RESUME DE DYNAMIQUE

Principe fondamental de la dynamique

Un repère inertiel, dit aussi galiléen, est un repère dans lequel un corps qui n'est soumis à aucune force, se déplace en ligne droite et à vitesse constante (vecteur vitesse constant).

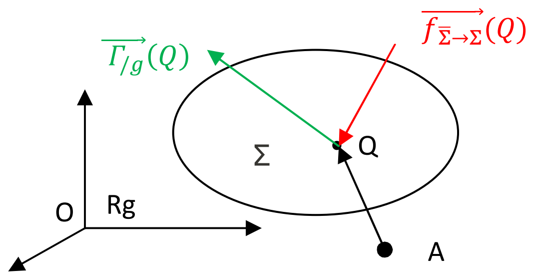
Un observateur $\mathcal{O}$ est constitué d'un repère de temps et d'un repère d'espace. C'est un système de référence ou référentiel.

Le principe fondamental de la dynamique affirme qu'il existe au moins un repère galiléen et une chronologie tels que, pour tout système matériel Σ à masse conservative, le torseur des efforts extérieurs à Σ soit égal au torseur dynamique galiléen de Σ

On alors l'égalité suivante.

$$\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}} = \overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}$$

Torseur des efforts extérieurs à Σ = Torseur dynamique galiléen de Σ



Notation pour l'intégration

On notera par exemple $\int_\Sigma \vec{f}(Q)dm$ à la place des différentes modélisations des forces.

volumiques	massiques	surfaciques	linéiques	discrètes $(Q_i, \vec{f_i})$
$\iiint_\Sigma \vec{f_v}(Q)dv$	$\iiint_\Sigma \vec{f_m}(Q)dm$	$\iint_{\partial\Sigma} \vec{f_s}(Q)ds$	$\int_L \vec{f_\ell}(Q)\,d\ell$	$\sum_i \vec{f_i}$
$\vec{f_v}(Q)$ en N/m^3	g(Q) en N/kg	$\vec{f_s}(Q)$ en N/m^2	$\vec{f_\ell}(Q)$ en N/m	$\vec{f}$ en N
	$\mathrm{dm(Q)} = \rho(Q)dv$			

Théorèmes généraux de la dynamique

On va montrer que l'égalité entre deux torseurs est équivalente à deux égalité vectorielles ou à six égalités scalaires.

$\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}(\mathrm{A}) = \int_\Sigma \overrightarrow{AQ}\wedge\overrightarrow{f_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}(Q)dm$ Moment en A du torseur des efforts extérieurs à Σ

$\overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}(\mathrm{A}) = \int_\Sigma \overrightarrow{AQ}\wedge\overrightarrow{\Gamma_{/g}}(Q)dm$ Moment en A du torseur dynamique galiléen de Σ

Pour montrer que $\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}$ et $\overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}$ sont bien des torseurs, on change de point.

Par définition : $\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}(\mathrm{B}) = \int_\Sigma \overrightarrow{BQ}\wedge\overrightarrow{f_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}(Q)\,dm$

$$\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}(\mathrm{B}) = \int_\Sigma (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AQ})\wedge\overrightarrow{f_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}(Q)dm$$

$$\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}(\mathrm{B}) = \overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}(\mathrm{A}) + \overrightarrow{BA}\wedge\int_\Sigma \overrightarrow{f_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}(Q)dm$$

$$\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}(\mathrm{B}) = \overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}(\mathrm{A}) + \overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{F_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}$$

Le torseur $\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}$ a pour résultante : $\overrightarrow{F_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}$

Par définition : $\overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}(\mathrm{B}) = \int_\Sigma \overrightarrow{BQ}\wedge\overrightarrow{\Gamma_{/g}}(Q)$

$$\overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}(\mathrm{B}) = \int_\Sigma (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AQ})\wedge\overrightarrow{\Gamma_{/g}}(Q)dm$$

$$\overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}(\mathrm{B}) = \overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}(\mathrm{A}) + \overrightarrow{BA}\wedge\int_\Sigma \overrightarrow{\Gamma_{/g}}(Q)dm$$

$$\overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}(\mathrm{B}) = \overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}(\mathrm{A}) + \overrightarrow{BA}\wedge m_\Sigma\overrightarrow{\Gamma_{/g}}(G_\Sigma)$$

Le torseur $\overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}$ a pour résultante : $m_\Sigma\overrightarrow{\Gamma_{/g}}(G_\Sigma)$

Une résultante de torseur n'a pas à être donnée en plus du torseur, la définition du champ suffit.

On peut alors écrire les deux **théorèmes généraux de la dynamique**

$\overrightarrow{F_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}} = m_\Sigma\overrightarrow{\Gamma_{/g}}(G_\Sigma)$ Théorème de la résultante dynamique en N = kg.m.s^{-2}

$\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}(\mathrm{A}) = \overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}(\mathrm{A})$ Théorème du moment dynamique en N.m = kg.m^2.s^{-2}

L'égalité des résultantes et des moments en un point assurent, en utilisant les relations de changement de points, l'égalité en tous points des champs de vecteurs particuliers que sont les torseurs. Autre solution délicate à manipuler

$\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}(\mathrm{A}) = \overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}(\mathrm{A})$ $\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}(\mathrm{B}).\vec{u} = \overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}(\mathrm{B}).\vec{u}$ $\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}(\mathrm{B}).\vec{v} = \overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}(\mathrm{B}).\vec{v}$ $\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}(\mathrm{C}).\vec{w} = \overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}(\mathrm{C}).\vec{w}$

- Les résultats des sommations ne dépendent pas de la partition utilisée pour $\bar{\Sigma}$
- Dans le cas général on a : $\overrightarrow{M_{1\to2}} = \overrightarrow{M_{\underset{1\to2}{e}}} + \overrightarrow{M_{\underset{1\to2}{g}}} + \overrightarrow{M_{\underset{1\to2}{c}}}$ e=électromagnétique g= gravitation c= contact

Additivité des moments cinétiques, des moments dynamiques etc... définis par une somme : $\int_\Sigma$

On a des sommes : $\int_\Sigma$ donc si on a : $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ avec $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ alors : $\int_\Sigma = \int_{\Sigma_1} + \int_{\Sigma_2}$

Par exemple :

$$\overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}} = \overrightarrow{\delta_{\Sigma_1/g}} + \overrightarrow{\delta_{\Sigma_2/g}}$$

$$\overrightarrow{M_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}} = \overrightarrow{M_{\overline{\Sigma}\to\Sigma_1}} + \overrightarrow{M_{\overline{\Sigma}\to\Sigma_2}}$$

Comparaison des partitions possibles de $\overline{\Sigma}$

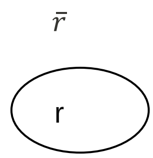
On va montrer que si on découpe suffisamment $\overline{\Sigma}$ on peut souvent se passer des notations avec e, g et c

On isole le rotor (r) d'un moteur électrique.

1- On ne découpe pas $\overline{\mathrm{r}}$

$$\overrightarrow{M_{\overline{\mathrm{r}}\to\mathrm{r}}} = \overrightarrow{\delta_{\mathrm{r}/g}}$$

$$\overrightarrow{M_{\overline{\mathrm{r}}\overset{g}{\to}\mathrm{r}}} + \overrightarrow{M_{\overline{\mathrm{r}}\overset{e}{\to}\mathrm{r}}} + \overrightarrow{M_{\overline{\mathrm{r}}\overset{c}{\to}\mathrm{r}}} = \overrightarrow{\delta_{\mathrm{r}/g}}$$



$$\overrightarrow{M_{\overline{\mathrm{r}}\overset{c}{\to}\mathrm{r}}} = \overrightarrow{M_{\mathrm{paliers}\overset{c}{\to}\mathrm{r}}} + \overrightarrow{M_{\mathrm{récepteur}\overset{c}{\to}\mathrm{r}}} + \overrightarrow{M_{\mathrm{air}\overset{c}{\to}\mathrm{r}}}$$

$\overrightarrow{M_{\mathrm{paliers}\overset{c}{\to}\mathrm{r}}}$ Effort de liaison, c'est une liaison pivot.

Si la liaison pivot d'axe $(A, \vec{x})$ est supposée parfaite on a : $\overrightarrow{M_{\mathrm{paliers}\overset{c}{\to}\mathrm{r}}}(A).\vec{x} = 0$

2- On découpe $\overline{\mathrm{r}} = \mathrm{T} \cup \mathrm{S} \cup \mathrm{P} \cup \mathrm{R} \cup \mathrm{a}$

On note : T = Terre S = Stator P = Paliers R = récepteur a = air

$$\overrightarrow{M_{\overline{\mathrm{r}}\to\mathrm{r}}} = \overrightarrow{\delta_{\mathrm{r}/g}}$$

$$\overrightarrow{M_{\mathrm{T}\to\mathrm{r}}} + \overrightarrow{M_{\mathrm{S}\to\mathrm{r}}} + \overrightarrow{M_{\mathrm{P}\to\mathrm{r}}} + \overrightarrow{M_{\mathrm{R}\to\mathrm{r}}} + \overrightarrow{M_{\mathrm{a}\to\mathrm{r}}} = \overrightarrow{\delta_{\mathrm{r}/g}}$$

On peut aussi décomposer les paliers en P_1 et P_2 ou considérer un système équivalent si on a déjà calculé $\overrightarrow{M_{\mathrm{P}\to\mathrm{r}}}$

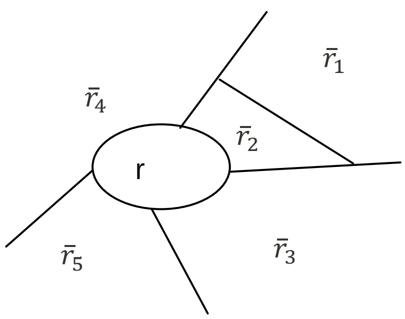
$\overrightarrow{M_{\mathrm{P}\to\mathrm{r}}} = \overrightarrow{M_{\mathrm{P}_1\to\mathrm{r}}} + \overrightarrow{M_{\mathrm{P}_2\to\mathrm{r}}}$ Pour séparer les efforts sur chacun des roulements.

Par exemple : $\overrightarrow{M_{\mathrm{P}\to\mathrm{r}}}$ Effort de liaison, c'est une liaison pivot.

Si la liaison pivot d'axe $(A, \vec{x})$ est supposée parfaite on a : $\overrightarrow{M_{\mathrm{P}\to\mathrm{r}}}(A).\vec{x} = 0$

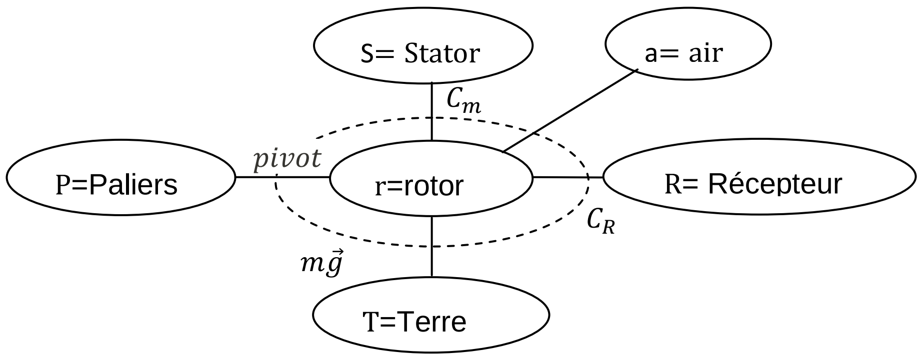
Remarque 1 : On néglige les efforts gravitationnels autre que ceux dus à la terre.

Remarque 2 : Pour chaque torseur, c'est à dire pour $\overline{\mathrm{r}}_\mathrm{k} \in \{\mathrm{T}, \mathrm{S}, \mathrm{P}, \mathrm{R}, \mathrm{a}\}$ on a : $\overrightarrow{M_{\overline{\mathrm{r}}_\mathrm{k}\to\mathrm{r}}} = \overrightarrow{M_{\overline{\mathrm{r}}_\mathrm{k}\overset{e}{\to}2}} + \overrightarrow{M_{\overline{\mathrm{r}}_\mathrm{k}\overset{g}{\to}2}} + \overrightarrow{M_{\overline{\mathrm{r}}_\mathrm{k}\overset{c}{\to}2}}$ mais la partition est telle que deux de ces torseurs sont négligeables devant le troisième, ou sont nuls.



Graphe des efforts

(Graphe des liaisons plus les autres efforts)



La frontière d'isolement visualise les différents efforts de $\overline{\mathrm{r}}$ sur r

La démarche de modélisation

Un effort ou action mécanique est modélisé par un champ de forces concentrées ou réparties.

On utilise plus rarement des champs de couples-efforts concentrés ou répartis, pour des milieux polarisés électriques ou magnétiques par exemple.

Prenons d'abord la modélisation des efforts abordée ci-dessus.

Un champ de vecteur est une application qui, à un point associe un vecteur. Voici deux exemples.

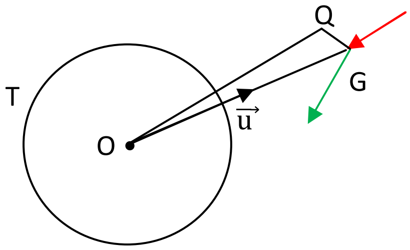
- L'effort de l'eau sur un barrage est modélisé par une pression répartie sur la surface du barrage $Q \to \vec{p}(Q)$
- L'effort gravitationnel de la terre sur un satellite Σ résulte de la sommation de la force de gravitation de Newton due à la matière de la terre sur chaque élément dm de matière de Σ

Si on suppose la terre à symétrie sphérique : $\overrightarrow{f_{T\to\Sigma}^{g}}(Q)dm = -\frac{\mathcal{G}M_T}{OQ^2}\frac{\overrightarrow{OQ}}{OQ}\mathrm{dm} = \vec{g}(Q)\mathrm{dm}$ $\quad$ $\vec{g}(Q)$ en N/kg

$$\overrightarrow{F_{T\to\Sigma}^{g}} = \int_\Sigma \overrightarrow{f_{T\to\Sigma}^{g}}(Q)\,dm$$

$$\overrightarrow{M_{T\to\Sigma}^{g}}(G) = \int_\Sigma \overrightarrow{GQ}\wedge\overrightarrow{f_{T\to\Sigma}^{g}}(Q)\,dm$$

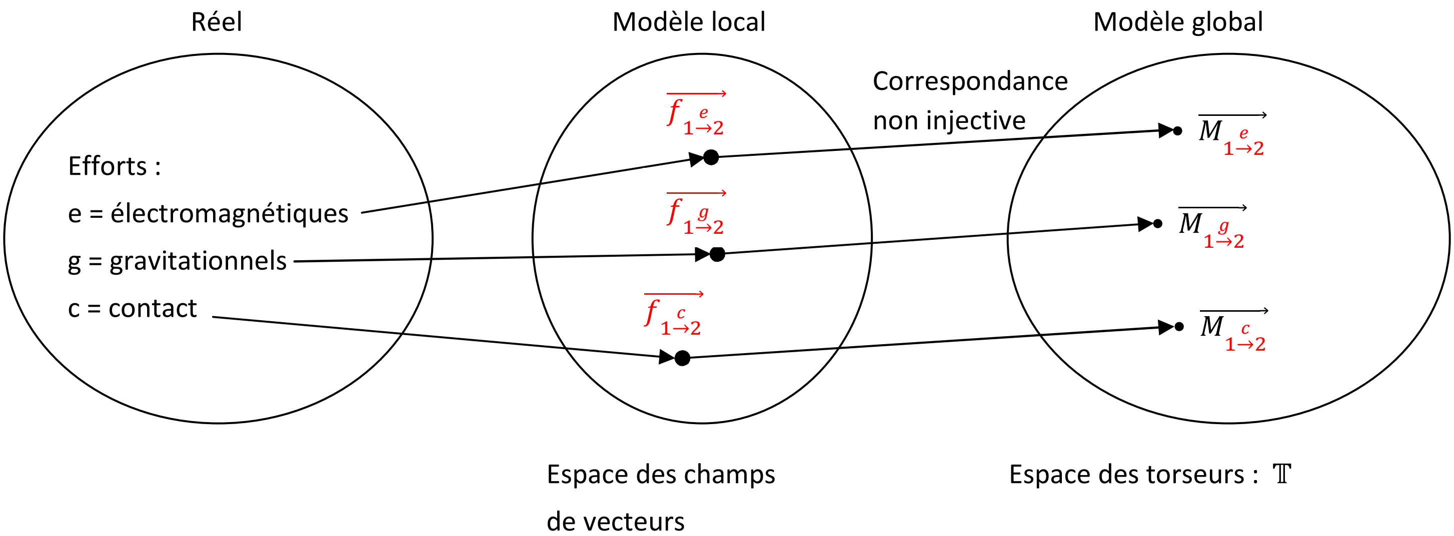
Supposer $\vec{g}(Q)$ constant localement, c'est négliger ce moment.



