDE SOUMIS A DEUX GLISSEURS

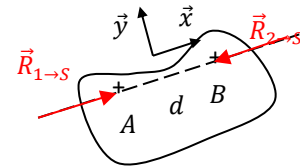
Question 1 : Démontrer qu'un solide soumis à deux forces en équilibre à nécessairement ses forces extérieures de même direction, de même norme et de sens opposé.

Soit un solide S à l'équilibre, soumis à 2 forces.

On isole S .

On fait l'Inventaire des Actions Mécaniques Extérieures à S :

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow S} = \begin{matrix} A \\ \vec{0} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{1 \rightarrow S} \\ \vec{0} \end{matrix} \right. = \begin{matrix} B \\ \vec{BA} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{1 \rightarrow S} \\ \vec{BA} \wedge \vec{R}_{1 \rightarrow S} \end{matrix} \right. \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{2 \rightarrow S} = \begin{matrix} B \\ \vec{0} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{2 \rightarrow S} \\ \vec{0} \end{matrix} \right.$$



car $\vec{M}_{1 \rightarrow S}(B) = \vec{M}_{1 \rightarrow S}(A) + \vec{BA} \wedge \vec{R}_{1 \rightarrow S}$

On applique le Principe Fondamental de la Statique en B à S :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow S} + \vec{M}_{2 \rightarrow S} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} B \\ \vec{BA} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{1 \rightarrow S} + \vec{R}_{2 \rightarrow S} = \vec{0} \\ \vec{BA} \wedge \vec{R}_{1 \rightarrow S} = \vec{0} \end{matrix} \right. \rightarrow \begin{matrix} \vec{R}_1 \text{ et } \vec{R}_2 \text{ sont de même direction, de même norme et sens contraire} \\ \rightarrow \text{les deux droites d'actions sont identiques et passent par (AB)} \end{matrix}$$

Conclusion :

donc $\mathcal{F}_{1 \rightarrow S} = -\mathcal{F}_{2 \rightarrow S} = \begin{matrix} F \vec{x} \\ A \\ \vec{0} \end{matrix}$ il n'y a plus qu'une inconnue, l'intensité de la force.

Question 2 : Etudier l'équilibre d'un vérin.

On isole $V = \{\text{tige, corps}\}$.

Le vérin V est monté entre 2 liaisons sphériques, en A et B .

On fait le BAME :

Hypothèse : on néglige l'action de la pesanteur sur le vérin.

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow V} = \begin{matrix} A \\ \vec{0} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{1 \rightarrow V} \\ \vec{0} \end{matrix} \right.$$

$$\mathcal{F}_{2 \rightarrow V} = \begin{matrix} B \\ \vec{0} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{2 \rightarrow V} \\ \vec{0} \end{matrix} \right.$$

On applique le Principe Fondamental de la Statique (PFS) en B à V , et on en déduit :

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow S} = -\mathcal{F}_{2 \rightarrow S} = \begin{matrix} F \vec{u} \\ A \\ \vec{0} \end{matrix}$$

Question 3 : Quels autres systèmes matériels peut-on rencontrer qui sont soumis à deux glisseurs ?

Une bouée

Une bielle dont on a négligé la masse

Un vérin dont on a négligé la masse

Une roue avant de voiture non motorisée

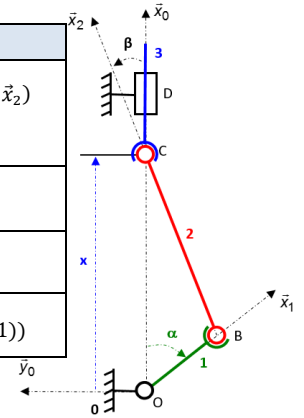
...

Question 4 : Que se passe-t-il pour un solide en équilibre soumis à trois forces ?

Si un solide est en équilibre et est soumis à 3 forces, alors ces forces sont coplanaires et de somme nulle, de plus elles sont concourantes en un même point ou parallèles et la somme des moments est nulle.

Exercice 2 : METHODOLOGIE

Étape	Isolement	Principe / Théorème	Résultat
1	2	PFS sur un solide soumis à 2 glisseurs	$\vec{R}(1 \rightarrow 2)$ et $\vec{R}(3 \rightarrow 2)$ suivant (B, \vec{x}_2) $\vec{R}(1 \rightarrow 2) = -\vec{R}(3 \rightarrow 2)$
2	3	Théorème de la résultante statique Projection sur \vec{x}_0	$\vec{R}(2 \rightarrow 3) = \vec{f}(F)$
3		On reprend les équations précédentes	$\vec{R}(1 \rightarrow 2) = -\vec{R}(3 \rightarrow 2)$
4	1	Théorème du moment statique en O Projection sur \vec{z}_0	$C_m = \vec{M}(O, 0 \rightarrow 1) \cdot \vec{z}_0 = f(\vec{R}(2 \rightarrow 1))$



Étape	Isolement	Principe / Théorème	Résultat
1	2, 4, 6	PFS sur un solide soumis à 2 glisseurs	Direction des AM
2	1	TRS en projection sur \vec{x}_p	$F_{21} = -\frac{F_p}{\sin \beta}$
3	{2,3}	TMS en C en projection sur \vec{z}_p	$X_{53} + \tan \beta Y_{53} = -2 \frac{l_2}{l_4} F_p$
4	5	TRS en projection sur \vec{z}_p	$F_p = \frac{l_4}{2l_2} (\tan \beta F_S^y - F_S^x)$

Hypothèse : on néglige l'action de la pesanteur sur 2 et sur 4.

Les solides 2 et 4 sont des bielles. Elles sont soumises chacune à 2 glisseurs. En appliquant le PFS, on peut démontrer que les directions des forces sont respectivement \vec{EH} et \vec{AB} .

