



## TD03 DYNAMIQUE

### Caractériser les inerties des solides en mouvement

#### Exercice 1 : MATRICE D'INERTIE DE SOLIDES A SYMETRIES CYLINDRIQUES

On considère des solides homogènes.

**Question 1 :** Donner l'expression de la matrice d'inertie, au centre d'inertie dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , de chacun des solides suivants :

Cylindre de masse $m$	Disque de masse $m$ et d'épaisseur négligeable	Cerceau de masse $m$ , d'épaisseur négligeable et de section négligeable
Tube de masse $m$	Tige de masse $m$ et de section négligeable	Tige de masse $m$ et de section négligeable

**Question 2 :** Utiliser le théorème de Huygens sur la Tige pour retrouver le résultat.

**Question 3 :** Conclure.

#### Exercice 2 : DISQUE PERCE

On s'intéresse à un solide homogène d'épaisseur négligeable et de masse totale  $m$ .

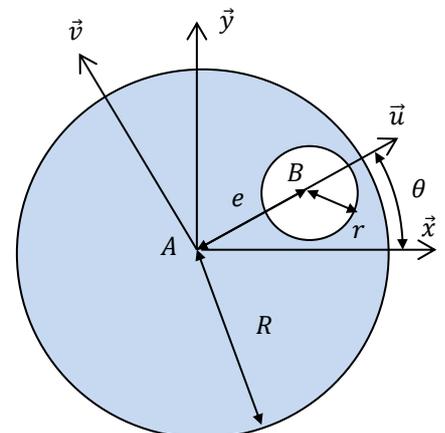
Il est schématisé sur la figure ci-contre et est constitué :

- d'un disque plein 1 de centre  $A$  et de rayon  $R$  ;
- d'un disque creux 2 de centre  $B$  et de rayon  $r$ , excentré par rapport au premier disque d'une distance  $e$ .

**Question 1 :** Déterminer la position du centre de masse  $G$  en fonction de  $r$ ,  $R$  et  $e$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ .

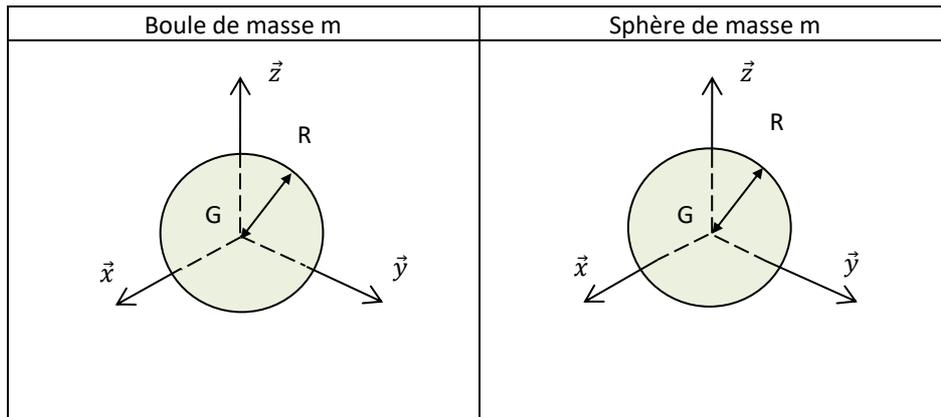
On souhaite ramener en  $A$  le centre de masse de l'ensemble. Pour cela, on dispose de deux masses ponctuelles additionnelles de coordonnées  $P_3 = (r_3 \cos \theta_3, r_3 \sin \theta_3, 0)_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})}$  et  $P_4 = (r_4 \cos \theta_4, r_4 \sin \theta_4, 0)_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})}$  de masses respectives  $m_3$  et  $m_4$ .

**Question 2 :** Déterminer 2 relations à poser sur les coordonnées de ces deux points afin d'atteindre l'objectif proposé.



### Exercice 3 : MATRICE D'INERTIE DE SOLIDES ELEMENTAIRES A SYMETRIES SPHERIQUES

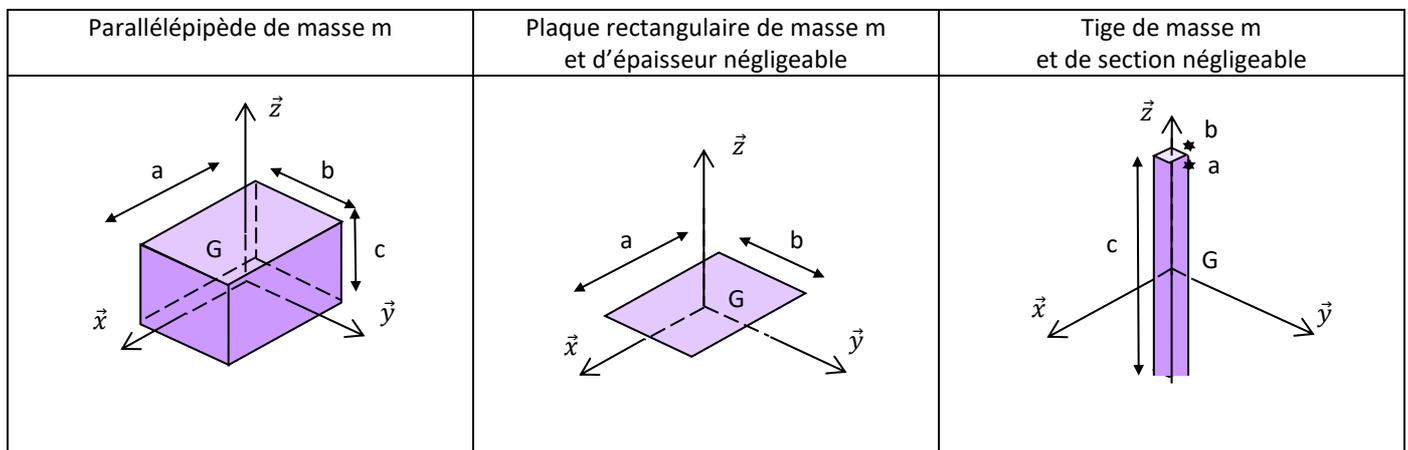
**Question 1 :** Donner l'expression de la matrice d'inertie, au centre d'inertie dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , de chacun des solides suivants :