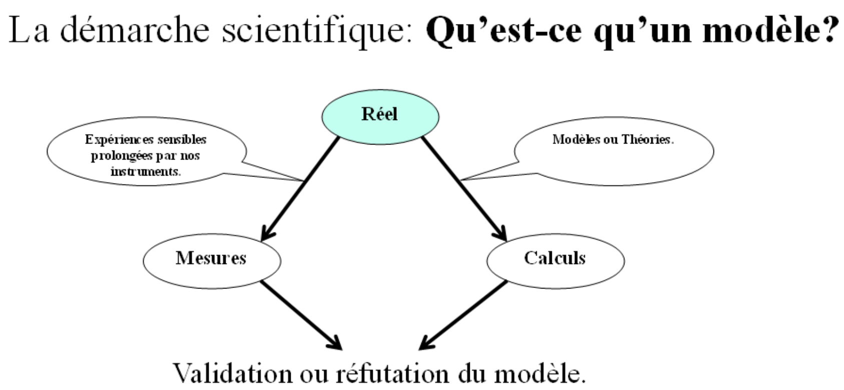
$$\overrightarrow{F_{T\to\Sigma}^{g}} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2}\vec{u} = -mg\vec{u} = m\vec{g}$$

$$\overrightarrow{M_{T\to\Sigma}^{g}}(G) = \frac{3\mathcal{G}M_T}{r^3}\vec{u}\wedge\bar{\bar{I}}_{G,\Sigma}(\vec{u})$$

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OG}}{OG} \qquad r = OG$$



Une modélisation est une simplification de la réalité, la nature est toujours plus fine que nos modèles. La démarche de modélisation montrée ici devra être comparée à des mesures pour valider ou invalider le modèle.



Définition des torseurs

Nous venons de montrer que les deux champs de vecteurs : $\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}$ et $\overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}$ sont des torseurs en démontrant qu'ils vérifient la propriété de changement de points suivante.

$\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}(B)=\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}(A)+\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{F_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}$ pour le torseur des efforts extérieurs à Σ

$\overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}(B)=\overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}(A)+\overrightarrow{BA}\wedge m_{\Sigma}\overrightarrow{\Gamma_{/g}}(G_{\Sigma})$ pour le torseur dynamique galiléen de Σ

Ces deux torseurs sont définis à partir d'un autre champ de vecteur, $\overrightarrow{f_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}$ pour $\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}$ et $\overrightarrow{\Gamma_{/g}}$ pour $\overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}$ Les deux démonstrations sont formellement identiques, on appelle ces deux torseurs : $\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}$ et $\overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}$ des torseurs à structure.

On remarquera que les champs $\overrightarrow{f_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}$ et $\overrightarrow{\Gamma_{/g}}$ ne sont pas toujours eux même des torseurs!

De plus, le passage du champ de forces au torseur associé perd de l'information, l'application n'est pas injective, deux répartitions différentes peuvent définir le même torseur.

Pour définir un torseur, on a donc besoin d'un espace dans lequel on puisse définir un produit vectoriel.

On utilise un espace $\mathscr{E}$ affine euclidien orienté de dimension 3 et E l'espace vectoriel associé.

En clair, on utilise $\mathbb{R}^3$ pour les coordonnées d'un point ou pour les composantes d'un vecteur.

Plus précisément, soit un champ de vecteurs $\vec{f}:\mathscr{E}\to E$ qui, à un point A associe le vecteur $\vec{f}(A)$

$$\vec{f}:\mathscr{E}\to E$$
$$A\to\vec{f}(A)$$

Le champ $\vec{f}$ est un torseur s'il existe $\vec{R}$ tel que $\forall\ A,B\in\mathscr{E},\ \vec{f}(B)=\vec{f}(A)+\overrightarrow{BA}\wedge\vec{R}$ ou $\vec{f}(B)=\vec{f}(A)+\vec{R}\wedge\overrightarrow{AB}$

Le vecteur $\vec{f}(A)$ est le moment en A du torseur $\vec{f}$

Le vecteur $\vec{f}(B)$ est le moment en B du torseur $\vec{f}$

Le vecteur $\vec{R}$ est le vecteur du torseur $\vec{f}$ ou la résultante du torseur $\vec{f}$

On en déduit une première propriété en projetant ces deux vecteurs sur le vecteur $\overrightarrow{AB}$

On obtient : $\vec{f}(B).\overrightarrow{AB}=\vec{f}(A).\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BA}\wedge\vec{R}).\overrightarrow{AB}$ soit $\vec{f}(B).\overrightarrow{AB}=\vec{f}(A).\overrightarrow{AB}$

Il y a même projection sur le vecteur $\overrightarrow{AB}$ le champ de vecteur $\vec{f}$ est dit équiprojectif.

Antre propriété, la différence de ces deux vecteurs $\vec{f}(B)$-$\vec{f}(A)$ peut être vue comme l'image d'un opérateur $\overrightarrow{f_R}=\vec{R}\wedge$

$$\vec{R}\wedge:E\to E$$
$$\overrightarrow{AB}\to\vec{R}\wedge\overrightarrow{AB}$$

Cet opérateur est linéaire et antisymétrique car $(\vec{R}\wedge\vec{u}).\vec{v}=-(\vec{R}\wedge\vec{v}).\vec{u}$

On a alors les définitions **équivalentes** suivantes.

Un torseur est un champ de vecteur $\vec{f}$ équiprojectif sur un espace affine euclidien orienté de dimension trois.

$$\forall\ A,B\in\mathscr{E},\ \vec{f}(B).\overrightarrow{AB}=\vec{f}(A).\overrightarrow{AB}$$

Un torseur est un champ de vecteur $\vec{f}$ sur un espace affine euclidien orienté de dimension trois associé à un endomorphisme antisymétrique

$$\vec{R}\wedge:E\to E$$
$$\overrightarrow{AB}\to\vec{R}\wedge\overrightarrow{AB}\quad\text{soit}\quad\vec{R}\wedge\overrightarrow{AB}=\vec{f}(B)-\vec{f}(A)$$

Un torseur est un champ de vecteur $\vec{f}$ sur un espace affine euclidien orienté de dimension trois qui vérifie la propriété de changement de point. $\vec{f}(B)=\vec{f}(A)+\overrightarrow{BA}\wedge\vec{R}$

Soit : $\exists\ \vec{R}\in E\ /\ \forall\ A,B\in\mathscr{E},\ \vec{f}(B)=\vec{f}(A)+\overrightarrow{BA}\wedge\vec{R}$

Classement et description des torseurs

Le nombre $\vec{f}(Q).\vec{R}$ est indépendant du point Q c'est l'invariant scalaire du torseur $\vec{f}$

On note : $I_{\vec{f}} = \vec{f}(Q).\vec{R}$

C'est la projection du moment sur le vecteur du torseur.

Dans le cas où $\vec{f}(Q).\vec{R} = 0$ on a un torseur élémentaire : glisseur ou couple

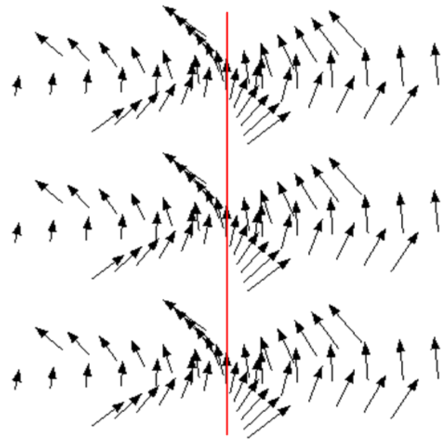
Pour visualiser le champ de vecteurs, on dessine un vecteur $\vec{f}(Q)$ en différents points Q

Le cas général correspond au cas où l'invariant scalaire du torseur n'est pas nul.

$$\vec{f}(Q).\vec{R} \neq 0$$

Propriété : L'ensemble des points tels que le vecteur moment $\vec{f}(Q)$ et le vecteur du torseur $\vec{R}$ sont colinéaires est une droite appelée axe du torseur.

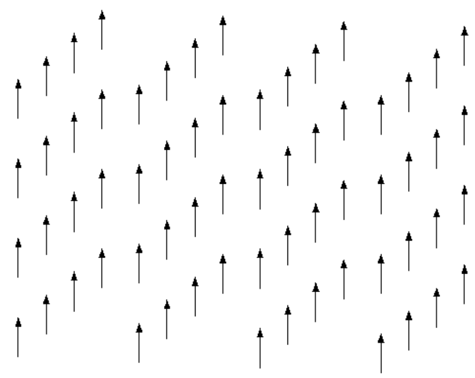
On peut imaginer que l'on a le champ des vitesses d'un mouvement hélicoïdal.



Un torseur-couple, ou un couple est défini par $\vec{R} = \vec{0}$

C'est un champ de moment constant.

C'est par exemple le champ des vitesses d'un solide indéformable en translation.
Une translation est définie pas $\vec{\Omega} = \vec{0}$



Un glisseur est défini par $\vec{f}(Q).\vec{R} = 0$ et $\vec{R} \neq \vec{0}$

On peut imaginer que l'on a le champ des vitesses d'un mouvement de rotation d'un solide indéformable.

Propriété : L'ensemble des points où le vecteur moment est nul $\vec{f}(Q) = \vec{0}$ est une droite appelée axe du glisseur.

On peut imaginer que l'on a le champ de moment d'un vecteur lié $(A, \vec{R})$ ou $(A, \vec{F})$ le point A étant un point de l'axe du glisseur on a $\vec{M}(A) = \vec{0}$

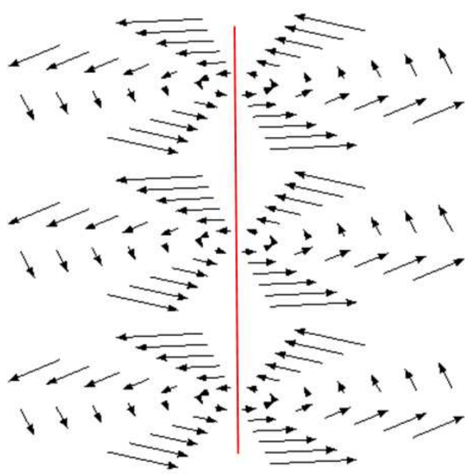
$$\vec{M}(Q) = \vec{M}(A) + \vec{QA} \wedge \vec{F} = \vec{QA} \wedge \vec{F}$$

On reconnaît $M = F.r$

On peut aussi imaginer que l'on a le champ des vitesses d'un mouvement de rotation on a $\vec{V}(A) = \vec{0}$.

$$\vec{V}(Q) = \vec{V}(A) + \vec{QA} \wedge \vec{\Omega} = \vec{QA} \wedge \vec{\Omega}$$

On reconnaît $V = \Omega.r$



Exemples de torseurs

Champ des vitesses d'un solide S_1 indéformable par rapport à un repère R_0

$$\overrightarrow{V_{1/0}} : \quad \mathscr{E} \rightarrow E$$

$$A \rightarrow \overrightarrow{V_{1/0}}(A) = \overrightarrow{V_{1/0}}(B) + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

La composition des vitesses s'écrit : $\overrightarrow{V_{1/0}} = \overrightarrow{V_{1/2}} + \overrightarrow{V_{2/0}}$ qui est une somme de torseurs.

Torseur dynamique d'un système matériel Σ par rapport à un repère R_0

$$\overrightarrow{\delta_{\Sigma/0}} : \mathscr{E} \rightarrow E$$

$$A \rightarrow \overrightarrow{\delta_{\Sigma/0}}(A) = \int_{\Sigma} \overrightarrow{AQ} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{/0}}(Q)dm$$

On rencontrera le torseur cinétique d'un système matériel à masse conservative défini ici par rapport à un repère R_0

$$\overrightarrow{\sigma_{\Sigma/0}} : \quad \mathscr{E} \rightarrow E$$

$$A \rightarrow \overrightarrow{\sigma_{\Sigma/0}}(A) = \int_{\Sigma} \overrightarrow{AQ} \wedge \overrightarrow{V_{/0}}(Q)dm$$

Champ des petits déplacements d'un solide S_1 indéformable par rapport à un repère R_0

$$\overrightarrow{D_{1/0}} : \quad \mathscr{E} \rightarrow E$$

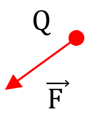
$$A \rightarrow \overrightarrow{D_{1/0}}(A) = \overrightarrow{D_{1/0}}(B) + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\varphi_{1/0}}$$

Torseurs à structure définis par un champ de forces concentrées

- Cas d'un seul vecteur $\vec{F}$ en un point Q

$$\vec{M} : \quad \mathscr{E} \rightarrow E$$

$$A \rightarrow \vec{M}(A) = \overrightarrow{AQ} \wedge \vec{F}$$

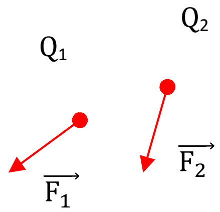


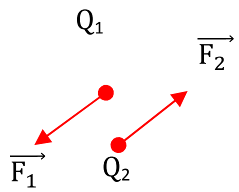
le torseur $\vec{M}$ est un glisseur

- Cas de deux vecteurs, $\overrightarrow{F_1}$ en un point Q_1 et $\overrightarrow{F_2}$ en un point Q_2

$$\vec{M} : \mathscr{E} \rightarrow E$$

$$A \rightarrow \vec{M}(A) = \overrightarrow{AQ_1} \wedge \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{AQ_2} \wedge \overrightarrow{F_2}$$



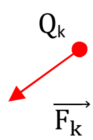


Si $\overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2}$ le torseur $\vec{M}$ est un couple $\vec{M}(A) = \overrightarrow{AQ_1} \wedge \overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{AQ_2} \wedge \overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{Q_2Q_1} \wedge \overrightarrow{F_1}$

- Cas de N vecteur $\overrightarrow{F_k}$ en des points Q_k

$$\vec{M} : \mathscr{E} \rightarrow E$$

$$A \rightarrow \vec{M}(A) = \sum_{k=1}^{N} \overrightarrow{AQ_k} \wedge \overrightarrow{F_k}$$



Contre-exemples

Le champ des vitesses d'un fluide par rapport à un repère R_0 n'est pas toujours un torseur, en effet, deux particules fluide peuvent s'éloigner ou se rapprocher.

$$\overrightarrow{V_{/0}} : \quad \mathscr{E} \rightarrow E$$

$$A \rightarrow \overrightarrow{V_{/0}}(A)$$

Le champ de forces réparties $\overrightarrow{f_{\bar{\Sigma}\rightarrow\Sigma}}$ n'est pas toujours un torseur, en effet, il peut varier de nombreuses façons.

Le champ des accélérations $\overrightarrow{\Gamma_{/g}}$ n'est pas toujours un torseur, même pour un solide indéformable.

Pour un solide indéformable nous avons le lien suivant entre le champ des accélérations en A et en B

$$\overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(A) = \overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(B) + \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{/g} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} + \overrightarrow{AB} \wedge \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right]_{/g}$$

Cordonnées vectorielles d'un torseur

L'espace vectoriel des torseurs est un sous espace vectoriel des applications de $\mathscr{E} \rightarrow$ E

$$\vec{f} : \quad \mathscr{E} \rightarrow E$$
$$A \rightarrow \vec{f}(A)$$

Les deux lois sont : $\vec{f} = \overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2}$ $\quad \vec{f} = k.\overrightarrow{f_1}$

C'est à dire que $\forall$ Q $\in \mathscr{E}$, $\vec{f}(Q)=\overrightarrow{f_1}(Q) + \overrightarrow{f_2}(Q)$ et $\vec{f}(Q)=k.\overrightarrow{f_1}(Q)$

Remarque : Il n'y a pas à donner une définition particulière pour ces deux opérations, c'est simplement la définition commune à tous les champs.