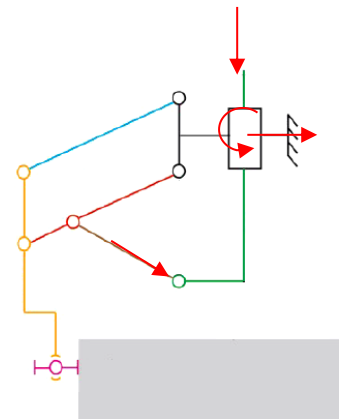
Hypothèses :

- Liaisons parfaites sauf celle au contact avec l'objet.
- On néglige l'action de la pesanteur.

On isole 1.

On fait le BAME :

- $\mathcal{F}(p \rightarrow 1) = \underset{P}{\mathcal{F}} \left\{ \begin{matrix} F_p \vec{x}_p \\ \vec{0} \end{matrix} \right.$
- $\mathcal{F}(0 \rightarrow 1) = \underset{H}{\mathcal{F}} \left\{ \begin{matrix} Y_{01} \vec{y}_p \\ N_{01} \vec{z}_p \end{matrix} \right.$
- $\mathcal{F}(2 \rightarrow 1) = \underset{H}{\mathcal{F}} \left\{ \begin{matrix} F_{21} \sin \beta \vec{x}_p + F_{21} \cos \beta \vec{y}_p \\ \vec{0} \end{matrix} \right.$



On applique le TRS en projection sur \vec{x}_p :

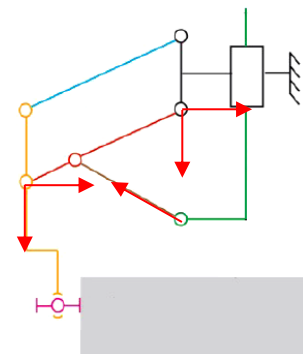
$$F_p + F_{21} \sin \beta = 0$$

$$\Rightarrow F_{21} = -\frac{F_p}{\sin \beta}$$

On isole {2,3}.

On fait le BAME :

- $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = \underset{H}{\mathcal{F}} \left\{ \begin{matrix} -F_{21} \sin \beta \vec{x}_p - F_{21} \cos \beta \vec{y}_p \\ \vec{0} \end{matrix} \right. = \underset{H}{\mathcal{F}} \left\{ \begin{matrix} F_p \vec{x}_p + \frac{F_p}{\tan \beta} \vec{y}_p \\ \vec{0} \end{matrix} \right. = \underset{C}{\mathcal{F}} \left\{ \begin{matrix} F_p \vec{x}_p + \frac{F_p}{\tan \beta} \vec{y}_p \\ 2l_2 \sin \beta \frac{F_p}{\tan \beta} \vec{z}_p \end{matrix} \right.$
- $\mathcal{F}(0 \rightarrow 3) = \underset{C}{\mathcal{F}} \left\{ \begin{matrix} X_{03} \vec{x}_p + Y_{03} \vec{y}_p \\ \vec{0} \end{matrix} \right.$
- $\mathcal{F}(5 \rightarrow 3) = \underset{D}{\mathcal{F}} \left\{ \begin{matrix} X_{53} \vec{x}_p + Y_{53} \vec{y}_p \\ \vec{0} \end{matrix} \right. = \underset{C}{\mathcal{F}} \left\{ \begin{matrix} X_{53} \vec{x}_p + Y_{53} \vec{y}_p \\ l_4 \cos \beta X_{53} \vec{z}_p + l_4 \sin \beta Y_{53} \vec{z}_p \end{matrix} \right.$



Remarque : pour déterminer les moments on utilise la méthode des bras de levier.

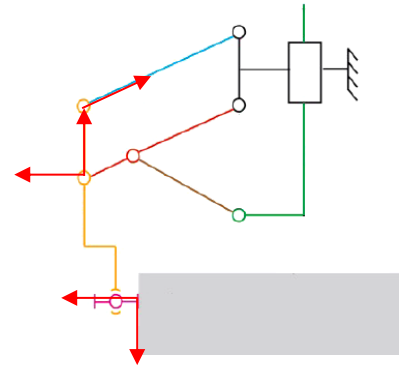
On applique le TMS en C en projection sur \vec{z}_p :

$$\begin{aligned} l_4 \cos \beta X_{53} + l_4 \sin \beta Y_{53} + 2l_2 \sin \beta \frac{F_p}{\tan \beta} &= 0 \\ \Rightarrow l_4 X_{53} + l_4 \tan \beta Y_{53} + 2l_2 F_p &= 0 \\ \Rightarrow X_{53} + \tan \beta Y_{53} &= -2 \frac{l_2}{l_4} F_p \end{aligned}$$

On isole 5.

On fait le BAME :

$$\begin{aligned} - \mathcal{F}(3 \rightarrow 5) &= {}_D \begin{Bmatrix} -X_{53} \vec{x}_p - Y_{53} \vec{y}_p \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_B \begin{Bmatrix} -X_{53} \vec{x}_p - Y_{53} \vec{y}_p \\ -l_3 Y_{53} \vec{z}_p \end{Bmatrix} \\ - \mathcal{F}(4 \rightarrow 5) &= {}_B \begin{Bmatrix} -F_{45} \sin \beta \vec{x}_p + F_{45} \cos \beta \vec{y}_p \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \\ - \mathcal{F}(\text{objet} \rightarrow 5) &= {}_S \begin{Bmatrix} F_S^x \vec{x}_p - F_S^y \vec{y}_p \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_B \begin{Bmatrix} F_S^x \vec{x}_p - F_S^y \vec{y}_p \\ -l_5 F_S^y \vec{z}_p - (l_5 + l_6) F_S^x \vec{z}_p \end{Bmatrix} \end{aligned}$$