**Question 2 :** Conclure.

### Exercice 4 : MATRICE D'INERTIE DE SOLIDES ELEMENTAIRES A SYMETRIES PLANES

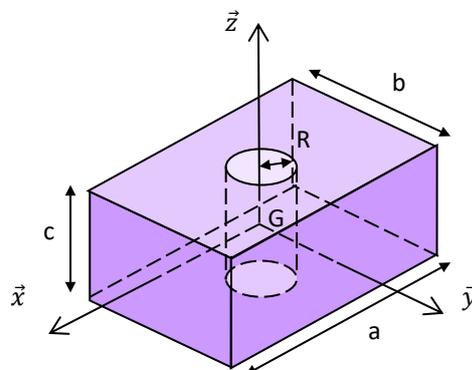
**Question 1 :** Donner l'expression de la matrice d'inertie, au centre d'inertie dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , de chacun des solides suivants :



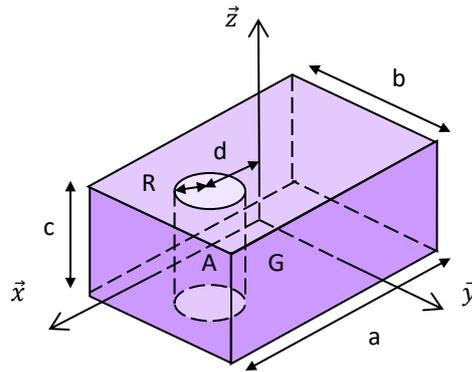
**Question 2 :** Conclure.

### Exercice 5 : PARALLELEPIPEDE PERCE

**Question 1 :** Déterminer la matrice d'inertie au point G dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , d'un parallélépipède de dimension a.b.c percé d'un cylindre de rayon R et de masse volumique  $\rho$ . Les 2 centres d'inertie des deux volumes sont confondus en G.

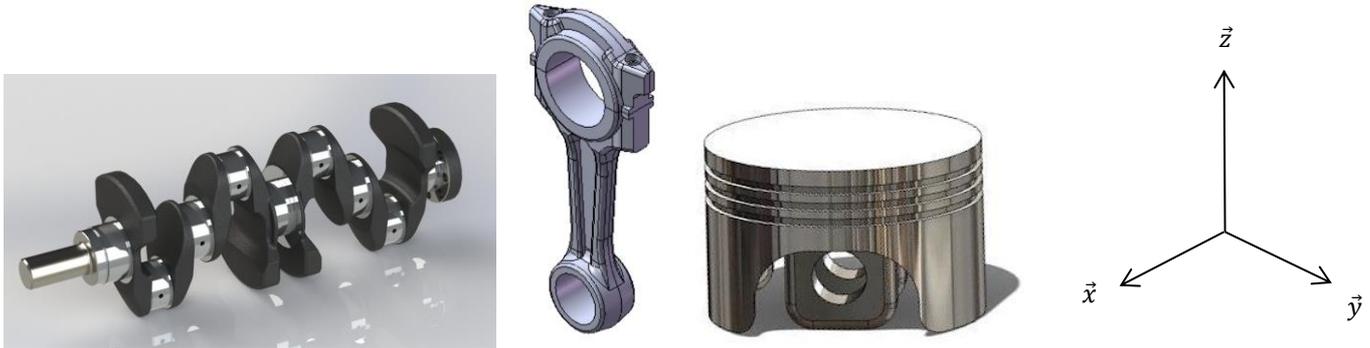


**Question 2 :** Déterminer la matrice d'inertie au point G dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , d'un parallélépipède de dimension  $a.b.c$  percé d'un cylindre en A de rayon R et de masse volumique  $\rho$ . Les 2 centres d'inertie des deux volumes ne sont plus confondus.



### Exercice 6 : MATRICE D'INERTIE

**Question 1 :** Indiquer la forme des matrices d'inertie des solides suivants :



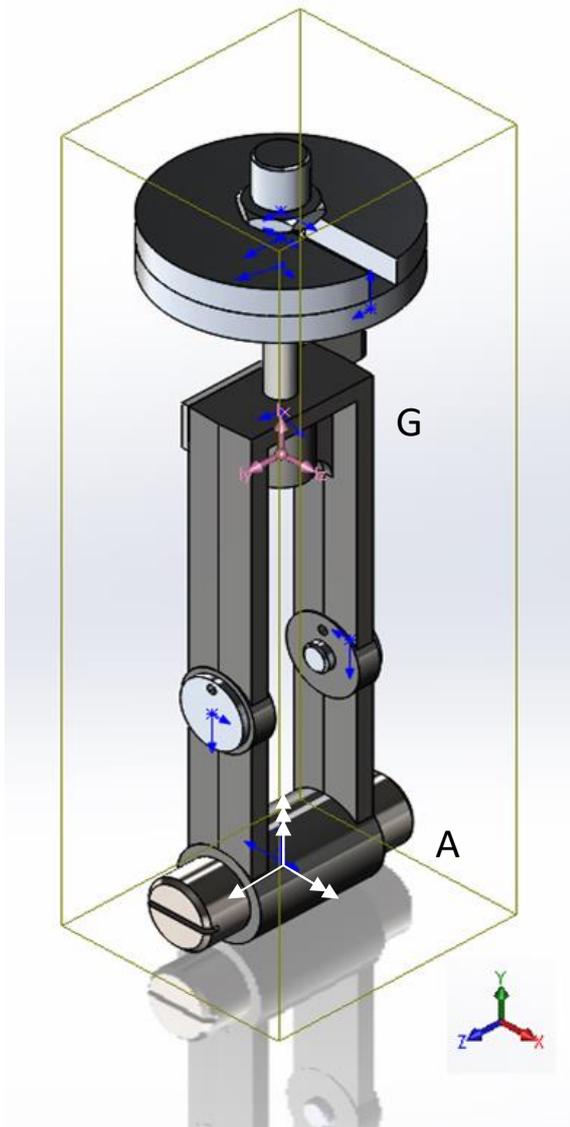
### Exercice 7 : INERTIE DU MAXPID

(d'après oraux de TP PSI CCP)

On s'intéresse à un bras articulé d'un robot cueilleur de fruit.