Il faut cependant montrer que, pour des torseurs, en changeant de points, on obtient : $\vec{R} = \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2}$ et $\vec{R} = k.\overrightarrow{R_1}$

$\vec{f}(B)=\overrightarrow{f_1}(B) + \overrightarrow{f_2}(B)=\overrightarrow{f_1}(A)+\overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{f_2}(A)+\overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{AB}$

On a bien : $\vec{f}(B) = \vec{f}(A)+\left(\overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2}\right)\wedge \overrightarrow{AB}$ $\quad \vec{f}$ est bien un torseur et son vecteur est vecteur $\vec{R} = \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2}$

La somme de deux torseurs est bien un torseur alors que si on additionne deux glisseurs, on n'obtient pas forcement un glisseur!

On a de même : $\vec{f}(B)=k.\overrightarrow{f_1}(B)=k.\left(\overrightarrow{f_1}(A)+\overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{AB}\right) = k.\overrightarrow{f_1}(A)+k.\overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{AB}= \vec{f}(A)+k.\overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{AB}$

Il existe un isomorphisme, qui dépend du choix d'un point, entre l'espace vectoriel $\mathbb{T}$ des torseurs et $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

$$\varphi_A : \quad \mathbb{T} \rightarrow E\times E \sim \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \qquad \mathbb{T} \text{ est donc de dimension 6}$$
$$\vec{f} \rightarrow \varphi_A(\vec{f})=(\vec{R},\vec{f}(A))$$

$\vec{R}$ est le vecteur du torseur $\vec{f}$

Le couple de vecteurs $(\vec{R},\vec{f}(A))$ est appelé cordonnées vectorielles en A du torseur $\vec{f}$

On pourra noter : $\vec{f}=(\vec{R},\vec{f}(A))_A$ ou $\vec{f}=\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{f}(A) \end{Bmatrix}_A$ On met $\vec{R}$ en premier.

Exemple d'un torseur cinématique : $\vec{V}=(\omega\vec{y},v\vec{x})_A$ c'est à dire que : $\vec{\Omega} = \omega\vec{y}$ et $\vec{V}(A) = v\vec{x}$

Exemple d'un torseur d'effort : $\vec{M}=(F\vec{z},C_m\vec{z})_A$ c'est à dire que : $\vec{F} = F\vec{z}$ et $\vec{M}(A) = C_m\vec{z}$

Les vecteurs $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ sont des vecteurs unitaires.

Cordonnées scalaires d'un torseur

Dans un repère orthonormé $(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ on définit les coordonnées scalaires ou plückeriennes d'un torseur sur une base de glisseurs et de couples. Cette base correspond à la base $\{(\vec{x},\vec{0}),(\vec{y},\vec{0}),(\vec{z},\vec{0}),(\vec{0},\vec{x}),(\vec{0},\vec{y}),(\vec{0},\vec{z})\}$ de E×E

$$\vec{M}=\begin{Bmatrix} F_x M_x \\ F_y M_y \\ z\ M_z \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = F_x\overrightarrow{\mathcal{G}_{(A,\vec{x})}} + F_y\overrightarrow{\mathcal{G}_{(A,\vec{y})}} + F_z\overrightarrow{\mathcal{G}_{(A,\vec{z})}} + M_x\overrightarrow{\mathcal{C}_{\vec{x}}} + M_y\overrightarrow{\mathcal{C}_{\vec{y}}} + M_z\overrightarrow{\mathcal{C}_{\vec{z}}}$$

C'est bien le torseur $\vec{M}$

$\overrightarrow{\mathcal{G}_{(A,\vec{x})}} : \mathscr{E} \rightarrow E$ Glisseur unitaire d'axe $(A,\vec{x})$

$Q \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{G}_{(A,\vec{x})}}(Q)=\overrightarrow{QA} \wedge \vec{x} = \vec{x}\wedge \overrightarrow{AQ}$ pour 1 N

$\overrightarrow{\mathcal{C}_{\vec{x}}} : \mathscr{E} \rightarrow E$ Couple unitaire de direction $\vec{x}$

$Q \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{C}_{\vec{x}}}(Q)=\vec{x}$ pour 1 N.m

On a bien :

$$\vec{M}(Q) = F_x\,\overrightarrow{QA} \wedge \vec{x} + F_y\,\overrightarrow{QA} \wedge \vec{y} + F_z\,\overrightarrow{QA} \wedge \vec{z} + M_x\,\vec{x} + M_y\,\vec{y} + M_z\,\vec{z}$$
$$\vec{M}(Q) = \overrightarrow{QA} \wedge F_x\vec{x} + \overrightarrow{QA} \wedge F_y\vec{y} + \overrightarrow{QA} \wedge F_z\,\vec{z} + M_x\,\vec{x} + M_y\,\vec{y} + M_z\,\vec{z}$$

Soit : $\vec{M}(Q) = \overrightarrow{QA} \wedge \vec{F} + \vec{M}(A)$

Comoment ou produit de deux torseurs

$$\times : \mathbb{T}\times\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\overrightarrow{T_1},\overrightarrow{T_2}) \rightarrow \overrightarrow{T_1}\times\overrightarrow{T_2} = \overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{T_2}(A)+\overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{T_1}(A)$$

Le comoment de deux torseurs est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{T}\times\mathbb{T}$

Le comoment semble dépendre d'un point. On va changer de point pour calculer quelle est cette dépendance.

$$\overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{T_2}(A)+\overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{T_1}(A)=\overrightarrow{R_1}.\left(\overrightarrow{T_2}(B)+\overrightarrow{R_2}\wedge\overrightarrow{BA}\right)+\overrightarrow{R_2}.\left(\overrightarrow{T_1}(B)+\overrightarrow{R_1}\wedge\overrightarrow{BA}\right)$$

$$\overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{T_2}(A)+\overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{T_1}(A)=\overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{T_2}(B)+\overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{T_1}(B)+\overrightarrow{R_1}.\left(\overrightarrow{R_2}\wedge\overrightarrow{BA}\right)+\overrightarrow{R_2}.\left(\overrightarrow{R_1}\wedge\overrightarrow{BA}\right)$$

Ces deux produits mixtes présentent 1 permutation, ils sont donc opposés.

On a le même résultat en prenant les moments en A ou en B : $\overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{T_2}(A)+\overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{T_1}(A)=\overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{T_2}(B)+\overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{T_1}(B)$

Le comoment de deux torseurs ne dépend que de torseurs et pas d'un point.

On aura donc le choix d'un point pour simplifier les calculs des moments.

On rencontrera plus loin les comoments suivants.

$P_{\bar{S}\rightarrow S/g} = \overrightarrow{M_{\bar{S}\rightarrow S}} \times \overrightarrow{V_{S/g}}$	Puissance galiléenne des efforts extérieurs au solide S
$P_{S_1\leftrightarrow S_2} = \overrightarrow{M_{S_1\rightarrow S_2}} \times \overrightarrow{V_{S_2/S_1}}$	Puissance des inter-efforts entre les solides S_1 et S_2
$E_{cS/g} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\sigma_{S/g}} \times \overrightarrow{V_{S/g}}$	Énergie cinétique galiléenne du solide S

Expression analytique d'un comoment

Prenons l'exemple d'une puissance : $P_{1\rightarrow 2/g} = \overrightarrow{M_{1\rightarrow 2}} \times \overrightarrow{V_{2/g}}$

$$\overrightarrow{M_{1\rightarrow 2}}=\begin{Bmatrix} F_x M_x \\ F_y M_y \\ F_z M_z \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \overrightarrow{V_{2/g}}=\begin{Bmatrix} \Omega_x V_x \\ \Omega_y V_y \\ \Omega_y V_z \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$P_{1\rightarrow 2/g} = \overrightarrow{M_{1\rightarrow 2}}(A)\overrightarrow{\Omega_{1\rightarrow 2}} + \overrightarrow{V_{2/g}}(A).\overrightarrow{F_{1\rightarrow 2}}$$

$$P_{1\rightarrow 2/g} = F_x.V_x + F_y.V_y + F_z.V_z + M_x.\Omega_x + M_y.\Omega_y + M_z.\Omega_z$$

Comoment d'un torseur à structure et d'un torseur quelconque

On transforme un comoment en une intégrale d'un produit scalaire et réciproquement.

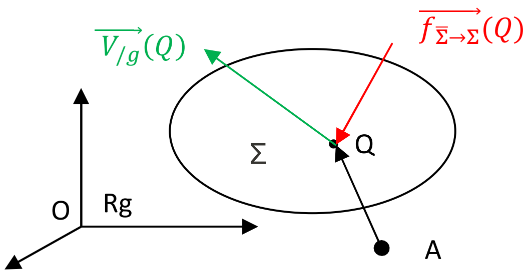
Prenons comme exemple la puissance galiléenne des efforts extérieurs au solide S

$$\overrightarrow{M_{\bar{S}\rightarrow S}} \times \overrightarrow{V_{S/g}} = \overrightarrow{M_{\bar{S}\rightarrow S}}(A).\overrightarrow{\Omega_{S/g}} + \overrightarrow{F_{\bar{S}\rightarrow S}}.\overrightarrow{V_{S/g}}(A)$$

$$\overrightarrow{M_{\bar{S}\rightarrow S}} \times \overrightarrow{V_{S/g}} = \int_\Sigma \overrightarrow{AQ}\wedge\overrightarrow{f_{\bar{\Sigma}\rightarrow\Sigma}}(Q)\,dm.\overrightarrow{\Omega_{S/g}} + \int_\Sigma \overrightarrow{f_{\bar{\Sigma}\rightarrow\Sigma}}(Q)\,dm.\overrightarrow{V_{S/g}}(A)$$

$$\overrightarrow{M_{\bar{S}\rightarrow S}} \times \overrightarrow{V_{S/g}} = \int_\Sigma \left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\wedge\overrightarrow{AQ}\right).\overrightarrow{f_{\bar{\Sigma}\rightarrow\Sigma}}(Q)\,dm + \int_\Sigma \overrightarrow{V_{S/g}}(A).\overrightarrow{f_{\bar{\Sigma}\rightarrow\Sigma}}(Q)\,dm$$

$$\overrightarrow{M_{\bar{S}\rightarrow S}} \times \overrightarrow{V_{S/g}} = \int_\Sigma \overrightarrow{V_{S/g}}(Q).\overrightarrow{f_{\bar{\Sigma}\rightarrow\Sigma}}(Q)\,dm$$



C'est l'intégrale du produit scalaire suivant.

Moment $\overrightarrow{V_{S/g}}(Q)$ en un point courant Q du torseur $\overrightarrow{V_{S/g}}$ par la valeur en Q du champ $\overrightarrow{f_{\bar{\Sigma}\rightarrow\Sigma}}$ qui définit $\overrightarrow{M_{\bar{S}\rightarrow S}}$ le torseur à structure.

Le dessin montre cette somme en chaque point courant sans référence à un point particulier ce qui montre que le comoment ne dépend pas d'un point.

C'est ici une somme de puissance m/s.N = J/s = W $\qquad P_{\bar{S}\rightarrow S/g} = \overrightarrow{M_{\bar{S}\rightarrow S}} \times \overrightarrow{V_{S/g}}$

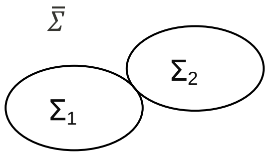
On peut faire toute la mécanique générale en n'utilisant que des vecteurs. L'intérêt des torseurs est d'écrire de façon synthétique, globale, des résultats classiques. On facilite ainsi les démonstrations et la mémorisation des démarches et des résultats comme on va continuer à le constater.

Théorème des actions mutuelles

Soit une partition de Σ

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ avec $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$

On applique le PFD à Σ à Σ_1 et à Σ_2 Σ_1



$\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}} = \overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}$

$\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma_1}\to\Sigma_1}} = \overrightarrow{\delta_{\Sigma_1/g}}$ $\quad \bar{\Sigma_1} = \Sigma_2 \cup \bar{\Sigma}$ avec $\Sigma_2 \cap \bar{\Sigma} = \emptyset$

$\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma_2}\to\Sigma_2}} = \overrightarrow{\delta_{\Sigma_2/g}}$ $\quad \bar{\Sigma_2} = \Sigma_1 \cup \bar{\Sigma}$ avec $\Sigma_1 \cap \bar{\Sigma} = \emptyset$

$\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to 1}} + \overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to 2}} = \overrightarrow{\delta_{1/g}} + \overrightarrow{\delta_{2/g}}$ On note 1 et 2 à la place de Σ_1 et Σ_2

$\overrightarrow{M_{2\to 1}} + \overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to 1}} = \overrightarrow{\delta_{1/g}}$

$\overrightarrow{M_{1\to 2}} + \overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to 2}} = \overrightarrow{\delta_{2/g}}$

On en déduit l'égalité suivante.

$$\overrightarrow{M_{1\to 2}} = -\overrightarrow{M_{2\to 1}}$$

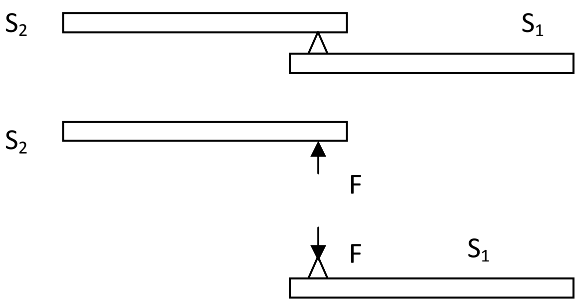
Le torseur des efforts de 1 sur 2 est l'opposé du torseur des efforts de 2 sur 1

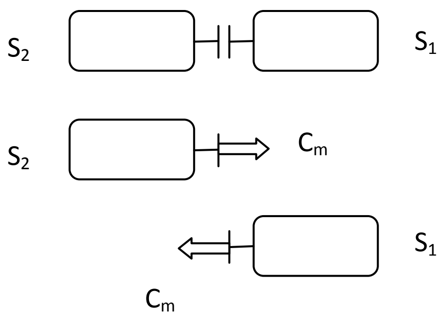
On peut écrire ce résultat sous la forme de deux équations vectorielles.

$\overrightarrow{F_{1\to 2}} = -\overrightarrow{F_{2\to 1}}$ Les vecteurs forces sont opposés

$\overrightarrow{M_{1\to 2}}(\mathrm{A}) = -\overrightarrow{M_{2\to 1}}(A)$ Les vecteurs moments en un point quelconque sont opposés

Donnons deux exemples de paramétrages qui tiennent compte des actions mutuelles





Justification : $\vec{u}$ est un vecteur unitaire $\uparrow \vec{u}$

$\overrightarrow{F_{1\to 2}} = F\vec{u}$ F en N

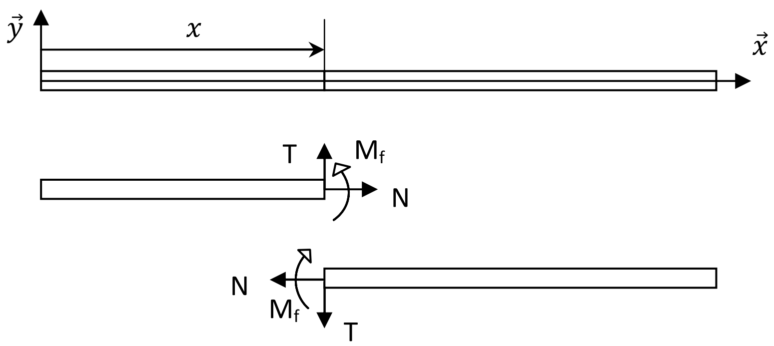
et $\overrightarrow{F_{2\to 1}} = -F\vec{u}$

$\vec{u}$ est un vecteur unitaire $\vec{u}$ $\Rightarrow$

$\overrightarrow{M_{1\to 2}}(\mathrm{A}) = C_m\vec{u}$ A quelconque C_m en N.m

et $\overrightarrow{M_{2\to 1}}(\mathrm{A}) = -C_m\vec{u}$

Efforts transmis dans une section droite d'une poutre en résistance des matériaux



Remarque sur la dérivée des fonctions vectorielles

On ne dérive pas par rapport à un repère, on dérive une fonction. En notant $\frac{d}{dt}\left[\vec{U}\right]_{/g}$ on fait porter $/g$ sur la fonction pour indiquer que l'on dérive la fonction définie dans le repère en indice.

par exemple on écrit : $\frac{d}{dt}\left[\vec{U}\right]_{/2} = \frac{d}{dt}\left[\vec{U}\right]_{/1} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \Lambda \vec{U}$

Moment dynamique galiléen pour un système matériel quelconque, à masse conservative Σ

Moment dynamique en fonction du moment cinétique : $\overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}(\mathrm{A}) = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{\Sigma/g}}(\mathrm{A})\right]_{/g} + m_\Sigma . \overrightarrow{V_{/g}}(A)\ \Lambda\ \overrightarrow{V_{/g}}(G)$

Le point A est quelconque, en mouvement ou pas, sur un solide ou pas. On retient : $\vec{\delta}(\mathrm{A}) = \frac{d}{dt}\vec{\sigma}(\mathrm{A}) + m.\vec{V}(A)\ \Lambda \vec{V}(G)$

Pour démontrer ce théorème, on dérive le moment cinétique.