On applique le TRS en projection sur \vec{z}_p :

$$\begin{cases} -X_{53} - F_{45} \sin \beta + F_S^x = 0 \\ -Y_{53} + F_{45} \cos \beta - F_S^y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{45} = \frac{-X_{53} + F_S^x}{\sin \beta} \\ F_{45} = \frac{Y_{53} + F_S^y}{\cos \beta} \end{cases} \Rightarrow -X_{53} + F_S^x = \tan \beta (Y_{53} + F_S^y)$$

$$\Rightarrow X_{53} \tan \beta Y_{53} = F_S^x - \tan \beta F_S^y$$

D'autre part, on avait

$$X_{53} + \tan \beta Y_{53} = -2 \frac{l_2}{l_4} F_p$$

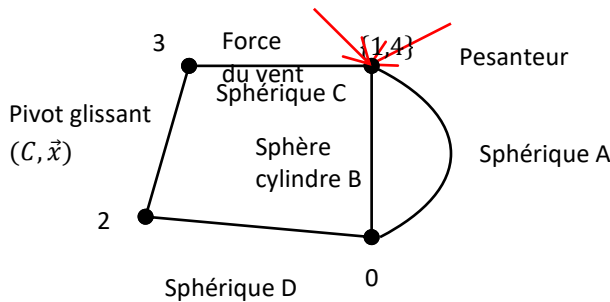
Donc

$$\begin{aligned} -2 \frac{l_2}{l_4} F_p &= F_S^x - \tan \beta F_S^y \\ \Rightarrow F_p &= \frac{l_4}{2l_2} (\tan \beta F_S^y - F_S^x) \end{aligned}$$

On constate que F_p ne dépend pas de l_5 . L'effort presseur sera identique quel que soit la position verticale du point S.

Exercice 3 : CONSOLE PORTANTE DE BATEAU

Question 1 : Colorier le schéma cinématique, placer les distances et les forces sur le schéma. Tracer le graphe des structures.



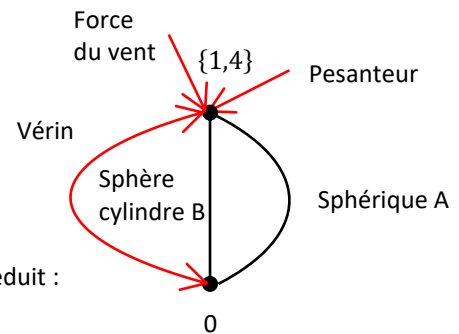
Question 2 : Etudier l'équilibre de l'ensemble {2,3}.

On isole $V = \{2,3\}$.

Le vérin V est monté entre 2 liaisons sphérique, en C et D.

On fait le BAME :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{0 \rightarrow 2} &= {}_D \begin{Bmatrix} \vec{R}_{0 \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \\ \mathcal{F}_{1 \rightarrow 3} &= {}_C \begin{Bmatrix} \vec{R}_{1 \rightarrow 3} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$



On applique le Principe Fondamental de la Statique (PFS) en C à V, et on en déduit :

$$\mathcal{F}_{0 \rightarrow 2} = - \mathcal{F}_{1 \rightarrow 3} = {}_C \begin{Bmatrix} pS \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Question 3 : Quel théorème faut-il appliquer pour obtenir l'expression de la pression à fournir dans le vérin pour compenser les efforts extérieurs ?

On isole {1,4}. Il faut appliquer le Théorème du Moment Statique en A, en projection sur \vec{z} . Mais pour l'exemple nous allons tout écrire.

Question 4 : Déterminer la pression du vérin et l'expression des actions dans les liaisons en A et B. Faire l'application numérique.

On isole {1,4}.

On fait le BAME :

$$\mathcal{F}_{3 \rightarrow 1} = \begin{matrix} C \\ \vec{0} \end{matrix} \begin{matrix} pS \vec{x} \\ pS(a+b)\vec{y} + pSc\vec{z} \end{matrix}$$

$$\mathcal{F}_{air \rightarrow 4} = \begin{matrix} G \\ \vec{0} \end{matrix} \begin{matrix} -F_{air}\vec{x} \\ -F_{air}(a+d)\vec{y} - F_{air}e\vec{z} \end{matrix}$$

$$\mathcal{F}_{ter \rightarrow 4} = \begin{matrix} G \\ \vec{0} \end{matrix} \begin{matrix} -mg\vec{z} \\ -mge\vec{x} + mgf\vec{y} \end{matrix}$$

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}^S = \begin{matrix} A \\ \vec{0} \end{matrix} \begin{matrix} X_{1 \rightarrow 2}^S \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2}^S \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2}^S \vec{z} \end{matrix}$$

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2}^{SC} = \begin{matrix} B \\ \vec{0} \end{matrix} \begin{matrix} X_{1 \rightarrow 2}^{SC} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2}^{SC} \vec{y} \\ X_{1 \rightarrow 2}^{SC} a \vec{y} - Y_{1 \rightarrow 2}^{SC} a \vec{x} \end{matrix}$$

On applique le PFS en A.

$$\vec{M}_{3 \rightarrow 1}(A) = \vec{M}_{3 \rightarrow 1}(C) + \vec{AC} \wedge pS \vec{x} = ((a+b)\vec{z} - c\vec{y}) \wedge pS \vec{x} = pS(a+b)\vec{y} + pSc\vec{z}$$

$$\vec{M}_{air \rightarrow 4}(A) = \vec{M}_{air \rightarrow 4}(G) + \vec{AG} \wedge -F_{air} \vec{x} = ((a+d)\vec{z} + e\vec{y} + f\vec{x}) \wedge -F_{air} \vec{x} = -F_{air}(a+d)\vec{y} + F_{air}e\vec{z}$$

$$\vec{M}_{ter \rightarrow 4}(A) = \vec{M}_{ter \rightarrow 4}(G) + \vec{AG} \wedge -mg\vec{z} = ((a+d)\vec{z} + e\vec{y} + f\vec{x}) \wedge -mg\vec{z} = -mge\vec{x} + mgf\vec{y}$$