**Objectif :** exploiter et interpréter les résultats d'une simulation numérique.

**Question 1 :** Déterminez le moment d'inertie du Maxpid pour 2 masselottes utile pour calculer le moment d'inertie équivalent rapporté à l'arbre moteur  $J_{eq}$ .



Propriétés de masse

Bras complet.SLDASM

Options...

Remplacer les propriétés de masse... Recalculer

Inclure les corps/composants cachés

Créer la fonction Centre de masse

Afficher la masse du cordon de soudure

Indiquer les valeurs de coordonnées relatives à: Système de coordonnées

Propriétés de masse de Bras complet  
Configuration: Défaut  
Système de coordonnées: Système de coordonnées

Masse = 2.35440 kilogrammes

Volume = 0.00043 mètres cubes

Superficie = 0.11748 mètres carrés

Centre de gravité: ( mètres )  
X = -0.00010  
Y = 0.18156  
Z = -0.00019

Principaux axes et moments d'inertie: ( kilogrammes \* mètres carrés )  
Pris au centre de gravité.  
Ix = (-0.00132, 1.00000, 0.00054) Px = 0.00240  
Iy = ( 0.00918, -0.00053, 0.99996) Py = 0.03628  
Iz = ( 0.99996, 0.00132, -0.00918) Pz = 0.03698

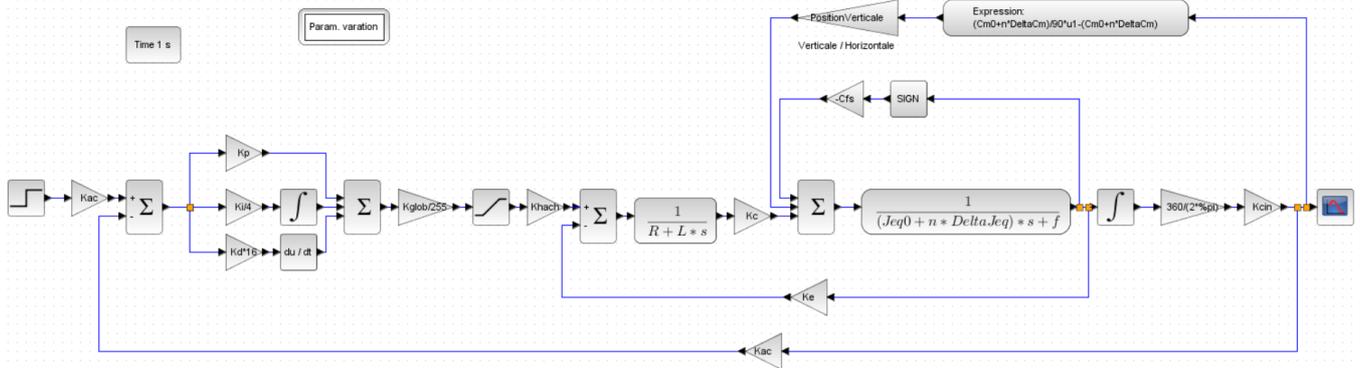
Moments d'inertie: ( kilogrammes \* mètres carrés )  
Pris au centre de gravité et aligné avec le système de coordonnées de sortie.  
Lxx = 0.03698 Lxy = -0.00005 Lxz = 0.00001  
Lyx = -0.00005 Lyy = 0.00240 Lyz = 0.00002  
Lzx = 0.00001 Lzy = 0.00002 Lzz = 0.03628

Moments d'inertie: ( kilogrammes \* mètres carrés )  
Pris au système de coordonnées de sortie.  
lxx = 0.11459 lxy = -0.00009 lxz = 0.00001  
lyx = -0.00009 lyy = 0.00240 lyz = -0.00007  
lzx = 0.00001 lzy = -0.00007 lzz = 0.11389

Un ou plusieurs composants ont des propriétés de masse remplacées:  
Masselotte <3> <Défaut>  
Masselotte <4> <Défaut>

Aide Imprimer... Copier dans le Presse-papiers

**Question 2 :** Entourer dans la modélisation causale ci-dessous le moment d'inertie équivalent. Expliquer les différentes parties du schéma.

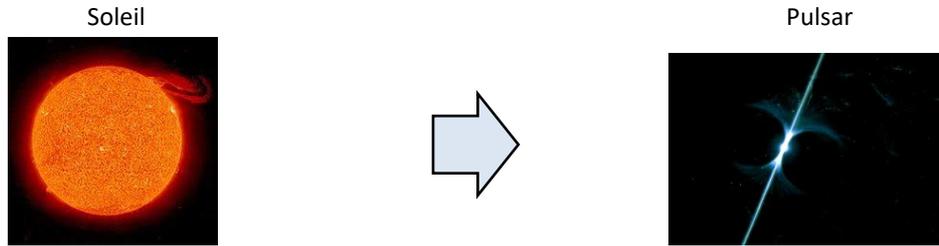


Modélisation multiphysique causale du Maxpid

## Exercice 8 : PULSAR

Une étoile à neutron, ou pulsar, se forme parfois lors de la mort d'une étoile de taille intermédiaire (un peu plus que la taille du soleil). Le rayon de l'étoile s'effondre alors pour ne faire plus que quelques kilomètres ! mais le moment cinétique se conserve. La vitesse de rotation devient alors colossale et provoque des jets astrophysiques. Les étoiles plus petites deviennent des naines blanches et les plus grosses des trous noirs.