$\overrightarrow{\sigma_{\Sigma/g}}(\mathrm{A}) = \int_\Sigma \overrightarrow{AQ} \Lambda \overrightarrow{V_{/g}}(Q) dm(Q)$ Moment en un point quelconque A de $\overrightarrow{\sigma_{\Sigma/g}}$ torseur cinétique galiléen de Σ

Pour un système matériel Σ à masse conservative, la dérivation $\frac{d}{dt}$ peut entrer ou sortir de l'intégrale.

$$\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{\Sigma/g}}(\mathrm{A})\right]_{/g} = \int_\Sigma \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AQ}\right]_{/g} \Lambda \overrightarrow{V_{/g}}(Q) dm + \int_\Sigma \overrightarrow{AQ} \Lambda \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{V_{/g}}(Q)\right]_{/g} dm$$

$$\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{\Sigma/g}}(\mathrm{A})\right]_{/g} = \int_\Sigma \left(\overrightarrow{V_{/g}}(Q) - \overrightarrow{V_{/g}}(A)\right) \Lambda \overrightarrow{V_{/g}}(Q) dm + \int_\Sigma \overrightarrow{AQ} \Lambda \overrightarrow{\Gamma_{/g}}(Q) dm$$

$$\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{\Sigma/g}}(\mathrm{A})\right]_{/g} = -\overrightarrow{V_{/g}}(A) \Lambda \int_\Sigma \overrightarrow{V_{/g}}(Q) dm + \int_\Sigma \overrightarrow{AQ} \Lambda \overrightarrow{\Gamma_{/g}}(Q) dm$$

$\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{\Sigma/g}}(\mathrm{A})\right]_{/g} = -\overrightarrow{V_{/g}}(A) \Lambda\, m_\Sigma . \overrightarrow{V_{/g}}(G) + \overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}(\mathrm{A})$ ce qui démontre le théorème

Cas particuliers

Pour un point A fixe A_f dans le repère galiléen Rg noté g on a : $\overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}(A_f) = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{\Sigma/g}}(A_f)\right]_{/g}$

Pour un point $\mathrm{A} = \mathrm{G}$ $\overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}(\mathrm{G}) = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{\Sigma/g}}(\mathrm{G})\right]_{/g}$

En un point fixe ou en G, le moment dynamique est égal à la dérivée du moment cinétique.

Le système matériel Σ est seulement supposé à masse conservative il peut, par exemple, être déformable.

Rappel sur le centre d'inertie ou centre de gravité de Σ

On va montrer que : $\int_\Sigma \overrightarrow{V_{/g}}(Q) dm = m_\Sigma . \overrightarrow{V_{/g}}(G)$

Rappelons la définition du centre d'inertie à l'instant t du système matériel $\Sigma(t)$

$\overrightarrow{AG(t)} = \frac{1}{m(\Sigma(t))} \int_{\Sigma_t} \overrightarrow{AQ(t)} dm(Q(t))$

soit $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m_\Sigma} \int_\Sigma \overrightarrow{AQ} dm$ Pour $\mathrm{A} = \mathrm{G}$ on a : $\int_\Sigma \overrightarrow{GQ} dm = \vec{0}$

On a une $\int_\Sigma$ donc si on a : $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ avec $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ alors : $\overrightarrow{AG} = \frac{m_1 \overrightarrow{AG_1} + m_2 \overrightarrow{AG_2}}{m_1 + m_2}$

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m(\Sigma)} \int_\Sigma \overrightarrow{AQ} dm$ $\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AG}\right]_{/g} = \frac{1}{m(\Sigma)} \int_\Sigma \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AQ}\right]_{/g} dm = \frac{1}{m(\Sigma)} \int_\Sigma \left(\overrightarrow{V_{/g}}(Q) - \overrightarrow{V_{/g}}(A)\right) dm$

$\overrightarrow{V_{/g}}(G) - \overrightarrow{V_{/g}}(A) = \frac{1}{m(\Sigma)} \int_\Sigma \left(\overrightarrow{V_{/g}}(Q) - \overrightarrow{V_{/g}}(A)\right) dm$ soit : $\overrightarrow{V_{/g}}(G) = \frac{1}{m(\Sigma)} \int_\Sigma \overrightarrow{V_{/g}}(Q) dm$

On a donc $\int_\Sigma \overrightarrow{V_{/g}}(Q) dm(Q) = m_\Sigma . \overrightarrow{V_{/g}}(G)$

Le point G est unique, en effet, si $\overrightarrow{BG'} = \frac{1}{m_\Sigma} \int_\Sigma \overrightarrow{BQ} dm$

$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG'} - \overrightarrow{AG}$

$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{m(\Sigma)} \int_\Sigma \left(\overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{AQ}\right) dm = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{m(\Sigma)} \int_\Sigma \overrightarrow{BA} dm = \vec{0}$ $G = G'$

Moment cinétique en un point quelconque d'un solide

Pour un point quelconque A on a : $\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(\mathrm{A})= \int_S \overrightarrow{AQ}\Lambda\overrightarrow{V_{S/g}}(Q)dm$

Pour un solide, le champ de vitesse $\overrightarrow{V_{S/g}}$ est un torseur, ce qui va nous permettre de passer par un point de S.

$$\overrightarrow{V_{S/g}}(Q) = \overrightarrow{V_{S/g}}(A_s) + \overrightarrow{\Omega_{S/g}}\,\Lambda\,\overrightarrow{A_sQ} \qquad A_s \text{ point du solide } S$$

$$\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(\mathrm{A})= \int_S \overrightarrow{AQ}\Lambda\left(\overrightarrow{V_{S/g}}(A_s) + \overrightarrow{\Omega_{S/g}}\,\Lambda\,\overrightarrow{A_sQ}\right)dm$$

$$\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(\mathrm{A})= \int_S \overrightarrow{AQ}\Lambda\,\overrightarrow{V_{S/g}}(A_s)dm + \int_S \left(\overrightarrow{AA_s} + \overrightarrow{A_sQ}\right)\Lambda\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\,\Lambda\,\overrightarrow{A_sQ}\right)dm$$

$$\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(\mathrm{A})= m_S\,\overrightarrow{AG}\Lambda\overrightarrow{V_{S/g}}(A_s) + m_S\overrightarrow{AA_s}\;\Lambda\;\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\,\Lambda\,\overrightarrow{A_sG}\right) + \int_S \overrightarrow{A_sQ}\Lambda\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\,\Lambda\,\overrightarrow{A_sQ}\right)dm$$

La dernière intégrale dépend du vecteur $\overrightarrow{\Omega_{S/g}}$ et du solide S et du point A_s On définit alors l'opérateur suivant.

L'opérateur $\vec{I}_{A,S} : \vec{u} \to \vec{I}_{A,S}(\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{AQ}\Lambda\left(\vec{u}\,\Lambda\,\overrightarrow{AQ}\right)dm$ est l'opérateur d'inertie en A du solide S

Moment cinétique en un point A quelconque est donné par la formule à rallonge suivante.

$$\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(\mathrm{A}) = m_S\,\overrightarrow{AG}\Lambda\overrightarrow{V_{S/g}}(A_s) + m_S\overrightarrow{AA_s}\;\Lambda\;\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\,\Lambda\,\overrightarrow{A_sG}\right) + \vec{I}_{A_s,S}\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\right)$$

Cas particuliers

Il y a deux cas simples à retenir :

$\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(G) = \vec{I}_{G,S}\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\right)$ Au centre de gravité du solide

$\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(A_{sf}) = \vec{I}_{A_{sf},S}\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\right)$ En un point du solide, fixe dans Rg

Cas où $A = A_s$ point du solide : $\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(A_s) = m_S\,\overrightarrow{A_sG}\Lambda\overrightarrow{V_{S/g}}(A_s) + \vec{I}_{A_s,S}\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\right)$

En général $\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(A_s) \neq \vec{I}_{A_s,S}\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\right)$ (égalité si $A_s = G$ ou $\overrightarrow{V_{S/g}}(A_s) = \vec{0}$ ou encore $\overrightarrow{A_sG} \perp \overrightarrow{V_{S/g}}(A_s)$)

Démarche en deux étapes pour se passer de la formule générale

On calcule $\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(A_s)$ pour lire directement le terme complémentaire : $m_S\,\overrightarrow{A_sG}\Lambda\overrightarrow{V_{S/g}}(A_s)$

Puis on utilise le changement de point pour le torseur $\overrightarrow{\sigma_{S/g}}$

$$\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(A) = \overrightarrow{\sigma_{S/g}}(A_s) + \overrightarrow{AA_s}\Lambda\,m_S\overrightarrow{V_{S/g}}(\mathrm{G})$$

Pour un solide, le champ de vitesse $\overrightarrow{V_{S/g}}$ est un torseur : $\overrightarrow{V_{S/g}}(Q) = \overrightarrow{V_{S/g}}(A_s) + \overrightarrow{\Omega_{S/g}}\,\Lambda\,\overrightarrow{A_sQ}$

$$\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(A_s)= \int_S \overrightarrow{A_sQ}\Lambda\overrightarrow{V_{S/g}}(Q)dm$$

$$\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(A_s)= \int_S \overrightarrow{A_sQ}\Lambda\left(\overrightarrow{V_{S/g}}(A_s) + \overrightarrow{\Omega_{S/g}}\,\Lambda\,\overrightarrow{A_sQ}\right)dm$$

$$\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(A_s)= m_S\,\overrightarrow{A_sG}\Lambda\overrightarrow{V_{S/g}}(A_s) + \int_S \overrightarrow{A_sQ}\Lambda\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\,\Lambda\,\overrightarrow{A_sQ}\right)dm$$

On a alors la formule à retenir ou à retrouver rapidement : $\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(A_s)= m_S\,\overrightarrow{A_sG}\Lambda\,\overrightarrow{V_{S/g}}(A_s) + \vec{I}_{A_s,S}\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\right)$

puis $\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(A) = m_S\,\overrightarrow{A_sG}\Lambda\,\overrightarrow{V_{S/g}}(A_s) + \vec{I}_{A_s,S}\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\right) + \overrightarrow{AA_s}\Lambda\,m_S\overrightarrow{V_{S/g}}(\mathrm{G})$

C'est bien la relation ci-dessus : $\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(\mathrm{A}) = m_S\,\overrightarrow{AG}\Lambda\overrightarrow{V_{S/g}}(A_s) + m_S\overrightarrow{AA_s}\;\Lambda\;\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\,\Lambda\,\overrightarrow{A_sG}\right) + \vec{I}_{A_s,S}\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\right)$

Étude de l'opérateur d'inertie d'un solide

La définition de l'opérateur d'inertie du solide S en un point A est l'application vectorielle suivante.

$$\vec{I}_{A,S} : \quad E \to E$$
$$\vec{u} \to \vec{I}_{A,S}(\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{AQ} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AQ}) dm$$

Unités : kg.m^2

L'opérateur d'inertie est linéaire et symétrique, sa matrice dans une base orthonormée $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est :

$$I_{(A,S)} = \left(\vec{I}_{A,S}(\vec{x}), \vec{I}_{A,S}(\vec{y}), \vec{I}_{A,S}(\vec{z})\right)$$

Le terme de la première ligne de la première colonne est $\vec{x}.\vec{I}_{A,S}(\vec{x}) = \vec{x}.\int_S \overrightarrow{AQ} \wedge (\vec{x} \wedge \overrightarrow{AQ}) dm$

En notant $\overrightarrow{AQ} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$ $\quad \overrightarrow{AQ} \wedge (\vec{x} \wedge \overrightarrow{AQ}) = (x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}) \wedge (-z.\vec{y} + y.\vec{z}) = (y^2 + z^2)\vec{x} - xy.\vec{y} - xz.\vec{z}$

$\vec{x}.\vec{I}_{A,S}(\vec{x}) = \int_S (y^2 + z^2) dm$ Moment d'inertie par rapport à l'axe $(A,\vec{x})$ du solide S en kg.m^2

$\vec{y}.\vec{I}_{A,S}(\vec{x}) = \int_S -xydm$ Produit d'inertie par rapport aux axes $(A,\vec{x})$ et $(A,\vec{y})$ du solide S en kg.m^2

etc.

$$\begin{bmatrix} \vec{x}.\vec{I}_{A,S}(\vec{x}) & \vec{x}.\vec{I}_{A,S}(\vec{y}) & \vec{x}.\vec{I}_{A,S}(\vec{z}) \\ \vec{y}.\vec{I}_{A,S}(\vec{x}) & \vec{y}.\vec{I}_{A,S}(\vec{y}) & \vec{y}.\vec{I}_{A,S}(\vec{z}) \\ \vec{z}.\vec{I}_{A,S}(\vec{x}) & \vec{z}.\vec{I}_{A,S}(\vec{y}) & \vec{z}.\vec{I}_{A,S}(\vec{z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2)dm(Q) & \int_S -xydm(Q) & \int_S -xzdm(Q) \\ \int_S -xydm(Q) & \int_S (x^2+z^2)dm(Q) & \int_S -yzdm(Q) \\ \int_S -xzdm(Q) & \int_S -yzdm(Q) & \int_S (x^2+y^2)dm(Q) \end{bmatrix}$$

Remarque 1 : Construisons le tenseur d'inertie

$$(\vec{u},\vec{v}) \to \vec{u}.\vec{I}_{A,S}(\vec{v}) = \vec{u}.\int_S \overrightarrow{AQ} \wedge (\vec{v} \wedge \overrightarrow{AQ}) dm$$

$$I_{A,S} : E \times E \to R$$
$$(\vec{u},\vec{v}) \to I_{A,S}(\vec{u},\vec{v}) = \vec{u}.\vec{I}_{A,S}(\vec{v}) = \int_S (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AQ}).(\vec{v} \wedge \overrightarrow{AQ}) dm$$

L'application $I_{A,S}$ est une forme bilinéaire et symétrique $I_{A,S}$ est le tenseur d'inertie en A du solide S

$I_{G,S}$ est le tenseur central d'inertie du solide S

Remarque 2 : Diagonalisation

La matrice de l'opérateur d'inertie, ou du tenseur d'inertie car c'est la même matrice dans une même base, est symétrique et réelle, elle est donc diagonalisable.

Notons $(\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1)$ la base principale d'inertie qui diagonalise le tenseur d'inertie en A du solide S.

$$I_{A,S} = \begin{bmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}_{(A,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} = \begin{bmatrix} I_{(A,\vec{u}_1)} & 0 & 0 \\ 0 & I_{(A,\vec{v}_1)} & 0 \\ 0 & 0 & I_{(A,\vec{w}_1)} \end{bmatrix}_{(A,\vec{u}_1,\vec{v}_1,\vec{w}_1)}$$

Le moment d'inertie principal du solide S par rapport à l'axe $(A,\vec{u}_1)$ est $I_{(A,\vec{u}_1)} = \vec{u}_1.\vec{I}_{A,S}(\vec{u}_1)$

On parle de moment central d'inertie du solide S si on est en G

Remarque 3 : Montrons l'écriture tensorielle sur un exemple.

$$I_{A,S} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}_{(A,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} = I_{11}\vec{x}_1 \otimes \vec{x}_1 + I_{12}\vec{x}_1 \otimes \vec{y}_1 + I_{21}\vec{y}_1 \otimes \vec{x}_1 + I_{22}\vec{y}_1 \otimes \vec{y}_1 + I_{33}\vec{z}_1 \otimes \vec{z}_1$$

On peut comparer à l'écriture suivante. $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$

Théorème de Huygens : On change de point

On dispose parfois des matrices d'inerties en G ou en un autre point du solide, on va établir leur lien.