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{SC}(A) = \vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{SC}(B) + \vec{AB} \wedge -F_{air} \vec{x} = a\vec{z} \wedge (X_{1 \rightarrow 2}^{SC} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2}^{SC} \vec{y}) = X_{1 \rightarrow 2}^{SC} a \vec{y} - Y_{1 \rightarrow 2}^{SC} a \vec{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_{1 \rightarrow 2}^S + X_{1 \rightarrow 2}^{SC} + pS - F_{air} = 0 \\ Y_{1 \rightarrow 2}^S + Y_{1 \rightarrow 2}^{SC} = 0 \\ Z_{1 \rightarrow 2}^S - mg = 0 \\ -mge - Y_{1 \rightarrow 2}^{SC} a = 0 \\ pS(a+b) - F_{air}(a+d) + mgf + X_{1 \rightarrow 2}^{SC} a = 0 \\ pSc + F_{air}e = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{1 \rightarrow 2}^S = \frac{1}{a}(pSb - F_{air}d + mgf) \\ Y_{1 \rightarrow 2}^S + Y_{1 \rightarrow 2}^{SC} = 0 \\ Z_{1 \rightarrow 2}^S = mg \\ Y_{1 \rightarrow 2}^{SC} = -mg \frac{e}{a} \\ X_{1 \rightarrow 2}^{SC} = \frac{1}{a}(-pS(a+b) + F_{air}(a+d) - mgf) \\ p = -\frac{F_{air}e}{Sc} \end{cases}$$

$$p = -\frac{F_{air}e}{\pi \frac{D^2}{4} c} = -\frac{15000.2}{\pi \frac{0,10^2}{4} 4} = -0,95 \text{ MPa} = -9,5 \text{ bars}$$

La pression est négative, le vérin doit « retenir » la structure pour compenser la force du vent.

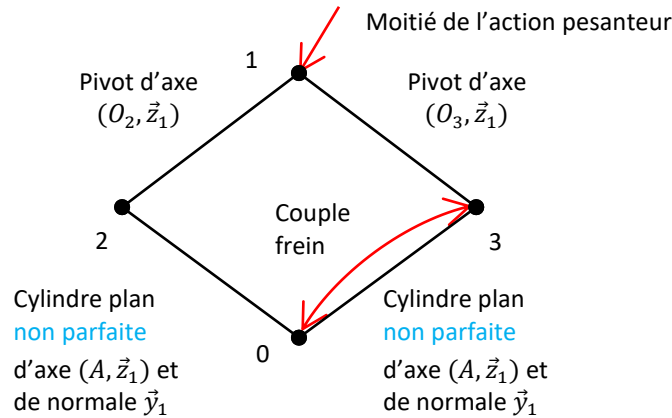
Question 5 : Déterminer alors l'expression du couple du motoréducteur pour assurer l'équilibre du système dans la position décrite sur le schéma cinématique. Faire l'application numérique.

On isole {1,4}. On applique le Théorème du Moment Statique (TMS) en A, en projection sur \vec{z} .

$$C_m = -F_{air}e = -15000.2 = -30000 \text{ Nm}$$

Exercice 4 : AIDE AU DEMARRAGE EN PENTE

Question 1 : Réaliser le graphe d'analyse.



Hypothèse : problème plan $(B, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$.

On s'intéresse à moitié de la voiture et donc l'action d'un seul frein.

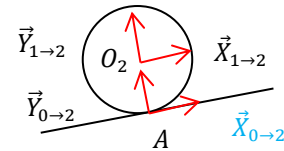
Question 2 : Isoler l'ensemble 2 et en déduire le modèle de l'action mécanique de 0 sur 2.

On isole 2.

2 est un solide soumis à 2 glisseurs car on néglige l'action de la pesanteur sur 2.

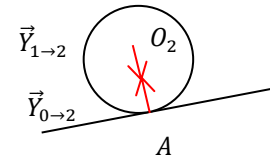
$$\mathcal{F}_{0 \rightarrow 2} = A \begin{cases} X_{0 \rightarrow 2} \vec{x}_1 + Y_{0 \rightarrow 2} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2} = O_3 \begin{cases} X_{1 \rightarrow 2} \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$



On applique le Principe Fondamental de la Statique (PFS) en A, et on en déduit :

$$\mathcal{F}_{0 \rightarrow 2} = -\mathcal{F}_{1 \rightarrow 2} = A \begin{cases} Y_{0 \rightarrow 2} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$



Question 3 : Isoler l'ensemble {1,2,3} et en déduire X_{03} , puis Y_{03} et enfin Y_{02} en fonction de M et des caractéristiques géométriques.

On isole {1,2,3}.

On fait le BAME :

$$\mathcal{F}_{0 \rightarrow 3} = B \begin{cases} X_{0 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{0 \rightarrow 3} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

avec $|X_{03}| \leq f |Y_{03}|$ (loi de Coulomb),

la « tendance au glissement » de 3/0 est suivant $-\vec{x}_1$ donc $X_{03} > 0$.

$$\mathcal{F}_{0 \rightarrow 2} = A \begin{cases} Y_{0 \rightarrow 2} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases} = B \begin{cases} Y_{0 \rightarrow 2} \vec{y}_1 \\ Y_{0 \rightarrow 2}(a+b) \end{cases}$$

$$\vec{M}_{0 \rightarrow 2}(B) = \vec{M}_{0 \rightarrow 2}(A) + \vec{BA} \wedge Y_{0 \rightarrow 2} \vec{y}_1 = (a+b) \vec{x}_1 \wedge Y_{0 \rightarrow 2} \vec{y}_1 = Y_{0 \rightarrow 2}(a+b) \vec{z}_1$$

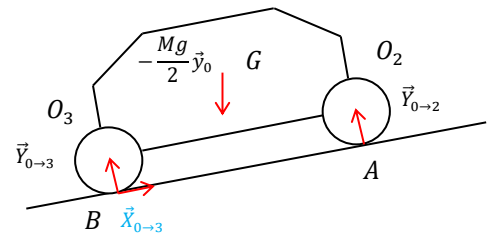
La méthode du « bras de levier » permet de déterminer plus rapidement les moments que le calcul.