Supposons que notre soleil devienne dans l'avenir un pulsar pour faire une application numérique. Nous supposons aussi que la masse est conservé en première approximation.



Masse :  $M_1 = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Rayon :  $R_1 = 700000 \text{ km}$

Vitesse de rotation :  $\omega_1 = 1 \text{ tr/mois} \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$

Masse :  $M_2 = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Rayon :  $R_2 = 10 \text{ km}$

Vitesse de rotation :  $\omega_2 = ?$

**Objectif :** Montrer la conservation de la quantité de mouvement en rotation.

**Question 1 :** Calculer le moment cinétique du Soleil.

**Question 2 :** Calculer la vitesse de rotation du pulsar en écrivant la conservation du moment cinétique.

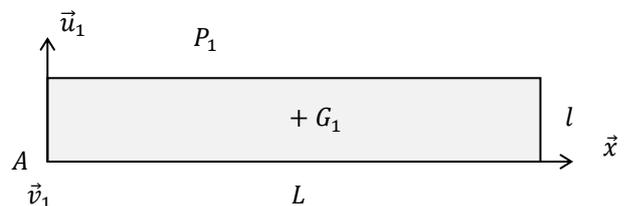
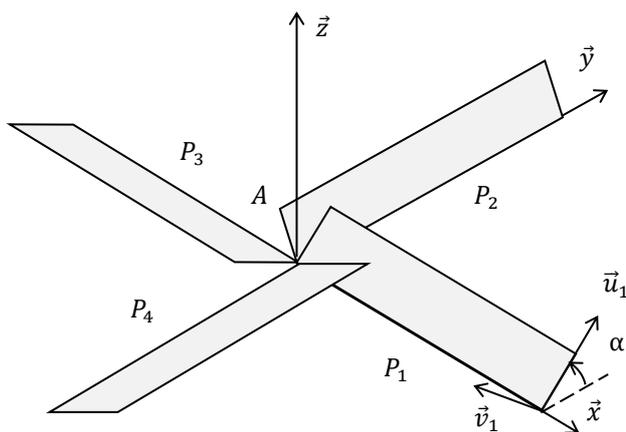
## Exercice 9 : ROTOR D'HELICOPTERE

On s'intéresse au rotor d'un hélicoptère.

Dans une première approche, on peut considérer que ce rotor est composé de quatre pales rigides décalées de  $90^\circ$  et inclinées d'un angle par rapport à l'horizontale.

On note  $\alpha = (\vec{y}, \vec{u}_1) = (\vec{z}, \vec{v}_1)$ .

Chacune de ces pales est considérée d'épaisseur négligeable et a une masse notée  $M$ , une longueur  $L$  et une largeur  $l$ .



**Objectif :** caractériser les masses en mouvement.

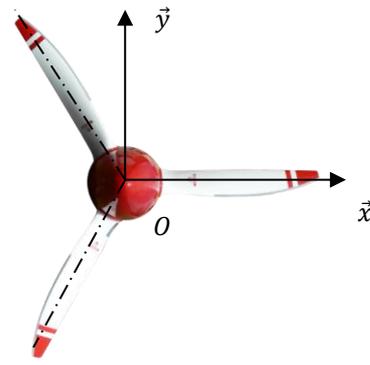
**Question 1 :** Montrer que la matrice d'inertie du rotor est diagonale au point A dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

**Question 2 :** Déterminer la matrice d'inertie de la pale  $P_1$  au point A dans la base  $(\vec{x}, \vec{u}_1, \vec{v}_1)$ .

**Question 3 :** Déterminer la matrice d'inertie de la pale  $P_1$  au point A dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

**Question 4 :** Donner les égalités entre les moments d'inertie A, B et C des différentes pales  $P_i$  par rapport aux axes  $(A, \vec{x})$ ,  $(A, \vec{y})$  et  $(A, \vec{z})$ . En déduire la matrice d'inertie du rotor au point A dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

## Exercice 10 : HELICE TRIPALE



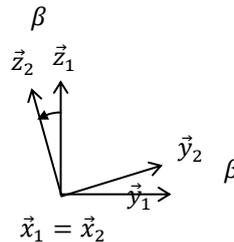
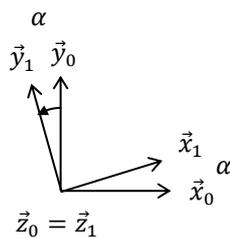
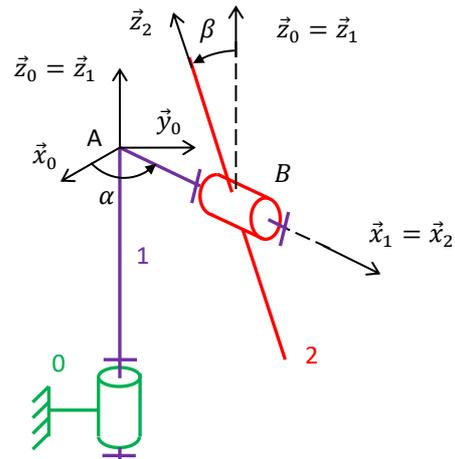
Soit un point  $M_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$  qui appartient à la pale 1.

**Question 1 :** Montrer que la matrice d'inertie d'une hélice tripale est diagonale au point O dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

## Déterminer les torseurs cinétique et dynamique d'un ensemble de solide

### Exercice 11 : EOLIENNE BIPALE

On s'intéresse à une éolienne bipale dont le modèle cinématique est donné ci-dessous.



Cette éolienne est constituée :

- d'un mât 0 fixe de repère associé  $R_0 = (A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  galiléen ;
- d'une girouette 1, de repère associé  $R_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  tel que  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$  ;
- d'une hélice 2, de repère associé  $R_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , tel que  $\beta = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ .

Données :

**Girouette 1 :** homogène de masse  $m_1$ , de centre d'inertie A et de matrice d'inertie  $I_{A,1} = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -D_1 \\ -F_1 & B_1 & -E_1 \\ -D_1 & -E_1 & C_1 \end{pmatrix}_{(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$

**Hélice 2 :** homogène de masse  $m_2$ , de centre d'inertie B tel que  $\overrightarrow{AB} = l\vec{x}_1$  et de matrice d'inertie  $I_{B,2} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$

**Question 1 :** Préciser la forme de la matrice d'inertie de la girouette 1 au point A.

**Question 2 :** Déterminer au point A les éléments de réduction du torseur dynamique  $\mathcal{D}(1/0)$ .

**Question 3 :** Déterminer au point A les éléments de réduction du torseur dynamique  $\mathcal{D}(2/0)$ .

On considère qu'il existe un balourd 3 de masse  $m_3$ , modélisant un déséquilibre de l'hélice en rotation, représenté par une masse ponctuelle au point  $G_3$ . On pose  $\overrightarrow{AG_3} = c\vec{x}_2 + b\vec{z}_2$ .

**Question 4 :** Sans faire de calcul, proposer une démarche pour calculer  $\delta_{3/0}^{\vec{z}_2}(A)$ .

## Exercice 12 : LE BIONIC BAR DU PAQUEBOT HARMONY

*(Support proche du Robot Ericc, TP Mines-Pont X-ENS PSI)*

Meet two robotic bartenders who know how to shake up your night out. They can mix, muddle, and stir it up too. With moves as fluid as the Pimm's in your cup, they can create an almost endless combination of cocktails, whether it's a classic Manhattan or a custom order of your own design. Just order by app on the nearby tablets and watch your bionic mixologist do its thing. Designed and powered by the minds at Makr Shkr, the Bionic Bar® is making history at sea.



On s'intéresse aux 2 derniers membres du robot barman qui oscillent dans le plan vertical  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ .

Ce robot est constitué de deux bras 2 et 3 identiques homogènes de masse  $m$ , modélisables par des tiges cylindriques de longueur  $L$  et de rayon  $R = 0$ .

On associe un repère  $R_i = (O, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ , à chaque solide  $i$ , avec  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ .  $R_0$  est Galiléen.

On pose également  $\overrightarrow{OA} = L\vec{x}_2$  tel que  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$  et  $\overrightarrow{AB} = L\vec{x}_3$  tel que  $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$ .

On note  $G_2$  le centre d'inertie du bras 2 situé au milieu du segment OA.

On note  $G_3$  le centre d'inertie du bras 3 situé au milieu du segment AB.

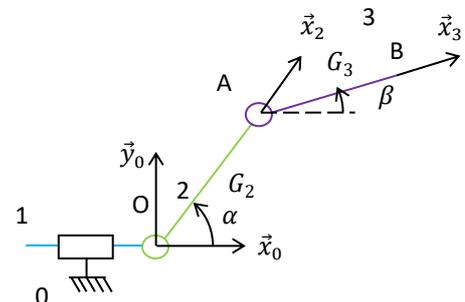
Dans la phase de vie étudiée, le mouvement de translation 1/0 est nul.

**Question 1 :** Déterminer l'expression des matrices d'inertie des bras  $\bar{I}_{G_2,2}$  dans la base  $B_2$  et  $\bar{I}_{G_3,3}$  dans la base  $B_3$ .

**Question 2 :** Déterminer au point O les éléments de réduction du torseur dynamique  $\mathcal{D}(2/0)$ .

**Question 3 :** Déterminer au point O les éléments de réduction du torseur dynamique  $\mathcal{D}(3/0)$ .

**Question 4 :** Déterminer au point O les éléments de réduction du torseur dynamique  $\mathcal{D}(\{2,3\}/0)$ .



## Exercice 13 : GYROSCOPE DE PRECISION DE DR NOZMAN (FEAT SQUEEZIE)



Dans une vidéo de sa chaîne <https://youtu.be/hgicPnl5qF4>, Dr Nozman expose à Squeezeie un gyroscope qui a la particularité d'être monté au bout d'une tige et de rester un certain temps vertical.

On associe une base  $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ , à chaque solide  $i$ , avec  $i \in \{0,1,2\}$ .  $R_0$  est Galiléen. On introduit une base intermédiaire  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ .

Le **tige 1** est un cylindre homogène de masse  $m_1$ , de centre d'inertie  $G_1$ , tel que  $\overline{OG_1} = \frac{L}{2}\vec{x}_1$  avec un angle de **précession**  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{u}) = (\vec{y}_0, \vec{v})$  autour de  $\vec{z}_0 = \vec{w}$  et de **nutation**  $\beta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = (\vec{u}, \vec{x}_1)$  autour de  $\vec{v} = \vec{y}_1$ .

Le **disque 2** est un cylindre homogène de masse  $m_2$ , de hauteur  $h$  et de rayon  $R$ , de centre d'inertie  $G_2$ , tel que  $\overline{OG_2} = L\vec{x}_1$  avec un angle de **rotation propre** tel que  $\gamma = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$  autour de  $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ .

On note  $\Sigma = \{1,2\}$ .