On cherche donc le lien entre l'opérateur d'inertie $\vec{I}_{A,S}$ et l'opérateur d'inertie $\vec{I}_{G,S}$

On va montrer que $\vec{I}_{A,S} = \vec{I}_{G,S} + \vec{I}_{(A,\{G,m\})}$ $\{G,m\}$ est un point matériel en G de masse m = masse de S

L'opérateur $\vec{u} \rightarrow \vec{I}_{(A,\{G,m\})}(\vec{u}) = m\,\overrightarrow{AG}\Lambda(\vec{u}\,\Lambda\,\overrightarrow{AG})$ qui est aussi symétrique, admet comme matrice dans une base orthonormée $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

$$\begin{bmatrix} m(b^2+c^2) & mab & mac \\ mab & m(a^2+c^2) & mbc \\ mac & mbc & m(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

En notant $\overrightarrow{AG} = a.\vec{x} + b.\vec{y} + c.\vec{z}$

Si la base et le point A sont fixes par rapport au solide alors la matrice est constante. La réciproque est fausse.

Démontrons ce résultat.

$$\vec{I}_{A,S}(\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{AQ}\Lambda(\vec{u}\,\Lambda\,\overrightarrow{AQ})dm = \int_S (\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GQ})\Lambda\left(\vec{u}\,\Lambda\,(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GQ})\right)dm$$

$$\vec{I}_{A,S}(\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{AG}\Lambda\left(\vec{u}\,\Lambda\,(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GQ})\right)dm + \int_S \overrightarrow{GQ}\Lambda\left(\vec{u}\,\Lambda\,(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GQ})\right)dm$$

$$\vec{I}_{A,S}(\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{AG}\Lambda(\vec{u}\,\Lambda\,\overrightarrow{AG})dm \int_S \overrightarrow{AG}\Lambda(\vec{u}\,\Lambda\,\overrightarrow{GQ})dm + \int_S \overrightarrow{GQ}\Lambda(\vec{u}\,\Lambda\,\overrightarrow{AG})dm + \int_S \overrightarrow{GQ}\Lambda(\vec{u}\,\Lambda\,\overrightarrow{GQ})dm$$

On a $\int_\Sigma \overrightarrow{GQ}dm = \vec{0}$

$$\vec{I}_{A,S}(\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{GQ}\Lambda(\vec{u}\,\Lambda\,\overrightarrow{GQ})dm + m.\overrightarrow{AG}\Lambda(\vec{u}\,\Lambda\,\overrightarrow{AG})$$

On a alors le résultat suivant.

$\vec{I}_{A,S} = \vec{I}_{G,S} + \vec{I}_{(A,\{G,m\})}$ $\{G,m\}$ est un point matériel en G de masse m = masse de S

$\vec{x}.\vec{I}_{A,S}(\vec{x}) = \vec{x}.\vec{I}_{G,S}(\vec{x}) + m(b^2+c^2)$ $\vec{x}.\vec{I}_{A,S}(\vec{y}) = \vec{x}.\vec{I}_{G,S}(\vec{y}) - mab$

$\vec{y}.\vec{I}_{A,S}(\vec{y}) = \vec{y}.\vec{I}_{G,S}(\vec{y}) + m(a^2+c^2)$ $\vec{x}.\vec{I}_{A,S}(\vec{z}) = \vec{x}.\vec{I}_{G,S}(\vec{z}) - mac$

$\vec{z}.\vec{I}_{A,S}(\vec{z}) = \vec{z}.\vec{I}_{G,S}(\vec{z}) + m(a^2+b^2)$ $\vec{y}.\vec{I}_{G,S}(\vec{z}) = \vec{y}.\vec{I}_{G,S}(\vec{z}) - mbc$

$$\begin{bmatrix} \vec{x}.\vec{I}_{A,S}(\vec{x}) & \vec{x}.\vec{I}_{A,S}(\vec{y}) & \vec{x}.\vec{I}_{A,S}(\vec{z}) \\ \vec{y}.\vec{I}_{A,S}(\vec{x}) & \vec{y}.\vec{I}_{A,S}(\vec{y}) & \vec{y}.\vec{I}_{A,S}(\vec{z}) \\ \vec{z}.\vec{I}_{A,S}(\vec{x}) & \vec{z}.\vec{I}_{A,S}(\vec{y}) & \vec{z}.\vec{I}_{A,S}(\vec{z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{x}.\vec{I}_{G,S}(\vec{x}) & \vec{x}.\vec{I}_{G,S}(\vec{y}) & \vec{x}.\vec{I}_{G,S}(\vec{z}) \\ \vec{y}.\vec{I}_{G,S}(\vec{x}) & \vec{y}.\vec{I}_{G,S}(\vec{y}) & \vec{y}.\vec{I}_{G,S}(\vec{z}) \\ \vec{z}.\vec{I}_{G,S}(\vec{x}) & \vec{z}.\vec{I}_{G,S}(\vec{y}) & \vec{z}.\vec{I}_{G,S}(\vec{z}) \end{bmatrix} + m\begin{bmatrix} (b^2+c^2) & -ab & -ac \\ -ab & (a^2+c^2) & -bc \\ -ac & -bc & (a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

Calcul direct du moment d'inertie par rapport à un axe

$$I_{(\Delta,S)} = \int_S d^2dm$$

avec d = distance du point Q à l'axe $\Delta = (A,\vec{x})$

On peut remarquer que pour $\vec{u}$ fixé, $I_{(\Delta,S)}$ est minimum pour $\Delta = (G,\vec{u})$

Exemple de démarche de calcul pour deux solides

$\Sigma = S_1 \cup S_2$

$\overrightarrow{F_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}} = m_\Sigma \overrightarrow{\Gamma_{/g}}(G_\Sigma)$ Théorème de la résultante dynamique pour Σ

$\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}(\mathrm{A}) = \overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}(\mathrm{A})$ Théorème du moment dynamique en A pour Σ

$\overrightarrow{F_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}} = m_1 \overrightarrow{\Gamma_{/g}}(G_1) + m_2 \overrightarrow{\Gamma_{/g}}(G_2)$ La quantité d'accélération est additive.

$\overrightarrow{M_{\bar{\Sigma}\to\Sigma}}(\mathrm{A}) = \overrightarrow{\delta_{1/g}}(\mathrm{A}) + \overrightarrow{\delta_{2/g}}(\mathrm{A})$ Le moment dynamique en A est additif.

On peut aussi utiliser la dérivée du moment cinétique, on a donc deux possibilités :

Somme des moments dynamiques :	Moment dynamique en fonction du moment cinétique :
$\overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}(\mathrm{A}) = \overrightarrow{\delta_{1/g}}(\mathrm{A}) + \overrightarrow{\delta_{2/g}}(\mathrm{A})$	$\overrightarrow{\delta_{\Sigma/g}}(\mathrm{A}) = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{\Sigma/g}}(\mathrm{A})\right]_{/g} + \overrightarrow{V_{/g}}(A)\, \Lambda m_\Sigma.\overrightarrow{V_{/g}}(G)$
$\overrightarrow{\delta_{1/g}}(\mathrm{A}) = \dfrac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A})\right]_{/g} + \overrightarrow{V_{/g}}(A)\Lambda\, m_1.\overrightarrow{V_{/g}}(G_1)$	$\overrightarrow{\sigma_{\Sigma/g}}(\mathrm{A}) = \overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A}) + \overrightarrow{\sigma_{2/g}}(\mathrm{A})$
$\overrightarrow{\delta_{2/g}}(\mathrm{A}) = \dfrac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{2/g}}(\mathrm{A})\right]_{/g} + \overrightarrow{V_{/g}}(A)\Lambda\, m_2.\overrightarrow{V_{/g}}(G_2)$	et $m_\Sigma.\overrightarrow{V_{/g}}(G) = m_1.\overrightarrow{V_{/g}}(G_1) + m_2.\overrightarrow{V_{/g}}(G_2)$

Ces deux démarches demandent le calcul de $\overrightarrow{\sigma_{\mathrm{k}/g}}(\mathrm{A})$ et $\overrightarrow{V_{/g}}(G_\mathrm{k})$

Si on a $\vec{I}_{G_1,S_1}$ $\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A}) = \overrightarrow{\sigma_{1/g}}(G_1) + \overrightarrow{AG_1}\Lambda\, m_1\overrightarrow{V_{1/g}}(G_1)$

$\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A}) = \vec{I}_{G_1,S}(\overrightarrow{\Omega_{1/g}}) + \overrightarrow{AG_1}\Lambda\, m_1\overrightarrow{V_{1/g}}(G_1)$

Si on a $\vec{I}_{A_{1\mathrm{f}},S_1}$ $\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A}) = \overrightarrow{\sigma_{1/g}}(A_{1\mathrm{f}}) + \overrightarrow{AA_{1\mathrm{f}}}\Lambda\, m_1\overrightarrow{V_{1/g}}(G_1)$

$A_{1\mathrm{f}}$ fixe dans R_g $\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A}) = \vec{I}_{A_{1\mathrm{f}},S}(\overrightarrow{\Omega_{1/g}}) + \overrightarrow{AA_{1\mathrm{f}}}\Lambda\, m_1\overrightarrow{V_{1/g}}(G_1)$

Si on a $\vec{I}_{A_1,S_1}$ $\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A}) = \overrightarrow{\sigma_{1/g}}(A_1) + \overrightarrow{AA_1}\Lambda\, m_1\overrightarrow{V_{1/g}}(G_1)$

Même en A_1 point de S_1 le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(A_1)$ **n'est pas**, sans autre hypothèses $\vec{I}_{A_1,S_1}(\overrightarrow{\Omega_{1/g}})$

$\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(A_1) = \int_{S_1} \overrightarrow{A_1Q}\Lambda\overrightarrow{V_{1/g}}(Q)dm$

$\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(A_1) = \int_{S_1} \overrightarrow{A_1Q}\Lambda\left(\overrightarrow{V_{S/g}}(A_1) + \overrightarrow{\Omega_{S/g}}\,\Lambda\,\overrightarrow{A_1Q}\right)dm$

$\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(A_1) = m_1\,\overrightarrow{A_1G}\Lambda\overrightarrow{V_{1/g}}(A_1) + \int_{S_1} \overrightarrow{A_1Q}\Lambda\left(\overrightarrow{\Omega_{1/g}}\,\Lambda\,\overrightarrow{A_1Q}\right)dm$

$\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(A_1) = m_1\,\overrightarrow{A_1G}\,\Lambda\,\overrightarrow{V_{1/g}}(A_1) + \vec{I}_{A_1,S_1}\left(\overrightarrow{\Omega_{1/g}}\right)$

Calcul d'une projection de la résultante dynamique

$m_1\overrightarrow{\Gamma_{/g}}(G).\vec{u} = m_1\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{V_{/g}}(G).\vec{u}\right] - m_1\overrightarrow{V_{/g}}(G)\frac{d}{dt}[\vec{u}]_{/g}$

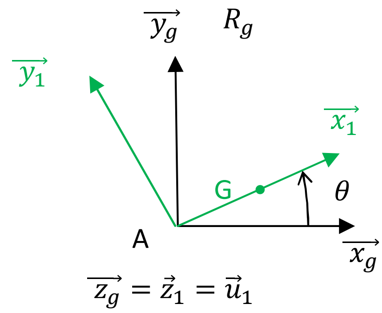
Par exemple, pour une liaison glissière de direction $\vec{u}$ entre un solide de Σ et un solide de $\bar{\Sigma}$

Calcul d'une projection du moment dynamique

$\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{\Sigma/g}}(\mathrm{A})\right]_{/g}.\vec{u} = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{\Sigma/g}}(\mathrm{A}).\vec{u}\right] - \overrightarrow{\sigma_{\Sigma/g}}(\mathrm{A}).\frac{d}{dt}[\vec{u}]_{/g}$

Par exemple, pour une liaison pivot d'axe $(A,\vec{u})$ entre un solide de Σ et un solide de $\bar{\Sigma}$

Dynamique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe dans R_g



Soit $\Delta = (A, \vec{u})$ cet axe et $\overrightarrow{\Omega_{S/g}} = \omega \vec{u}$ Le point A est fixe dans R_g

Le solide S n'est pas supposé équilibré.

On note : $R_g = \left(A, \overrightarrow{x_g}, \overrightarrow{y_g}, \vec{u}\right)$ le repère galiléen, $\overrightarrow{z_g} = \vec{u}$

On note : $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à $S = S_1$ avec $\vec{z}_1 = \vec{u}$

On choisit A et $\vec{x}_1$ tel que : $\overrightarrow{AG} = r\vec{x}_1$ et on paramètre l'angle par $\theta = \left(\overrightarrow{x_g}, \vec{x}_1\right)$

$$\overrightarrow{F_{\bar{1}\to 1}} = m\,\overrightarrow{\Gamma_{1/g}}(G) \qquad \overrightarrow{\Gamma_{1/g}}(G) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{1/g}}(G) \qquad \overrightarrow{V_{1/g}}(G) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{AG} = \omega r \vec{y}_1 \qquad \omega = \theta'$$

$$\overrightarrow{M_{\bar{1}\to 1}}(\mathrm{A}) = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A})\right]_{/g} \qquad A \text{ est fixe dans } R_g \qquad \overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A}) = \bar{\bar{I}}_{A,S_1}\left(\overrightarrow{\Omega_{1/g}}\right)$$

$$I_{A,S_1} = \begin{bmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}_{(A,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} \qquad \overrightarrow{\Omega_{S/g}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} = \omega\vec{z}_1 \qquad \omega = \theta'$$

Si on ne veut que la loi du mouvement :

$$\overrightarrow{M_{\bar{1}\to 1}}(\mathrm{A}).\vec{z}_1 = \vec{z}_1.\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A})\right]_{/g}$$

$$\overrightarrow{M_{\bar{1}\to 1}}(\mathrm{A}).\vec{z}_1 = \frac{d}{dt}\left[\vec{z}_1.\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A})\right]_{/g} = \frac{d}{dt}\left[C_1\omega_1\right]_{/g} \qquad \frac{d}{dt}\left[\vec{z}_1\right]_{/g} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{M_{\bar{1}\to 1}}(\mathrm{A}).\vec{z}_1 = C_1\omega'$$

Si on veut aussi les efforts de liaison :

$$\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A})\right]_{/g} = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A})\right]_{/1} + \overrightarrow{\Omega_{1/g}}\,\Lambda\,\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A})$$

$$\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A})\right]_{/g} = \frac{d}{dt}\left[(-E_1\omega\vec{x}_1 - D_1\omega\vec{y}_1 + C_1\omega\vec{z}_1\right]_{/1} + \omega\vec{z}_1\,\Lambda\,(-E_1\omega\vec{x}_1 - D_1\omega\vec{y}_1 + C_1\omega\vec{z}_1)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A})\right]_{/g} = -E_1\omega'\vec{x}_1 - D_1\omega'\vec{y}_1 + C_1\omega'\vec{z}_1 - E_1\omega^2\vec{y}_1 + D_1\omega^2\vec{x}_1$$

$$\overrightarrow{F_{\bar{1}\to 1}} = m(\omega' r\vec{y}_1 - \omega^2 r\vec{x}_1)$$

$$\overrightarrow{M_{\bar{1}\to 1}}(\mathrm{A}) = (D_1\omega^2 - E_1\omega')\vec{x}_1 - (E_1\omega^2 + D_1\omega')\vec{y}_1 + C_1\omega'\vec{z}_1$$

Dynamique d'un solide en translation soit : $\overrightarrow{\Omega_{S/g}} = \vec{0}$

$$\forall Q \in S,\ \overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(Q) = \overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(G_S) \qquad G_S = G \qquad m_S = m$$

$$\overrightarrow{F_{\bar{S}\to S}} = m\,\overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(G)$$

$$\overrightarrow{M_{\bar{S}\to S}}(\mathrm{A}) = \overrightarrow{AG}\,\Lambda\, m\,\overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(\mathrm{G})$$

ou :

$$\overrightarrow{F_{\bar{S}\to S}} = m\,\overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(G)$$

$$\overrightarrow{M_{\bar{S}\to S}}(\mathrm{G}) = \vec{0}$$

Théorème de la puissance cinétique pour un solide

La dérivée de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide indéformable est égale à la puissance galiléenne des efforts extérieurs au solide $\frac{d}{dt}E_{cS/g} = P_{\bar{S}\to S/g}$ Unités : puissance en W et E_c en J

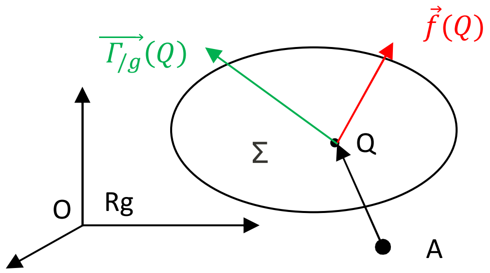
Pour démontrer ce théorème, on applique le principe fondamental de la dynamique a $\Sigma = S$ solide indéformable.