$$\mathcal{F}_{ter \rightarrow 1} = G \begin{cases} -\frac{Mg}{2} \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{cases} = B \begin{cases} -\frac{Mg}{2} \sin \alpha \vec{x}_1 - \frac{Mg}{2} \cos \alpha \vec{y}_1 \\ -\frac{Mg}{2} b \cos \alpha \vec{z}_1 + \frac{Mg}{2} h \sin \alpha \vec{z}_1 \end{cases}$$

$$\vec{M}_{0 \rightarrow 2}(B) = \vec{M}_{0 \rightarrow 2}(G) + \vec{BG} \wedge -\frac{Mg}{2} \vec{y}_0 = (b \vec{x}_1 + h \vec{y}_1) \wedge -\frac{Mg}{2} \vec{y}_0 = -\frac{Mg}{2} b \cos \alpha \vec{z}_1 + \frac{Mg}{2} h \sin \alpha \vec{z}_1$$

On applique le Principe Fondamental de la Statique (PFS) en B.

$$\begin{cases} X_{0 \rightarrow 3} - \frac{Mg}{2} \sin \alpha = 0 \\ Y_{0 \rightarrow 2} + Y_{0 \rightarrow 3} - \frac{Mg}{2} \cos \alpha = 0 \\ Y_{0 \rightarrow 2}(a+b) - \frac{Mg}{2} b \cos \alpha + \frac{Mg}{2} h \sin \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{0 \rightarrow 3} = \frac{Mg}{2} \sin \alpha \\ Y_{0 \rightarrow 3} = \frac{Mg}{2} \cos \alpha - \frac{Mg}{2(a+b)} b \cos \alpha + \frac{Mg}{2(a+b)} h \sin \alpha \\ Y_{0 \rightarrow 2} = \frac{Mg}{2(a+b)} b \cos \alpha - \frac{Mg}{2(a+b)} h \sin \alpha \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} X_{0 \rightarrow 3} = \frac{Mg}{2} \sin \alpha \\ Y_{0 \rightarrow 3} = \frac{Mg}{2(a+b)} a \cos \alpha + \frac{Mg}{2(a+b)} h \sin \alpha \\ Y_{0 \rightarrow 2} = \frac{Mg}{2(a+b)} b \cos \alpha - \frac{Mg}{2(a+b)} h \sin \alpha \end{cases}$$

Car

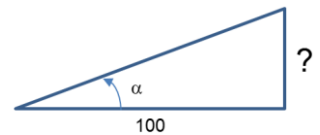
$$1 - \frac{b}{a+b} = \frac{a}{a+b}$$

Question 4 : En déduire la pente limite (en %) acceptable au-delà de laquelle le véhicule glisse par rapport au sol.

Il n'y a pas de glissement entre 3 et 0 si on est en phase d'adhérence, cad $|X_{03}| \leq f|Y_{03}|$ (lois de Coulomb)

On cherche donc α tel que :

$$\begin{aligned} \frac{Mg \sin \alpha}{2} &\leq f \frac{Mg(a \cos \alpha + h \sin \alpha)}{2(a+b)} \\ \Rightarrow \sin \alpha &\leq f \frac{(a \cos \alpha + h \sin \alpha)}{(a+b)} \\ \Rightarrow \sin \alpha ((a+b) - fh) &\leq fa \cos \alpha \\ \Rightarrow \alpha &\leq \arctan \left(\frac{fa}{(a+b) - fh} \right) = 17^\circ = \text{pente de } 30\% \end{aligned}$$



Question 5 : En déduire la pente limite (en %) acceptable au-delà de laquelle le véhicule bascule en arrière.

Il n'y a pas de basculement autour de (B, \vec{z}) si la roue avant touche le sol, cad $Y_{02} \geq 0$

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \frac{a \cos \alpha + h \sin \alpha}{a+b} &\geq 0 \\ \Rightarrow (a+b) \cos \alpha - (a \cos \alpha + h \sin \alpha) &\geq 0 \\ \Rightarrow b \cos \alpha - h \sin \alpha &\geq 0 \\ \Rightarrow \alpha &\leq \arctan \left(\frac{b}{h} \right) = 57^\circ = \text{pente de } 155\% \end{aligned}$$

Question 6 : Isoler l'ensemble 3 et en déduire C_f en fonction de M et des caractéristiques géométriques. Faire l'application numérique pour une pente de 30%.

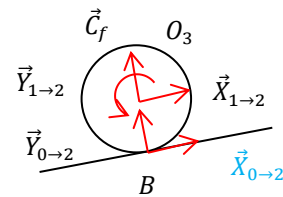
On isole 3.

On fait le BAME :

$$\mathcal{F}_{0 \rightarrow 3} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{l} X_{0 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{0 \rightarrow 3} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 3} = \underset{o_3}{\left\{ \begin{array}{l} X_{1 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 3} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 3}^{frein} = \underset{o_3}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_f \vec{z} \end{array} \right.}$$



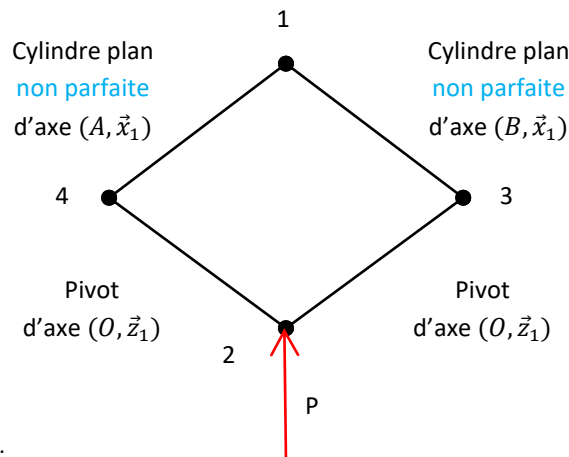
On applique le Théorème du Moment Statique (TMS) en O_3 , en projection sur \vec{z}_1 .

$$\begin{aligned} \vec{M}_{3 \rightarrow 3}(O_3) \cdot \vec{z}_1 &= 0 \\ \Rightarrow C_f + X_{03} \frac{D}{2} &= 0 \\ \Rightarrow C_f &= -\frac{1}{2} Mg \sin \alpha \frac{D}{2} \approx -\frac{1}{2} 1300.9,81 \sin \left(\arctan \frac{30}{100} \right) \frac{0,648}{2} \approx -1190 \text{ Nm} \end{aligned}$$

On trouve un couple de freinage < 0 , ce qui correspond bien au freinage de la voiture.