**Question 1 :** Tracer le graphe de structure du gyroscope

**Question 2 :** Déterminer une démarche de résolution.

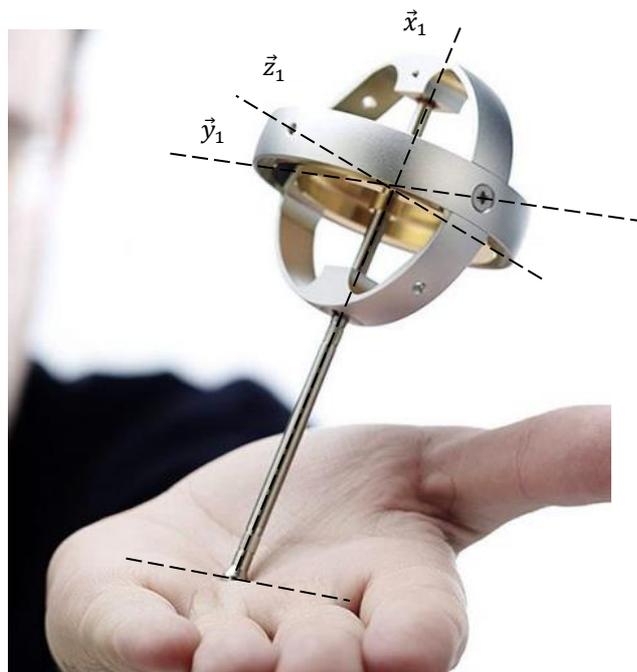
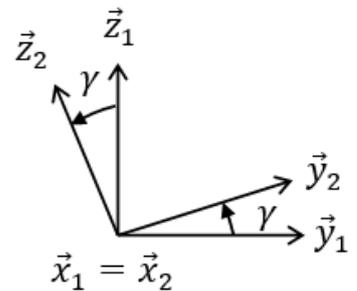
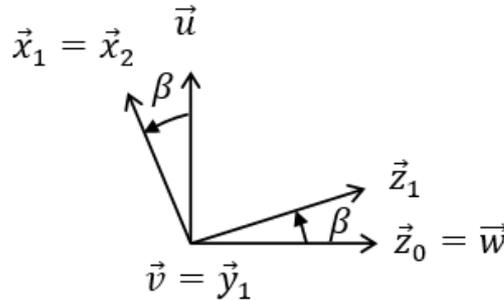
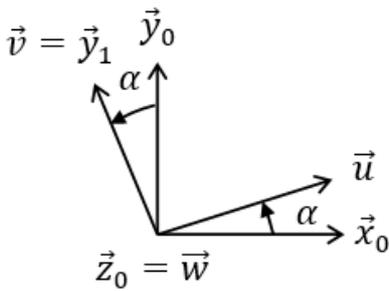
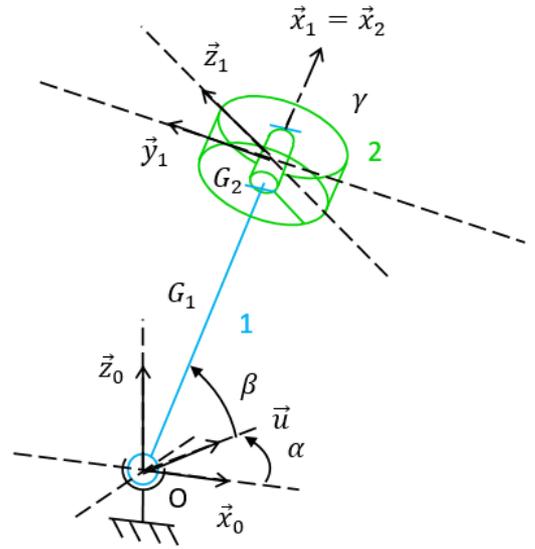
**Question 3 :** Lister les AM extérieures à  $\Sigma$ .

**Question 4 :** Déterminer les matrices d'inertie de 1 et de 2 en O.

**Question 5 :** Calculer le moment dynamique de  $\Sigma/O$ .

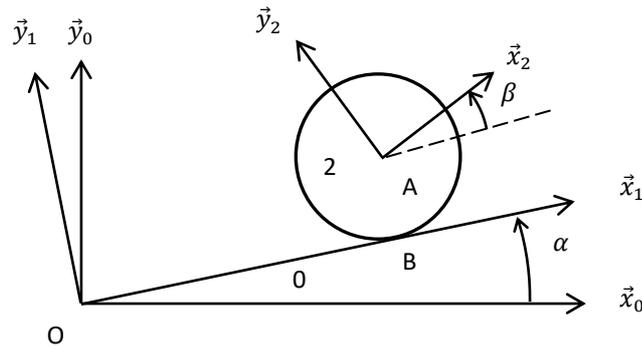
**Question 6 :** Sans résoudre les équations du mouvement, déterminer la direction principale du mouvement 1/0.

**Question 7 :** Dessiner les différents vecteurs  $\vec{R}_{t \rightarrow 2}$ ,  $\vec{M}_{t \rightarrow 2}(O)$ ,  $\vec{\sigma}_{2/0}(O)$ ,  $\vec{\delta}_{2/0}(O)$  sur la photo.



## Exercice 14 : ROULEAU SUR PLAN INCLINÉ

On s'intéresse aux équations générales du mouvement lors du lâcher d'un rouleau posé sur un plan incliné.



On considère :

- Le bâti 0 munie du repère  $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  galiléen ;
- Le cylindre 2, homogène, de révolution d'axe  $(A, \vec{z}_2)$ , de masse  $m$  et de rayon  $R$ . Il est muni du repère  $R_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  ;

On distingue les points :

- B, point de contact entre 2 et 0 ;
- $B_0$ , appartenant au solide 0 ;
- $B_2$ , appartenant au solide 2.

On pose :

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{x}_1 + R\vec{y}_1 \quad \alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) \quad \beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

$f$  le coefficient de frottement.

$g$  la constante de pesanteur.

Hypothèses :

Le problème est plan.

Le cylindre 2 est lâché sans vitesse initiale.

**Question 1 :** Déterminer le torseur cinématique 2/0.

**Question 2 :** Caractériser les torseurs des AM sur 2 en B.

**Question 3 :** Ecrire l'équation reliant les paramètres du mouvement.

**Question 4 :** Dans le cas du roulement sans glissement déterminer le mouvement du rouleau.

## Exercice 15 : ROBOVOLC

(d'après X ENS-PSI 2017)

On s'intéresse au véhicule Robovolc, un robot qui explore le flanc des volcans. Ce robot est capable de :

- s'approcher d'un cratère actif ;
- collecter des échantillons rocheux issus de rejets éruptifs ;
- collecter des échantillons gazeux ;
- collecter d'autres données physiques et chimiques.