$\overrightarrow{M_{\bar{S}\to S}} = \overrightarrow{\delta_{S/g}}$ On calcule le comoment de chaque membre avec le torseur cinématique $\overrightarrow{V_{S/g}}$

$\overrightarrow{M_{\bar{S}\to S}} \times \overrightarrow{V_{S/g}} = \overrightarrow{\delta_{S/g}} \times \overrightarrow{V_{S/g}}$ L'idée est de projeter sur la direction du mouvement.

$\int_S \overrightarrow{V_{S/g}}(Q).\overrightarrow{df_{\bar{S}\to S}}(Q) = \int_S \overrightarrow{V_{S/g}}(Q).\overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(Q)dm$ car $\overrightarrow{M_{\bar{S}\to S}}$ et $\overrightarrow{\delta_{S/g}}$ sont des torseurs à structure.

Si on reprend le dessin de présentation du champ de vecteurs forces et du champ des accélérations, on visualise bien le produit scalaire en chaque point Q sur $\overrightarrow{V_{S/g}}(Q)$



Puissance galiléenne des efforts extérieurs au solide S

=

Puissance galiléenne des quantités d'accélérations de S

$P_{\bar{S}\to S/g} = \frac{d}{dt}\int_S \frac{1}{2}.\overrightarrow{V_{S/g}}^2(Q)dm$ Variation de l'énergie cinétique galiléenne du solide S

Soit : $P_{\bar{S}\to S/g} = \frac{d}{dt}E_{cS/g}$

Puissance galiléenne des efforts extérieurs au solide S = Dérivée de l'énergie cinétique galiléenne du solide S

Cette équation n'est donc pas indépendante des 6 équations du principe fondamental de la dynamique.

Mise en œuvre du théorème de la puissance cinétique pour un solide

$P_{\bar{S}\to S/g} = \frac{d}{dt}E_{cS/g}$

Avec : $P_{\bar{S}\to S/g} = \overrightarrow{M_{\bar{S}\to S}} \times \overrightarrow{V_{S/g}}$ Puissance galiléenne des efforts extérieurs au solide S

Soit A un point quelconque : $P_{\bar{S}\to S/g} = \overrightarrow{M_{\bar{S}\to S}}(A).\overrightarrow{\Omega_{S/g}} + \overrightarrow{F_{\bar{S}\to S}}.\overrightarrow{V_{S/g}}(A)$

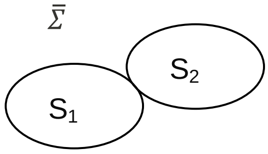
$E_{cS/g} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\sigma_{S/g}} \times \overrightarrow{V_{S/g}}$ Énergie cinétique galiléenne du solide S car $\overrightarrow{\sigma_{S/g}}$ est un torseur à structure.

en effet $\frac{d}{dt}E_{cS/g} = \frac{d}{dt}\int_S \frac{1}{2}.\overrightarrow{V_{S/g}}^2(Q)dm = \frac{d}{dt}\int_S \frac{1}{2}.\overrightarrow{V_{S/g}}(Q)\overrightarrow{V_{S/g}}(Q)dm$

Théorème de la puissance cinétique pour deux solides

Soit $\Sigma = S_1 \cup S_2$ avec $S_1 \cap S_2 = \emptyset$

On applique le TEC à S_1 et à S_2



$\frac{d}{dt}E_{c1/g} = P_{\overline{S_1}\to S_1/g}$

$\frac{d}{dt}E_{c2/g} = P_{\overline{S_2}\to S_2/g}$

$\frac{d}{dt}E_{c1/g} = P_{\overline{\Sigma}\to S_1/g} + P_{S_2\to S_1/g}$ $\quad\quad \overline{S_1} = S_2 \cup \overline{\Sigma}$ avec $S_2 \cap \overline{\Sigma} = \emptyset$

$\frac{d}{dt}E_{c2/g} = P_{\overline{\Sigma}\to S_2/g} + P_{S_1\to S_2/g}$ $\quad\quad \overline{S_2} = S_1 \cup \overline{\Sigma}$ avec $S_1 \cap \overline{\Sigma} = \emptyset$

On somme ces deux équations. $\frac{d}{dt}E_{c1/g} + \frac{d}{dt}E_{c2/g} = P_{\overline{\Sigma}\to S_1/g} + P_{\overline{\Sigma}\to S_2/g} + P_{S_1\to S_2/g} + P_{S_2\to S_1/g}$

On a : $E_{\Sigma/g} = E_{c1/g} + E_{c2/g}$ et $P_{\overline{\Sigma}\to\Sigma/g} = P_{\overline{\Sigma}\to S_1/g} + P_{\overline{\Sigma}\to S_2/g}$

$P_{S_1\to S_2/g} + P_{S_2\to S_1/g} = \overrightarrow{M_{S_1\to S_2}} \times \overrightarrow{V_{S_2/g}} + \overrightarrow{M_{S_2\to S_1}} \times \overrightarrow{V_{S_1/g}} = \overrightarrow{M_{S_1\to S_2}} \times \left(\overrightarrow{V_{S_2/g}} - \overrightarrow{V_{S_1/g}}\right)$

$P_{S_1\to S_2/g} + P_{S_2\to S_1/g} = \overrightarrow{M_{S_1\to S_2}} \times \overrightarrow{V_{S_2/S_1}}$

La puissance des inter-efforts entre S_1 et S_2 ne dépend pas de Rg, on la note avec une double flèche.

$$P_{S_1\leftrightarrow S_2} = \overrightarrow{M_{S_1\to S_2}} \times \overrightarrow{V_{S_2/S_1}}$$

Théorème de l'énergie cinétique pour deux solides : $\frac{d}{dt}E_{\Sigma/g} = P_{\overline{\Sigma}\to\Sigma/g} + P_{S_1\leftrightarrow S_2}$

$$P_{\overline{\Sigma}\to\Sigma/g} = P_{\overline{\Sigma}\overset{g}{\leftrightarrow}\Sigma/g} + P_{\overline{\Sigma}\overset{e}{\leftrightarrow}\Sigma/g} + P_{\overline{\Sigma}\overset{c}{\leftrightarrow}\Sigma/g} \qquad P_{S_1\leftrightarrow S_2} = P_{S_1\overset{g}{\leftrightarrow}S_2} + P_{S_1\overset{e}{\leftrightarrow}S_2} + P_{S_1\overset{c}{\leftrightarrow}S_2}$$

Si une liaison par contact est supposée parfaite alors $P_{S_1\overset{c}{\leftrightarrow}S_2} = 0$

Par exemple, une liaison réalisée par élément roulants est parfaite si on néglige la résistance au roulement.

Une liaison réalisée par glissement est parfaite si on néglige le frottement.

Théorème de la puissance cinétique pour trois solides

Soit $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ avec $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ $\quad S_2 \cap S_3 = \emptyset$ $\quad S_1 \cap S_3 = \emptyset$

Théorème de l'énergie cinétique pour trois solides : $\frac{d}{dt}E_{\Sigma/g} = P_{\overline{\Sigma}\to\Sigma/g} + P_{S_1\leftrightarrow S_2} + P_{S_1\leftrightarrow S_3} + P_{S_2\leftrightarrow S_3}$

Théorème de la puissance cinétique pour N solides

Soit $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{N} S_i$ avec $\forall i,j \in \{1,N\}, i \neq j, S_i \cap S_j = \emptyset$

Théorème de l'énergie cinétique pour N solides :

$$\frac{d}{dt}E_{\Sigma/g} = P_{\overline{\Sigma}\to\Sigma/g} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} P_{\mathrm{S_i}\leftrightarrow\mathrm{S_j}}$$

on retiendra : $\frac{d}{dt}E_{\mathrm{c}} = P_{\mathrm{e}} + P_{\mathrm{i}}$

La dérivée de l'énergie cinétique est égale à la somme des puissances des efforts extérieurs et des puissances des efforts intérieurs.

Énergies potentielles

On cherche dans les puissances, s'il est possible d'écrire certains termes comme des dérivées : $P = -\frac{d}{dt}E_p$

Si c'est possible pour toutes, on a une intégrale première.

On met un signe moins pour obtenir : $\frac{d}{dt}(E_{\Sigma/g} + E_{p,\overline{\Sigma}\to\Sigma/g} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} E_{p,\mathrm{S_i}\leftrightarrow\mathrm{S_j}}) = 0$

D'où l'idée de conservation de l'énergie mécanique dans ce cas.

Ne pas confondre avec l'énergie totale dans le premier principe de thermodynamique : $\frac{d}{dt}(E_{\mathrm{c}} + U) = P_{\mathrm{e}} + P_{\mathrm{th}}$

où l'on cherche aussi s'il est possible d'écrire certains termes comme des dérivées : $P = -\frac{d}{dt}E_p$ d'où : $E_{\mathrm{c}} + U + E_p$

Énergie potentielle des inter-efforts de gravitation pour un solide

On suppose un solide S dans une zone limitée sur terre où la gravité $\vec{g}(Q)$ peut être considérée comme constante.

$$P_{\mathrm{T}\overset{g}{\leftrightarrow}\mathrm{S}} = \overrightarrow{M_{\mathrm{T}\rightarrow\mathrm{S}}} \times \overrightarrow{V_{\mathrm{S/T}}}$$

$$P_{\mathrm{T}\overset{g}{\leftrightarrow}\mathrm{S}} = \overrightarrow{F_{\mathrm{T}\rightarrow\mathrm{S}}} \times \overrightarrow{V_{\mathrm{S/T}}(G)}$$

$$P_{\mathrm{T}\overset{g}{\leftrightarrow}\mathrm{S}} = m\vec{g}\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OG}\right]_{/T}$$

$$P_{\mathrm{T}\overset{g}{\leftrightarrow}\mathrm{S}} = \frac{d}{dt}\left[m\vec{g}.\overrightarrow{OG}\right]_{/T}$$

$$P_{\mathrm{T}\overset{g}{\leftrightarrow}\mathrm{S}} = -\frac{d}{dt}\left[-m\vec{g}.\overrightarrow{OG}\right]_{/T}$$

$$E_{\mathrm{p,T}\overset{g}{\leftrightarrow}\mathrm{S}} = -m\vec{g}.\overrightarrow{OG}$$

$E_{\mathrm{p,T}\overset{g}{\leftrightarrow}\mathrm{S}} = mgZ_G$ avec $\vec{z}$ vertical ascendant $\vec{g} = -g\vec{z}$ et $\overrightarrow{OG}.\vec{z} = Z_G$

Énergie potentielle des inter-efforts de gravitation pour Σ quelconque à masse conservative

$$P_{\mathrm{T}\overset{g}{\leftrightarrow}\Sigma} = P_{\mathrm{T}\overset{g}{\rightarrow}\Sigma/\mathrm{T}} + P_{\Sigma\overset{g}{\rightarrow}\mathrm{T}/\mathrm{T}} = P_{\mathrm{T}\overset{g}{\rightarrow}\Sigma/\mathrm{T}}$$

$$P_{\mathrm{T}\overset{g}{\leftrightarrow}\Sigma} = \int_{\Sigma} \overrightarrow{V_{/T}}(Q).\overrightarrow{f_{\mathrm{T}\rightarrow\Sigma}}(Q)dm(Q)$$

$$P_{\mathrm{T}\overset{g}{\leftrightarrow}\Sigma} = \int_{\Sigma} \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OQ}\right]_{/T}.\vec{g}(Q)dm(Q)$$

$$P_{\mathrm{T}\overset{g}{\leftrightarrow}\Sigma} = \frac{d}{dt}\int_{\Sigma} \left[\overrightarrow{OQ}\right]_{/T}.\vec{g}(Q)dm(Q)$$

Remarquer la notation : $\left[\overrightarrow{OG}\right]_{/T}$

$$P_{\mathrm{T}\overset{g}{\leftrightarrow}\Sigma} = \frac{d}{dt}\left[m\vec{g}.\overrightarrow{OG}\right] = -\frac{d}{dt}\left[-m\vec{g}.\overrightarrow{OG}\right]$$

$$E_{\mathrm{p,T}\overset{g}{\leftrightarrow}\mathrm{S}} = -m\vec{g}.\overrightarrow{OG}$$

$E_{\mathrm{p,T}\overset{g}{\leftrightarrow}\mathrm{S}} = mgZ_G$ avec $\vec{z}$ vertical ascendant $\vec{g} = -g\vec{z}$ et $\overrightarrow{OG}.\vec{z} = Z_G$

Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

On intègre l'équation de la puissance cinétique pour un solide entre les instants t_1 et t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} E_{cS/g}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} P_{\bar{S}\to S/g}(t)\, dt$$

$$E_{cS/g}(t_2) - E_{cS/g}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} P_{\bar{S}\to S/g}(t)\, dt$$

$$E_{cS/g}(t_2) - E_{cS/g}(t_1) = W_{\bar{S}\to S/g}(t_1, t_2)$$

La variation d'énergie cinétique d'un solide entre les instants t_1 et t_2 est égale au travail galiléen des efforts extérieurs au solide entre ces instants. $W_{\bar{S}\to S/g}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P_{\bar{S}\to S/g}(t)\, dt$

La définition d'un travail est l'intégrale d'une puissance. $W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\, dt$

Travail du poids avec $\vec{g}$ constant

$$W_{\mathrm{T}\overset{g}{\to}\Sigma/\mathrm{T}}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P_{\mathrm{T}\overset{g}{\to}\Sigma/\mathrm{T}}(t)\, dt$$

$$W_{\mathrm{T}\overset{g}{\to}\Sigma/\mathrm{T}}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_\Sigma \overrightarrow{V_{/T}}(Q).\overrightarrow{f_{\mathrm{T}\to\Sigma}}(Q) dm(Q)\right] dt$$

$$W_{\mathrm{T}\overset{g}{\to}\Sigma/\mathrm{T}}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_\Sigma \overrightarrow{V_{/T}}(Q).\vec{g} dm(Q)\right] dt$$

$$W_{\mathrm{T}\overset{g}{\to}\Sigma/\mathrm{T}}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} m\overrightarrow{V_{/T}}(G).\vec{g} dt$$

$$W_{\mathrm{T}\overset{g}{\to}\Sigma/\mathrm{T}}(t_1, t_2) = m\vec{g} \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{V_{/T}}(G) dt$$

$$W_{\mathrm{T}\overset{g}{\to}\Sigma/\mathrm{T}}(t_1, t_2) = m\vec{g} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OG}\right]_{/T} dt$$

$$W_{\mathrm{T}\overset{g}{\to}\Sigma/\mathrm{T}}(t_1, t_2) = m\vec{g}.\left[\overrightarrow{OG}(t_2) - \overrightarrow{OG}(t_1)\right] = m\vec{g}.\left[\overrightarrow{OG(t_2)} - \overrightarrow{OG(t_1)}\right]$$

Travail du poids avec $\vec{g}$ constant : $W_{\mathrm{T}\overset{g}{\to}\Sigma/\mathrm{T}}(t_1, t_2) = m\vec{g}.\overrightarrow{G_1G_2}$

Théorème de l'énergie cinétique pour deux solides

$$E_{cS/g}(t_2) - E_{cS/g}(t_1) = W_{\bar{S}\to S/g}(t_1, t_2) + W_{S_1\leftrightarrow S_2}(t_1, t_2)$$

On a : $W_{S_1\leftrightarrow S_2}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} P_{S_1\leftrightarrow S_2}(t) dt$ $\qquad P_{S_1\leftrightarrow S_2} = \overrightarrow{M_{S_1\to S_2}} \times \overrightarrow{V_{S_2/S_1}}$

La variation d'énergie cinétique est égale à la somme du travail des efforts extérieurs et du travail des efforts intérieurs.