Exercice 5 : COINCEUR A CAMES

Question 1 : Tracer le graphe de structure du coinqueur à cames dans la phase de vie d'utilisation. Et proposer une démarche de résolution en fonction de la structure de ce graphe.



Hypothèse : problème plan (\vec{x}_1, \vec{y}_1) .

Nous sommes en présence d'une chaîne fermée. Nous allons donc déjà étudier l'équilibre d'un solide soumis à 2 forces pour diminuer le nombre d'inconnues. Puis nous allons étudier un équilibre qui fait intervenir P.

Question 2 : Etudier l'équilibre de la came 3 et en déduire une relation entre X_{13} , Y_{13} et a, b .

On isole 3.

On fait le BAME :

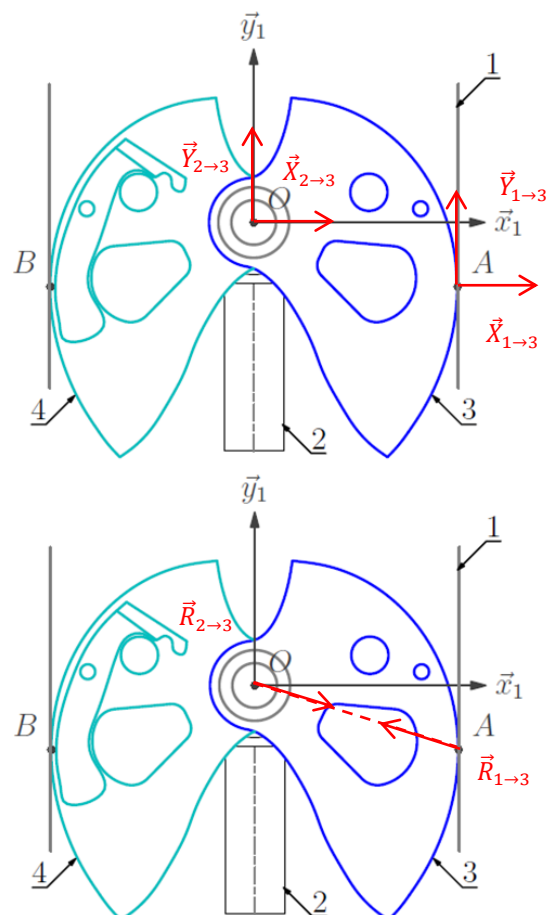
$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 3} = \begin{matrix} A \\ O \end{matrix} \begin{pmatrix} X_{1 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 3} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{matrix} O \\ A \end{matrix} \begin{pmatrix} X_{1 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 3} \vec{y}_1 \\ aY_{1 \rightarrow 3} \vec{z}_1 + bX_{1 \rightarrow 3} \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F}_{2 \rightarrow 3} = \begin{matrix} O \\ O \end{matrix} \begin{pmatrix} X_{2 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{2 \rightarrow 3} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

En appliquant le PFS en O :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{1 \rightarrow 3}(O) &= \vec{M}_{1 \rightarrow 3}(A) + \vec{OA} \wedge (X_{1 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 3} \vec{y}_1) \\ &= (a\vec{x}_1 - b\vec{y}_1) \wedge (X_{1 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 3} \vec{y}_1) \\ &= aY_{1 \rightarrow 3} \vec{z}_1 + bX_{1 \rightarrow 3} \vec{z}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X_{1 \rightarrow 3} + X_{2 \rightarrow 3} = 0 \\ Y_{1 \rightarrow 3} + Y_{2 \rightarrow 3} = 0 \\ aY_{1 \rightarrow 3} + bX_{1 \rightarrow 3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{Y_{1 \rightarrow 3}}{X_{1 \rightarrow 3}} = -\frac{b}{a}$$



Question 3 : Etudier l'équilibre de l'ensemble $\{2,3,4\}$. Et en déduire un lien entre X_{13} , Y_{13} et a , b , P .

On isole $\{2,3,4\}$.

On fait le BAME :

$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 3} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} X_{1 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 3} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

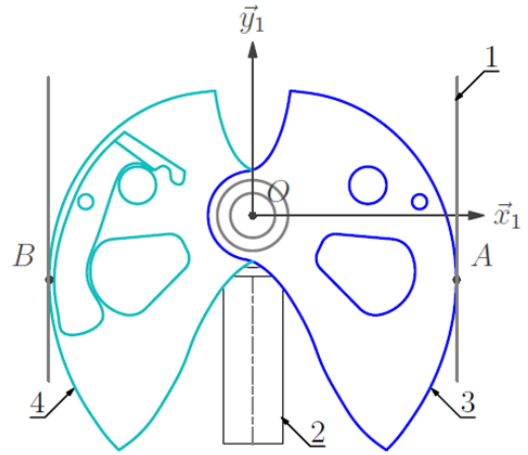
$$\mathcal{F}_{1 \rightarrow 4} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{l} X_{1 \rightarrow 4} \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 4} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

$$\mathcal{F}_{ext \rightarrow 2} = \underset{O}{\left\{ \begin{array}{l} -P \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

On applique le PFS en B.

$$\begin{aligned} \vec{M}_{1 \rightarrow 3}(B) &= \vec{M}_{1 \rightarrow 3}(A) + \vec{BA} \wedge (X_{1 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 3} \vec{y}_1) \\ &= 2a \vec{x}_1 \wedge (X_{1 \rightarrow 3} \vec{x}_1 + Y_{1 \rightarrow 3} \vec{y}_1) = 2a Y_{1 \rightarrow 3} \vec{z}_1 \end{aligned}$$

$$\vec{M}_{ext \rightarrow 2}(B) = \vec{M}_{ext \rightarrow 2}(O) + \vec{BO} \wedge -P \vec{y}_1 = a \vec{x}_1 \wedge -P \vec{y}_1 = -aP \vec{z}_1$$



$$\begin{cases} X_{1 \rightarrow 3} + X_{1 \rightarrow 4} = 0 \\ Y_{1 \rightarrow 3} + Y_{1 \rightarrow 4} - P = 0 \\ 2a Y_{1 \rightarrow 3} - aP = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_{1 \rightarrow 4} = \frac{P}{2} \\ Y_{1 \rightarrow 3} = \frac{P}{2} \end{cases}$$