### Étude du bras manipulateur

Le package scientifique équipant ROBOVOLC est formé d'un bras manipulateur et d'une pince servant d'effecteur pour collecter des échantillons rocheux et poser/prendre des instruments sur le sol. Ces organes sont pilotés par des moteurs à courant continu contrôlés par des modules électroniques. Le système est en outre constitué d'un système d'échantillonnage des gaz (avec sonde) qui ne sera pas étudié ici.

L'objectif de cette partie est de construire un modèle dynamique du bras manipulateur afin, par la suite, de vérifier le critère suivant du cahier des charges :

CRITÈRE	VALEUR
masse maximale des objets à saisir	2,5 kg

### Modélisation cinématique

Le bras manipulateur est de type SCARA (*Selective Compliance Assembly Robot Arm*) ; c'est un système mécanique poly-articulé avec trois axes parallèles et une architecture en série (Figure 1). Il présente plusieurs avantages, notamment sa précision, sa rapidité, et sa très grande rigidité verticale.

L'ensemble est constitué de trois pièces assimilées à des solides indéformables :

- le bras 1, de masse  $m_1$ , auquel on associe un repère  $(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- le bras 2, de masse  $m_2$ , auquel on associe un repère  $(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  ;
- la tige 3 au bout de laquelle se situe la pince et éventuellement l'objet saisi. La masse  $m_3$  de ce sous-ensemble est supposée ponctuelle au point  $P$  correspondant à la position de la pince.

Dans cette étude, le châssis de ROBOVOLC constitue le bâti 0 auquel on associe un repère (fixe)  $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . On suppose par la suite que le sol est plan et horizontal ; la direction  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1 = \vec{z}_2$  correspond donc à la verticale. On suppose également que le référentiel lié au bâti est galiléen.

Le positionnement horizontal de la pince dans le plan  $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  est obtenu par deux rotations indépendantes :

- celle du bras 1 en liaison pivot d'axe  $(O_1, \vec{z}_0)$  par rapport au bâti 0, on note  $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$  l'angle correspondant ;
- celle du bras 2 en liaison pivot d'axe  $(O_2, \vec{z}_0)$  par rapport au bras 1, on note  $\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  l'angle correspondant.

Le positionnement vertical de la pince est quant à lui obtenu par une liaison glissière de direction  $\vec{z}_0$  entre la tige 3 et le bras 2.

Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

On note :  $\overline{O_0O_1} = d_1\vec{z}_0$ ,  $\overline{O_1O_2} = l_1\vec{x}_1 + d_2\vec{z}_0$ ,  $\overline{O_2P} = l_2\vec{x}_2 - \lambda_3\vec{z}_0$

Les 3 degrés de liberté du bras sont donc  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\lambda_3$ . Le débattement permis pour les deux liaisons pivot est  $\pm 150^\circ$  (limitation par des butées).

Un schéma cinématique du système est proposé sur la Figure 1.

On donne de plus :

$d_1 = 500 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 30 \text{ mm}$ ,  $l_1 = 500 \text{ mm}$ ,  $l_2 = 500 \text{ mm}$ ,

$m_1 = 2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 2 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 6 \text{ kg}$  (incluant un objet saisi de masse 2,5 kg).

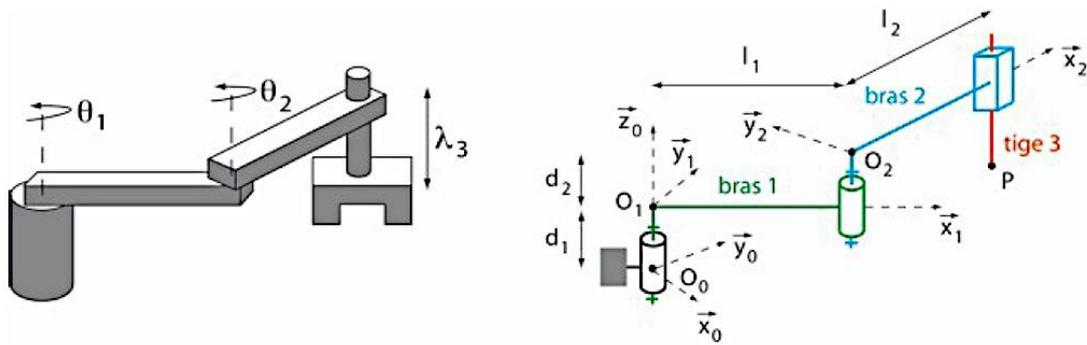


Figure 1 : schématisation et paramétrage du système SCARA

## Modélisation dynamique

Dans cette sous-partie, on construit un modèle dynamique du bras manipulateur.

On suppose que chaque bras  $i$  peut être modélisé géométriquement par un parallélépipède rectangle de génératrice  $\vec{x}_i$  et à base carrée dans les directions  $\vec{y}_i$  et  $\vec{z}_i$  (Figure 2). On suppose de plus que le bras est homogène ; son centre de gravité  $G_i$  correspond donc au centre géométrique avec  $\vec{O}_i G_i = \frac{l_i}{2} \vec{x}_i$ .

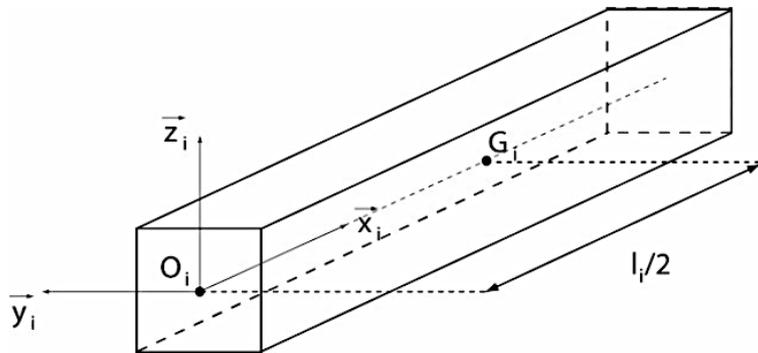


Figure 2 : modèle géométrique d'un bras

On donne l'écriture générale de la matrice d'inertie du bras  $i$  au point  $G_i$  :

$$I(i, G_i) = \begin{pmatrix} A_i & -F_i & -E_i \\ -F_i & B_i & -D_i \\ -E_i & -D_i & C_i \end{pmatrix}_{(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)}$$

**Question 1 :** A partir de l'expression générale précédente, préciser et justifier la forme simplifiée de la matrice d'inertie  $I(i, G_i)$  du bras  $i$  prenant en compte sa modélisation géométrique.