Calcul de l'énergie cinétique pour un solide

Partons de la définition.

$$E_{cS/g} = \int_S \frac{1}{2}.\overrightarrow{V_{S/g}}^2(Q)dm = \frac{d}{dt}\int_S \frac{1}{2}.\overrightarrow{V_{S/g}}(Q)\overrightarrow{V_{S/g}}(Q)dm$$

$E_{cS/g} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\sigma_{S/g}} \times \overrightarrow{V_{S/g}}$ Énergie cinétique galiléenne du solide S car $\overrightarrow{\sigma_{S/g}}$ est un torseur à structure.

Soit A un point quelconque : $E_{cS/g} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(\mathrm{A}).\overrightarrow{\Omega_{S/g}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{V_{S/g}}(A).m_s\overrightarrow{V_{S/g}}(G)$

On est ramené au calcul du moment cinétique en A : $\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(\mathrm{A})$

On retrouve donc les deux cas particuliers pour le moment cinétique.

On peut toujours disposer des inerties en G en utilisant un logiciel de CAO

$$E_{cS/g} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(\mathrm{G}).\overrightarrow{\Omega_{S/g}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{V_{S/g}}(G).m_s\overrightarrow{V_{S/g}}(G)$$

$$E_{cS/g} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/g}}.\vec{I}_{G,S}\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\right) + \frac{1}{2}.m_s\left[\overrightarrow{V_{S/g}}(G)\right]^2$$

En un point du solide, fixe dans Rg $\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(A_{sf}) = \vec{I}_{A_{sf},S}\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\right)$

$$E_{cS/g} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(A_{sf}).\overrightarrow{\Omega_{S/g}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{V_{S/g}}(A_{sf}).m_s\overrightarrow{V_{S/g}}(G)$$

$$E_{cS/g} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/g}}.\vec{I}_{A_{sf},S}\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\right)$$

Dans un problème scolaire ou de concours, si on dispose de $\vec{I}_{A_s,S}$ en un point A_s du solide, on écrit $\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(A_s)$

On doit se rappeler que même en un point du solide, le moment cinétique en A_s n'est pas seulement $\vec{I}_{A_s,S}\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\right)$

Retrouvons rapidement le terme supplémentaire.

$$\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(A_s) = \int_S \overrightarrow{A_sQ}\Lambda\overrightarrow{V_{S/g}}(Q)dm$$

$$\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(A_s) = \int_S \overrightarrow{A_sQ}\Lambda\left(\overrightarrow{V_{S/g}}(A_s) + \overrightarrow{\Omega_{S/g}}\,\Lambda\,\overrightarrow{A_sQ}\right)dm$$

$$\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(A_s) = m_S\,\overrightarrow{A_sG}\Lambda\overrightarrow{V_{S/g}}(A_s) + \int_S \overrightarrow{A_sQ}\Lambda\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\,\Lambda\,\overrightarrow{A_sQ}\right)dm$$

On a retrouvé rapidement le terme supplémentaire : $\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(A_s) = m_\Sigma\,\overrightarrow{A_sG}\Lambda\,\overrightarrow{V_{S/g}}(A_s) + \vec{I}_{A_s,S}\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\right)$

Puis on utilise, si nécessaire, le changement de point pour le torseur $\overrightarrow{\sigma_{S/g}}$

$$\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(A) = \overrightarrow{\sigma_{S/g}}(A_s) + \overrightarrow{AA_s}\Lambda\, m_S\overrightarrow{V_{S/g}}(\mathrm{G})$$

On peut aussi utiliser le théorème de Huygens

$$\vec{I}_{A_s,S} = \vec{I}_{G,S} + \vec{I}_{(A_s,\{G,m\})}$$

$$\vec{I}_{G,S}\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\right) = \vec{I}_{A_s,S}\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\right) - m.\overrightarrow{A_sG}\Lambda\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\,\Lambda\,\overrightarrow{A_sG}\right)$$

On a alors le résultat suivant.

$$\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(\mathrm{G}) = \vec{I}_{G,S}\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\right) = \vec{I}_{A_s,S}\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\right) - m.\overrightarrow{A_sG}\Lambda\left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\,\Lambda\,\overrightarrow{A_sG}\right)$$

à remplacer dans : $E_{cS/g} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\sigma_{S/g}}(\mathrm{G}).\overrightarrow{\Omega_{S/g}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{V_{S/g}}(G).m_s\overrightarrow{V_{S/g}}(G)$

Bibliographie

P.Brousse
Cours de mécanique
1er cycle
et classes préparatoires
aux grandes écoles scientifiques
Armand Colin collection U

J.Morel J.C.Bône M.Boucher
Mécanique générale cours et applications
Dunod Université

J.C.Bône
Problème de mécanique générale
énoncés, éléments de solution, réponses

Y.Bremont P. Agati G.Deville
Mécanique du solide
Applications industrielles
Dunod

Cours classique de cinématique

Dérivées des fonctions vectorielles

On ne dérive pas par rapport à un repère, on dérive une fonction. En notant $\frac{d}{dt}[\vec{U}]_{/g}$ on fait porter $/g$ sur la fonction pour préciser que l'on dérive la fonction définie dans le repère indiqué par l'indice $/g$

par exemple on écrit : $\frac{d}{dt}[\vec{U}]_{/2} = \frac{d}{dt}[\vec{U}]_{/1} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \Lambda \vec{U}$

Vitesse d'un point A par rapport à un repère $\mathrm{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

La position du point A est repérée par le vecteur position : $\overrightarrow{OA}$ ou $\overrightarrow{OA(t)}$

$\overrightarrow{OA} = u\vec{x}_0 + v\vec{y}_0 + w\vec{z}_0$ soit : $\overrightarrow{OA(t)} = u(t)\vec{x}_0 + v(t)\vec{y}_0 + w(t)\vec{z}_0$

$\overrightarrow{\mathrm{V}_{/0}}(\mathrm{A}) = \frac{d}{dt}[\overrightarrow{OA}]_{/0}$ O est un point fixe de R_0

$\overrightarrow{\mathrm{V}_{/0}}(\mathrm{A}) = u'\vec{x}_0 + v'\vec{y}_0 + w'\vec{z}_0$ soit : $\overrightarrow{\mathrm{V}_{/0}}(\mathrm{A(t)}) = u'(t)\vec{x}_0 + v'(t)\vec{y}_0 + w'(t)\vec{z}_0$

Champ des vitesses d'un solide S_1 par rapport à un repère

Un solide indéformable est tel que deux points quelconques restent à distance constante au cours du mouvement.

$\left[\overrightarrow{\mathrm{A(t)B(t)}}\right]^2 = \left[\overrightarrow{\mathrm{A(t_0)B(t_0)}}\right]^2$ $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\overrightarrow{\mathrm{A(t)B(t)}}\right]^2 = 0$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}[\overrightarrow{\mathrm{AB}}]_{/0} = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}[\overrightarrow{\mathrm{OB}}]_{/0} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}[\overrightarrow{\mathrm{OA}}]_{/0}\right) = 0$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}.\left(\overrightarrow{\mathrm{V}_{1/0}}(\mathrm{B}) - \overrightarrow{\mathrm{V}_{1/0}}(\mathrm{A})\right) = 0$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{V}_{1/0}}(\mathrm{A}) = \overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{V}_{1/0}}(\mathrm{B})$

Le champ $\overrightarrow{\mathrm{V}_{1/0}}$ est équiprojectif, c'est donc un torseur.

Le champ des vitesses d'un solide S_1 indéformable par rapport à un repère R_0 est le torseur suivant.

$$\overrightarrow{\mathrm{V}_{1/0}} : \mathscr{E} \to \mathrm{E}$$
$$\mathrm{A} \to \overrightarrow{\mathrm{V}_{1/0}}(\mathrm{A}) = \overrightarrow{\mathrm{V}_{1/0}}(\mathrm{B}) + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

Composition des vitesses d'un point A

Soit 2 repères $\mathrm{R}_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $\mathrm{R}_2 = (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en mouvement l'un par rapport à l'autre.

On cherche le lien entre les vitesses $\overrightarrow{\mathrm{V}_{/1}}(\mathrm{A}) = \frac{d}{dt}[\overrightarrow{O_1A}]_{/1}$ et $\overrightarrow{\mathrm{V}_{/2}}(\mathrm{A}) = \frac{d}{dt}[\overrightarrow{O_2A}]_{/2}$

$\overrightarrow{O_1A} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2A}$

$$\frac{d}{dt}[\overrightarrow{O_1A}]_{/1} = \frac{d}{dt}[\overrightarrow{O_1O_2}]_{/1} + \frac{d}{dt}[\overrightarrow{O_2A}]_{/1}$$

$\overrightarrow{\mathrm{V}_{/1}}(\mathrm{A}) = \overrightarrow{\mathrm{V}_{2/1}}(O_2) + \frac{d}{dt}[\overrightarrow{O_2A}]_{/2} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{O_2A}$ $\quad O_2$ est un point de 2 !

$\overrightarrow{\mathrm{V}_{/1}}(\mathrm{A}) = \overrightarrow{\mathrm{V}_{2/1}}(O_2) + \overrightarrow{\mathrm{V}_{/2}}(\mathrm{A}) + \overrightarrow{\mathrm{V}_{2/1}}(A) - \overrightarrow{\mathrm{V}_{2/1}}(O_2)$

$\overrightarrow{\mathrm{V}_{/1}}(\mathrm{A}) = \overrightarrow{\mathrm{V}_{/2}}(\mathrm{A}) + \overrightarrow{\mathrm{V}_{2/1}}(A)$

Composition des vitesses des solides $\mathrm{R}_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

Soit 3 repères $\mathrm{R}_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ $\mathrm{R}_2 = (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_{12})$ et $\mathrm{R}_{23} = (O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ en mouvement les uns par rapport aux l'autres.

On a : $\overrightarrow{\mathrm{V}_{3/1}} = \overrightarrow{\mathrm{V}_{3/2}} + \overrightarrow{\mathrm{V}_{2/1}}$

Ce qui est équivalent à : $\overrightarrow{\mathrm{V}_{3/1}}(\mathrm{A}) = \overrightarrow{\mathrm{V}_{3/2}}(\mathrm{A}) + \overrightarrow{\mathrm{V}_{2/1}}(A)$ et $\overrightarrow{\Omega_{3/1}} = \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$

Champ des vitesses d'un solide par rapport à un repère

Soit 2 repères $\mathrm{R}_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $\mathrm{R}_2 = (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en mouvement l'un par rapport à l'autre.

On cherche le lien entre les vitesses $\overrightarrow{V_{/1}}(\mathrm{A})=\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\mathrm{O_1A}}\right]_{/1}$ et $\overrightarrow{V_{/2}}(\mathrm{A})=\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\mathrm{O_2A}}\right]_{/2}$

On a : $\overrightarrow{\mathrm{V}_{1/0}}(\mathrm{A}) = \overrightarrow{\mathrm{V}_{1/0}}(\mathrm{B})+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,\Lambda\,\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$

Champ des accélérations d'un solide par rapport à un repère

Soit 2 repères $\mathrm{R}_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $\mathrm{R}_2 = (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en mouvement l'un par rapport à l'autre.

On cherche le lien entre les accélérations $\overrightarrow{\Gamma_{/1}}(\mathrm{A})=\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\mathrm{V}_{/1}}(\mathrm{A})\right]_{/1}$ et $\overrightarrow{\Gamma_{/2}}(\mathrm{A})=\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\mathrm{V}_{/2}}(\mathrm{A})\right]_{/2}$

La composition des accélérations

s'écrit : $\overrightarrow{\Gamma_{/1}}(\mathrm{A})=\overrightarrow{\Gamma_{/2}}(\mathrm{A})+\overrightarrow{\Gamma_{2/1}}(\mathrm{A}) + 2\overrightarrow{\Omega_{2/1}}\Lambda\overrightarrow{\mathrm{V}_{/2}}(\mathrm{A})$

ou $\overrightarrow{\Gamma_{\mathrm{a}}}(\mathrm{A})=\overrightarrow{\Gamma_{\mathrm{r}}}(\mathrm{A})+\overrightarrow{\Gamma_{\mathrm{e}}}(\mathrm{A}) + 2\overrightarrow{\Omega_{\mathrm{e}}}\Lambda\overrightarrow{\mathrm{V}_{\mathrm{r}}}(\mathrm{A})$

Démonstration classique du théorème de l'énergie cinétique pour un solide

Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

La dérivée de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide est égale à la puissance galiléenne des efforts extérieurs au solide $\frac{d}{dt}E_{cS/g} = P_{\bar{S}\to S/g}$

Démontrons ce théorème pour un solide S indéformable.

$\overrightarrow{F_{\bar{S}\to S}} = m_S\,\overrightarrow{\Gamma_{/g}}(G_S)$ on projette sur : $\overrightarrow{V_{S/g}}(A)$

$\overrightarrow{M_{\bar{S}\to S}}(A) = \overrightarrow{\delta_{S/g}}(A)$ on projette sur : $\overrightarrow{\Omega_{S/g}}$

Par définition : $P_{\bar{S}\to S/g} = \overrightarrow{M_{\bar{S}\to S}}(A).\overrightarrow{\Omega_{S/g}} + \overrightarrow{F_{\bar{S}\to S}}.\overrightarrow{V_{S/g}}(A)$ Puissance galiléenne des efforts extérieurs au solide S

On va montrer que : $\overrightarrow{\delta_{S/g}}(A).\overrightarrow{\Omega_{S/g}} + \overrightarrow{V_{S/g}}(A).m_S\,\overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(G) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_S \left[\overrightarrow{V_{S/g}}\right]^2(Q)dm\right)$

$$\overrightarrow{\delta_{S/g}}(A).\overrightarrow{\Omega_{S/g}} + \overrightarrow{V_{S/g}}(A).m_S\,\overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(G) = \int_S \overrightarrow{AQ}\wedge\overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(Q)dm\,.\overrightarrow{\Omega_{S/g}} + \overrightarrow{V_{S/g}}(A).m_S\,\overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(G)$$

$$\overrightarrow{\delta_{S/g}}(A).\overrightarrow{\Omega_{S/g}} + \overrightarrow{V_{S/g}}(A).m_S\,\overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(G) = \int_S \left(\overrightarrow{\Omega_{S/g}}\wedge\overrightarrow{AQ}\right).\overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(Q)dm + \overrightarrow{V_{S/g}}(A).\int_S \overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(Q)dm(Q)$$

$$\overrightarrow{\delta_{S/g}}(A).\overrightarrow{\Omega_{S/g}} + \overrightarrow{V_{S/g}}(A).m_S\,\overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(G) = \int_S \overrightarrow{V_{S/g}}(Q).\overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(Q)dm$$

$$\overrightarrow{\delta_{S/g}}(A).\overrightarrow{\Omega_{S/g}} + \overrightarrow{V_{S/g}}(A).m_S\,\overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(G) = \int_S \overrightarrow{V_{S/g}}(Q).\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{S/g}}(Q)dm = \int_S \frac{1}{2}.\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{S/g}}^2(Q)dm$$

On a bien : $\overrightarrow{\delta_{S/g}}(A).\overrightarrow{\Omega_{S/g}} + \overrightarrow{V_{S/g}}(A).m_S\,\overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(G) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_S \left[\overrightarrow{V_{S/g}}\right]^2(Q)dm\right)$

Par définition : $E_{cS/g} = \frac{1}{2}\int_S \left[\overrightarrow{V_{S/g}}\right]^2(Q)dm$ Énergie cinétique galiléenne du solide S

Dynamique d'un solide en translation soit : $\overrightarrow{\Omega_{S/g}} = \vec{0}$

$\forall Q \in S,\ \overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(Q) = \overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(G_S)$ $G_S = G$ $m_S = m$

$\overrightarrow{F_{\bar{S}\to S}} = m\,\overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(G)$

$\overrightarrow{M_{\bar{S}\to S}}(A) = \overrightarrow{AG}\wedge m\,\overrightarrow{\Gamma_{S/g}}(G)$ On a donc aussi : $\overrightarrow{M_{\bar{S}\to S}}(G) = \vec{0}$

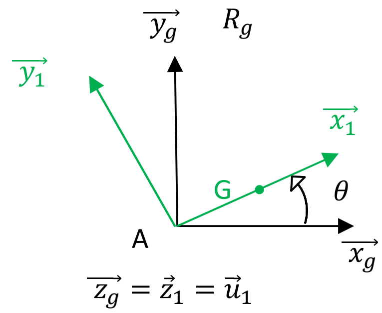
Dynamique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe dans R_g

Soit $\Delta = (A,\vec{u})$ cet axe et $\overrightarrow{\Omega_{S/g}} = \omega\vec{u}$ Le solide S est supposé équilibré statiquement et dynamiquement.