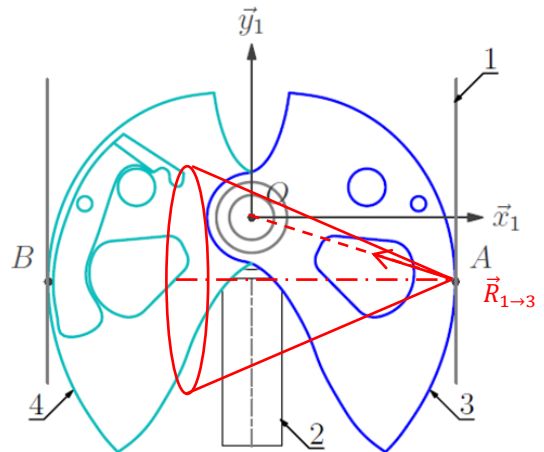
De plus on avait $\frac{Y_{1 \rightarrow 3}}{X_{1 \rightarrow 3}} = -\frac{b}{a}$ donc $X_{1 \rightarrow 3} = -\frac{aP}{b}$. La came est donc bien en compression.

Question 4 : En déduire l'angle minimum de frottement au contact paroi-came pour assurer le coincement.

Il y a coincement si la résultante reste dans le cône de frottement. Or, vu que la came 3 est soumise à 2 glisseurs, la droite d'action de $\vec{R}_{1 \rightarrow 3}$ est toujours la droite (OA) et est dirigée par le rapport $\frac{a}{b}$. On lit graphiquement :

$$\frac{b}{a} < f_{acier/roche} \Rightarrow \frac{1}{3} < f_{acier/roche}$$

Or $f_{acier/roche} = 0,4$. Il y a donc toujours coincement.

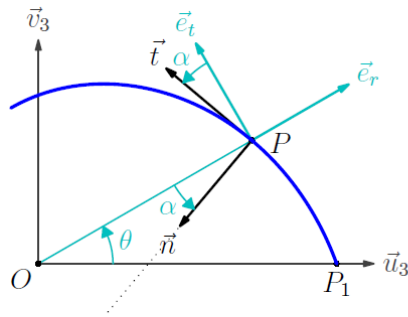


Question 5 : Pourquoi peut-on dire que ce système est autobloquant ?

Ce système est autobloquant car l'AM de $1 \rightarrow 3$ est obligatoirement dans le cône de frottement si le coefficient de frottement est assez important, il ne dépend pas de l'intensité de la charge P.

Question 6 : Quelle grandeur géométrique doit être surveillée pour que le système fonctionne pour des fissures variables sans que les efforts ne deviennent trop grands pour une même charge P ?

C'est le rapport $\frac{a}{b}$ qui est important. Ni a, ni b, ni P.



L'équation à résoudre est alors

$$\frac{-\vec{t} \cdot \vec{e}_r}{\vec{t} \cdot \vec{e}_t} = \tan \alpha$$

Comme \vec{t} est colinéaire à $\frac{d\rho}{d\theta}\vec{e}_r + \rho\vec{e}_t$, cette condition devient

$$\frac{-\frac{d\rho}{d\theta}}{\rho} = \tan \alpha$$

La condition conduit ainsi à un profil en spirale logarithmique d'équation polaire

$$\rho(\theta) = r_1 e^{-\theta \tan \alpha}$$

On obtient une forme de came en spirale logarithmique. Le rapport $\frac{a}{b}$ est constant pour tout angle d'ouverture.

Exercice 6 : RESISTANCE AU ROULEMENT D'UN TGV

Question 1 : Déterminer le moment de résistance au roulement global subit par le TGV.

Chaque roue supportera un effort normal : $N_i = \frac{mg}{i}$ où i est le nombre de roue.

Le moment de résistance au roulement au niveau de chaque roue est donc : $M_i^{roul} = \eta \frac{mg}{i}$

Le moment de résistance au roulement global est donc : $M^{roul} = \eta mg = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 386 \cdot 10^3 \cdot 9,81 = 11300 \text{ Nm}$

Question 2 : Déterminer la vitesse angulaire des roues en rad/s.

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{300 \cdot 10^3 / 3600}{0,92/2} = 181 \text{ rad/s}$$

Question 3 : En déduire la puissance nécessaire pour vaincre la résistance au roulement. Vérifier si la puissance installée sur le TGV est suffisante.

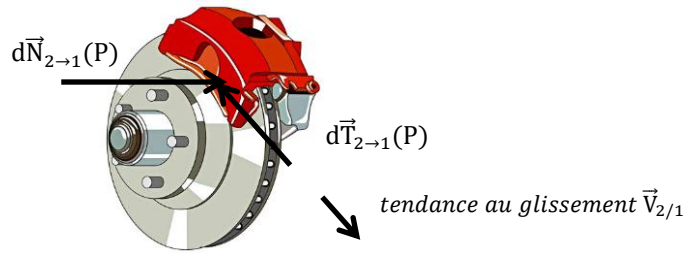
$P = C \omega = M^{roul} \omega = 2 \cdot 10^6 \text{ W}$ soit environ un quart de la puissance totale installée.

Si le TGV était sur pneumatique (comme les camions) le coefficient de résistance au roulement serait bien supérieur et la puissance actuellement installée sur le TGV ne suffirait pas à le faire avancer (sans compter les résistances aérodynamiques et les côtes à franchir).

Les avantages sont plus marqués dans le transport de fret où le transport sur rail permet de transporter des charges très importantes avec peu d'énergie. L'inconvénient par rapport au camion est le réseau ferré, beaucoup moins développé que le réseau routier et qui ne permet pas de se rendre chez les clients. Des solutions de transport combiné rail-route se déploient progressivement en Europe.