$\overrightarrow{F_{\bar{S}\to S}} = \vec{0}$

$\overrightarrow{M_{\bar{S}\to S}}(A) = I.\omega'\,\vec{u}$ avec $I = I_\Delta$ moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe Δ

Dynamique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe dans R_g



Soit $\Delta = (A, \vec{u})$ cet axe et $\overrightarrow{\Omega_{S/g}} = \omega\vec{u}$ Le point A est fixe dans R_g

Le solide S n'est pas supposé équilibré.

On note : $R_g = \left(A, \overrightarrow{x_g}, \overrightarrow{y_g}, \vec{u}\right)$ le repère galiléen, $\overrightarrow{z_g} = \vec{u}$

On note : $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à $S = S_1$ avec $\vec{z}_1 = \vec{u}$

On choisit A et $\vec{x}_1$ tel que : $\overrightarrow{AG} = r\vec{x}_1$ et on paramètre l'angle par $\theta = \left(\overrightarrow{x_g}, \vec{x}_1\right)$

$$\overrightarrow{F_{\bar{1}\to 1}} = m\overrightarrow{\Gamma_{1/g}}(G) \qquad \overrightarrow{\Gamma_{1/g}}(G) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{1/g}}(G) \qquad \overrightarrow{V_{1/g}}(G) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{AG} = \omega r\vec{y}_1 \qquad \omega = \theta'$$

$$\overrightarrow{M_{\bar{1}\to 1}}(\mathrm{A}) = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A})\right]_{/g} \qquad A \text{ est fixe dans } R_g \qquad \overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A}) = \vec{I}_{A,S_1}\left(\overrightarrow{\Omega_{1/g}}\right)$$

$$I_{A,S_1} = \begin{bmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}_{(A,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} \qquad \overrightarrow{\Omega_{S/g}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} = \omega\vec{z}_1 \qquad \omega = \theta'$$

$$\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A})\right]_{/g} = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A})\right]_{/1} + \overrightarrow{\Omega_{1/g}}\Lambda\,\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A})$$

$$\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A})\right]_{/g} = \frac{d}{dt}[(-E_1\omega\vec{x}_1 - D_1\omega\vec{y}_1 + C_1\omega\vec{z}_1]_{/1} + \omega\vec{z}_1\Lambda\,(-E_1\omega\vec{x}_1 - D_1\omega\vec{y}_1 + C_1\omega\vec{z}_1)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_{1/g}}(\mathrm{A})\right]_{/g} = -E_1\omega'\vec{x}_1 - D_1\omega'\vec{y}_1 + C_1\omega'\vec{z}_1 - E_1\omega^2\vec{y}_1 + D_1\omega^2\vec{x}_1$$

$$\overrightarrow{F_{\bar{1}\to 1}} = m\overrightarrow{\Gamma_{1/g}}(G)$$

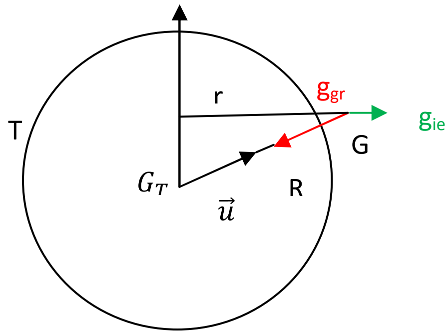
$$\overrightarrow{M_{\bar{1}\to 1}}(\mathrm{A}) = (D_1\omega^2 - E_1\omega')\vec{x}_1 - (E_1\omega^2 + D_1\omega')\vec{y}_1 + C_1\omega'\vec{z}_1$$

Remarque 3 : Peut-on confondre la gravitation et la pesanteur dans certains cas?

La pesanteur est : $\overrightarrow{g_{pes}} = \overrightarrow{g_{gr}} + \overrightarrow{g_{ie}}$ $\overrightarrow{F_{\mathrm{T}\overset{g}{\to}\Sigma}} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{R^2}\vec{\mathrm{u}} = -mg_{gr}\vec{\mathrm{u}} = m\overrightarrow{g_{gr}}$ et $g_{ie} = \Omega_T^2 r$

Comparons ces deux composantes à l'équateur où : $R_{Téq} = 6378{,}1km$

$\overrightarrow{g_{gr}} = -\frac{\mathcal{G}M_T}{R^2}\vec{\mathrm{u}}$ $R = G_T G$ $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{G_T G}}{G_T G}$ $g_{gr} = \frac{\mathcal{G}M_T}{R^2}$



$$g_{gr\_éq} = \frac{\mathcal{G}M_T}{{R_{Téq}}^2} = \frac{6.67 \times 10^{-11} X 5.9736 \times 10^{24}}{6378100^2} = 9.794\, m.s^{-2} (9.7805)$$

$g_{ie} = \Omega_T^2 R_{Téq} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_{Téq}$ Jour sidéral = 23 × 3600 + 54 × 60 + 4=86044 s

$$g_{ie} = \left(\frac{2\pi}{86044}\right)^2 6378100 = 0.034\, m.s^{-2}$$

soit : g=9.794-0.034=9.76 0.034/9.794*100=0.35 %

Gravité au pôle.

On a : $R_{Tpôle} = 6356{,}8km$ et Le rayon moyen de la terre : $R_{Tm} = 6367{,}5km$ (6371009m?)

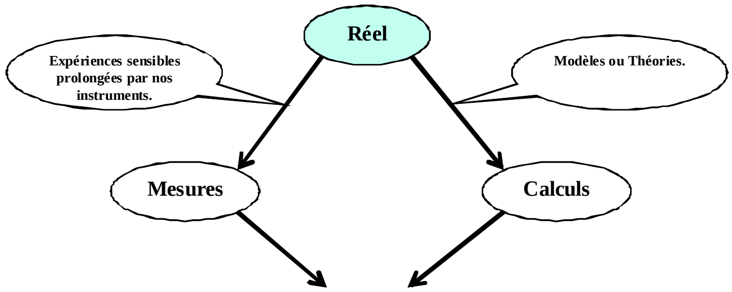
$g_{gr\_pôle} = \frac{\mathcal{G}M_T}{R^2} = \frac{6.67\times10^{-11} X 5.9736\times10^{24}}{6356800^2} = 9.86\, m.s^{-2} (9.8322)$ $g_{gr\_moy} = \frac{6.67\times10^{-11} X 5.9736\times10^{24}}{6367500^2} = 9.827\, m.s^{-2}$

Pour une variation de hauteur de $R_{Téq} - R_{Tpôle} = 22\ km$ on a une variation de la gravité de 0.06 soit environ 0.6 %

On a supposé la terre à symétrie sphérique, de plus, localement, la gravité peut varier selon le sous-sol.

En conclusion, on prendra g=9.8 ms^{-2} en ne parlant que de gravitation et on néglige le reste à moins de 1 % près.

La démarche scientifique: **Qu’est-ce qu’un modèle?**



Validation ou réfutation du modèle.

Un modèle ne peut être déclaré vrai. On devrai dire: « tout se passe comme si… »
La nature est toujours plus fine que des modèles.
Le modèle n’est pas toujours construit sur des mécanismes réels (modèle de comportement).
Par contre la théorie cinétique des gaz par exemple est un modèle de connaissances.
Pour qu’un modèle soit scientifique, il doit être réfutable.
Dans ce cas, il faudra le modifier ou limiter sa validité.

Un modèle ne peut être déclaré vrai. On devrait dire: « tout se passe comme si… »

La nature est toujours plus fine que des modèles.

Le modèle n’est pas toujours construit sur des mécanismes réels (modèle de comportement).

Par contre la théorie cinétique des gaz par exemple est un modèle de connaissances.

Pour qu’un modèle soit scientifique, il doit être réfutable.

Dans ce cas, il faudra le modifier ou limiter sa validité.

Historiquement, les grands savants ne séparaient pas les sciences et les maths. C’est une démarche universitaire qui a voulu isoler les disciplines. Les maths à elles seules ne constituent pas une science. On ne fait pas une expérience pour savoir si le théorème de Pythagore est juste. Ce théorème est juste, au sens de logique, dans un espace euclidien.

Pour retrouver une démarche scientifique, il faudrait faire des mesures de distances et d’angles pour en déduire si l’espace est modélisable par un espace euclidien ou pas.

RESUME DE DYNAMIQUE

Principe fondamental de la dynamique

Notation pour l'intégration :

Théorèmes généraux de la dynamique

La démarche de modélisation

Définition des torseurs

Classement et description des torseurs

Exemples de torseurs

Contre-exemples

Cordonnées vectorielles d'un torseur

Cordonnées scalaires d'un torseur

Comoment ou produit de deux torseurs

Expression analytique d'un comoment

Comoment d'un torseur à structure et d'un torseur quelconque

Théorème des actions mutuelles

Donnons deux exemples de paramétrages qui tiennent compte des actions mutuelles

Efforts transmis dans une section droite d'une poutre en résistance des matériaux

Moment dynamique galiléen pour Σ

Cas particuliers

Moment cinétique en un point quelconque d'un solide

Cas particuliers

Démarche en deux étapes pour se passer de la formule générale

Étude de l'opérateur d'inertie d'un solide

Théorème de Huygens : On change de point

Théorème de la puissance cinétique pour un solide

Mise en œuvre du théorème de la puissance cinétique pour un solide

Théorème de la puissance cinétique pour deux solides

Théorème de la puissance cinétique pour trois solides

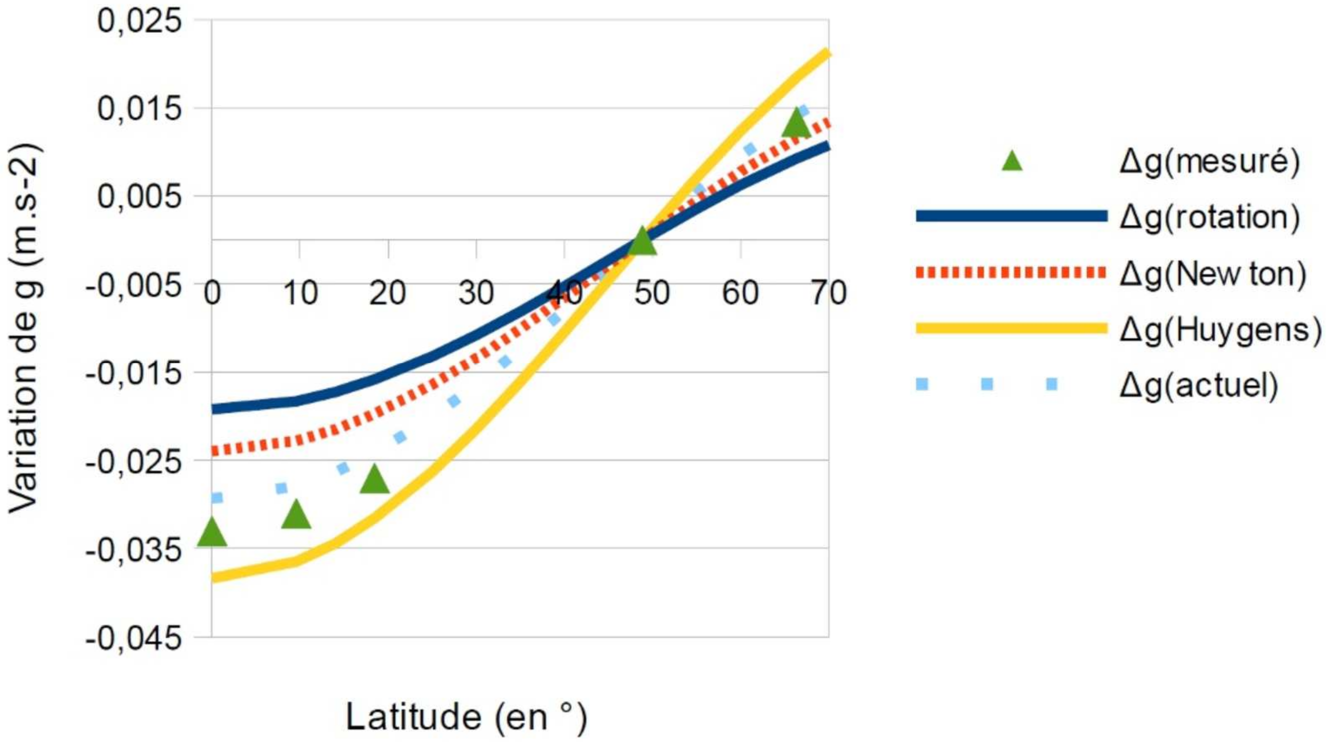
Théorème de la puissance cinétique pour N solides

Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

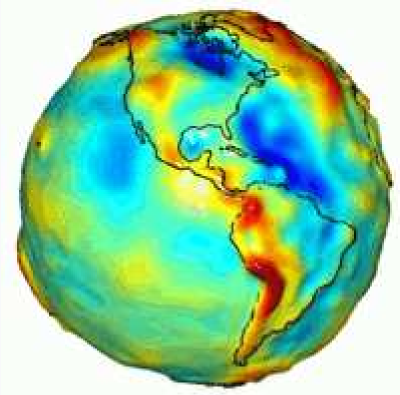
Théorème de l'énergie cinétique pour deux solides

Calcul de l'énergie cinétique pour un solide

Bibliographie



Variation en fonction du lieu[modifier | modifier le code]



Pesanteur terrestre mesurée par le satellite GRACE de la NASAet de l'Agence aérospatiale allemande. Le graphique montre les écarts de la pesanteur réelle à la pesanteur normalisée associée à l'ellipsoïde homogène théorique modélisant la forme de la Terre. Les zones rouges sont celles où la pesanteur est plus élevée que la pesanteur théorique et les zones en bleu celles où elle est plus faible, l'amplitude totale de la variation (du bleu au rouge) étant de 1 mm/s^2.

La Terre tournant sur elle-même et n'étant pas un astre sphérique et homogène, l'accélération de la pesanteur dépend du lieu et des facteurs suivants :

- la rotation terrestre : La rotation de la Terre sur elle-même entraîne une correction consistant à ajouter à l'accélération de la gravité une accélération d'entraînement axifuge, dirigée perpendiculairement à l'axe des pôles et de module :$a = (2\pi/T)^2 d$ avec T = 86 164,1 s et d la distance en mètres entre l'objet et l'axe de rotation de la Terre. La correction, nulle aux pôles, atteint -0,3 % sur l'équateur ;
- la non-sphéricité de la Terre : À cause de l'aplatissement de la Terre, l'accélération de la gravité varie avec la latitude : elle est plus forte aux pôles qu'à l'équateur (0,2 % d'écart).
- l'altitude : Pour une variation de l'altitude h petite devant R, la variation relative de l'accélération de la gravité vaut -2h/R, soit $-3{,}139 \times 10^{-7}$ par mètre[d] à faible distance de la surface de la Terre ;
- les écarts de densité du sous-sol : ils entraînent des variations locales de la gravité que l'on néglige dans les formules générales devant la difficulté de les modéliser ;

- les forces de marée, notamment dues à la Lune et au Soleil. La correction correspondante varie au cours de la journée. Elle est de l'ordre de 2×10^{-7} à la latitude de 45°.
- le mouvement du corps dans le repère terrestre : si un corps est en mouvement dans le repère terrestre, il subit une accélération complémentaire dite accélération de Coriolis, responsable notamment du mouvement de rotation des masses d'air (cyclones et anticyclones) et d'eau océanique (spirale d'Ekman). La composante verticale de cette accélération constitue la force d'Eötvös.

La formule suivante donne une valeur approchée de la valeur normale de l'accélération de la pesanteur en fonction de la latitude et pour une altitude faible devant le rayon terrestre (typiquement : quelques milliers de mètres)[5] :

avec :

- g en m/s^2 ;
- h, altitude en m ;
- ϕ, latitude en radians dans le Système géodésique GRS 80 (1980)[6,7].

la Conférence générale des poids et mesures a défini en 1901[3,4] une valeur normale de l'accélération de la pesanteur, notée g_0 ou simplement$g$, égale à 9,806 65 m/s^2, soit approximativement 9,81 m s^{-2} (ou 9,81 N/kg)

Le pendule devient l'instrument de mesure de la pesanteur.