Exercice 7 : FREIN D'URGENCE SUR UNE ELOLIENNE

Question 1 : Représenter sur les schémas du disque 1 ci-dessus, la force élémentaire de pression $d\vec{N}_{2 \rightarrow 1}(P)$ et la force élémentaire de résistance au glissement $d\vec{T}_{2 \rightarrow 1}(P)$ en un point P de la surface de contact.



Question 2 : Donner l'expression de la force élémentaire $d\vec{F}_{2 \rightarrow 1}(P)$ en fonction de p , f et dS .

$$d\vec{F}_{2 \rightarrow 1}(P) = d\vec{N}_{2 \rightarrow 1}(P) + d\vec{T}_{2 \rightarrow 1}(P)$$

Hypothèse : On se place à la limite du glissement

$$\|d\vec{T}_{2 \rightarrow 1}(P)\| = f \|d\vec{N}_{2 \rightarrow 1}(P)\| = fp dS$$

$$d\vec{F}_{2 \rightarrow 1}(P) = -pdS\vec{z}_1 + fp dS\vec{y}_2$$

$$dS = rd\theta dr$$

Question 3 : Indiquer en le justifiant, quelle composante du moment résultant de l'action mécanique d'une garniture 2 sur le disque 1 au point O permet de caractériser l'action de freinage d'une garniture. Déterminer cette composante.

$$\vec{M}_{2 \rightarrow 1}(O) = \int_s \vec{OP} \wedge d\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \int_s r\vec{x}_2 \wedge (-pdS\vec{z}_1 + fp dS\vec{y}_2) = -p \int_s r^2 d\theta dr \vec{y}_2 + fp \int_s r^2 d\theta dr \vec{z}_1$$

$$C_{f \text{ 1garniture}} = \vec{M}_{2 \rightarrow 1}(O) \cdot \vec{z}_1 = fp \int_{R_i}^{R_e} r^2 dr \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta = fp \left[\frac{r^3}{3} \right]_{R_i}^{R_e} [\theta]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{2}{3} fp \alpha (R_e^3 - R_i^3)$$

Question 4 : En déduire le couple total de freinage avec les deux étriers en fonction de α , F , f , R_i et R_e , avec F la force normale.

$$C_{f \text{ 1garniture}} = \frac{2}{3} fp \alpha (R_e^3 - R_i^3) = \frac{2}{3} f \frac{F}{\pi(R_e^2 - R_i^2)} \alpha (R_e^3 - R_i^3) = \frac{2}{3} f F \frac{\alpha}{\pi} \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2}$$

Remarque : pour l'ouvre portail de TP, où on a 6 surfaces disques trouvés, on aurait : $C_{f \text{ 1garniture}} = n \frac{2}{3} f F \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2}$ avec $n = 6$ le nombre de surfaces de contact.

(et la composante normale du moment est nulle)

Exercice 8 : OUVRANT DE BUGGATI

Question 1 : Déterminer l'expression littérale de la résultante selon \vec{z} de l'action mécanique du joint inférieur sur la vitre au cours du déplacement de celle-ci.

Hypothèse :

- On se place à la limite du glissement
- On se place dans la phase de vie où la vitre monte
- La pression linéique est constante

La force résultante verticale provient du frottement des deux côtés de la vitre.

La force élémentaire est

$$d\vec{R}(\text{joint} \rightarrow \text{vitre}) = dN \vec{x} + dT \vec{z} = p dl \vec{x} - fp dl \vec{z} \quad (\text{loi de Coulomb})$$

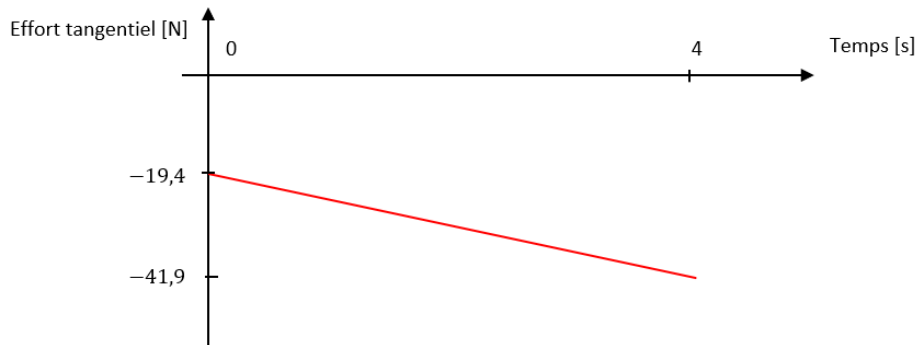
$$\vec{R}(\text{joint} \rightarrow \text{vitre}) \cdot \vec{z} = 2 \int_1^{1+L+2z} d\vec{R}(\text{joint} \rightarrow \text{vitre}) \cdot \vec{z} = 2 \int_{l=0}^{1+L+2z} -fp dl = -2fp(L + 2z)$$

avec $z \in [0, H]$

Question 2 : Représenter l'évolution au cours du temps de la résultante des efforts résistants selon \vec{z} de l'ensemble des joints sur la vitre (2 joints verticaux de hauteur H et un joint horizontal de longueur L). Donner les valeurs numériques minimale et maximale de cet effort.

La force minimale est : $\vec{R}(\text{joint} \rightarrow \text{vitre}) \cdot \vec{z} = -2fpL = -2.0,5.25.0,776 = -19,4N$

La force maximale est : $\vec{R}(\text{joint} \rightarrow \text{vitre}) \cdot \vec{z} = -2fp(L + 2H) = -2.0,5.25. (0,776 + 2.0,450) = -41,9N$



Question 3 : Indiquer sur ce schéma l'action du joint horizontal inférieur et l'action des joints verticaux latéraux.

Question 4 : Compléter le schéma-blocs multiphysique pour prendre en compte cet obstacle. Une palette composée de constituants standards est donné ci-dessous.