**Question 2 :** Déterminer l'hyperstatisme du modèle du système (Figure 1). Conclure sur la possibilité d'obtenir les différentes actions de liaison (leur calcul n'est pas demandé).

**Question 3 :** Calculer  $\vec{V}(G_1, 1/0)$ ,  $\vec{\Gamma}(G_1, 1/0)$ ,  $\vec{V}(G_2, 2/0)$ ,  $\vec{\Gamma}(G_2, 2/0)$ ,  $\vec{V}(P, 3/0)$  et  $\vec{\Gamma}(P, 3/0)$  en fonction des paramètres variables ( $\theta_1, \theta_2, \lambda_3$ ) et des dimensions constantes.

**Question 4 :** A partir du théorème du moment dynamique, donner l'expression du couple moteur  $\tau_2$  dans la liaison pivot d'axe ( $O_2, \vec{z}_0$ ) en fonction de  $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$  et des données du problème. Faire de même pour le couple moteur  $\tau_1$  dans la liaison pivot d'axe ( $O_1, \vec{z}_0$ ). On simplifiera les expressions en introduisant les notations

$$a_i = \frac{l_i}{2}, \quad \alpha = C_1 + m_1 a_1^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2, \quad \beta = C_2 + m_2 a_1^2 + m_3 l_2^2 \quad \text{et} \quad \gamma = m_2 l_1 a_2 + m_3 l_1 l_2$$

**Question 5 :** Montrer alors que la dynamique du système peut être décrite par un système d'équations différentielles du 2nd ordre non-linéaires et couplées, de la forme :

$$\mathbf{M}(\vec{\theta}) \ddot{\vec{\theta}} + \mathbf{C}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}) \dot{\vec{\theta}} + \mathbf{N}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}) = \vec{\tau}$$

avec :

$$\vec{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \lambda_3]^T ;$$

$\mathbf{M}(\vec{\theta})$  : matrice d'inertie ;

$\mathbf{C}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}})$  : matrice de Coriolis ;

$\vec{N}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}})$  : vecteur de forces de pesanteur ;

$\vec{\tau} = [\tau_1, \tau_2, F_3]^T$  : actions transmises par les moteurs au niveau des liaisons ( $F_3$  est l'effort dans la liaison glissière).

Préciser l'expression des grandeurs  $\mathbf{M}(\vec{\theta})$ ,  $\mathbf{C}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}})$  et  $\vec{N}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}})$  en fonction des données.

**Question 6 :** Montrer que les effets dynamiques dans le plan horizontal sont découplés de ceux dans la direction verticale.

**Question 7 :** Donner trois éléments qui pourraient faire sortir le modèle dynamique précédent de son domaine de validité.

## Déterminer les équations différentielles de mouvement et les lois de commande en effort dans un mécanisme en chaîne fermée

### Exercice 16 : ENERGIE CINETIQUE D'UNE BUGATTI CHIRON

On considère une Bugatti Chiron lancée à sa vitesse maximale.

$$V_{\text{châssis}} = 420 \text{ km/h.}$$

On donne

$$M_{\text{châssis}} = 1995 \text{ kg}, m_{\text{roue}} = 12 \text{ kg}, R_{\text{roue}} = 0,340 \text{ m}, L_{\text{roue}} = 0,366 \text{ m}$$

**Question 1 :** Calculer l'énergie cinétique du bolide.

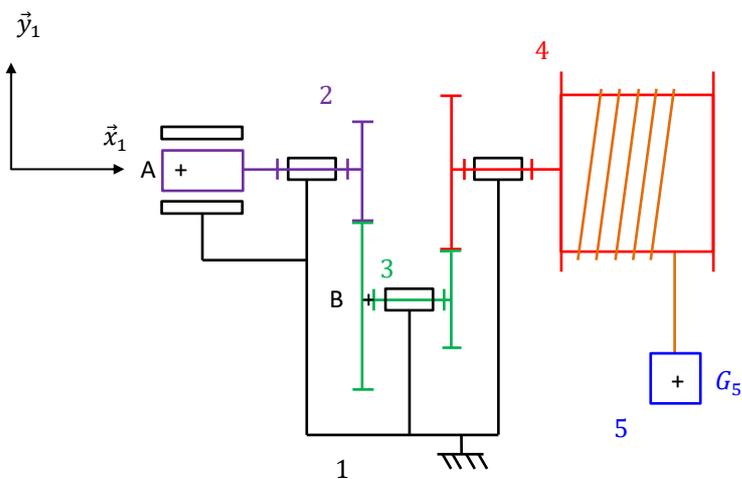
**Question 2 :** L'énergie cinétique des roues est-elle négligeable ?

Les 4 pneus coutent 42000 \$, ils sont fabriqués par Michelin spécialement pour Bugatti pour résister aux efforts dynamiques. Ce sont les composants les plus limitant de la voiture.



### Exercice 17 : MOTORISATION D'UN TREUIL

On s'intéresse à un treuil dont la photo et le modèle cinématique sont donnés ci-dessous :



Ce mécanisme comprend 5 ensembles :

- Un bâti 1 fixe, auquel on associe un repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- Un arbre moteur denté 2, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_1)$  avec le bâti :
  - de masse  $m_2$  ;
  - de centre d'inertie  $G_2$  supposé sur l'axe de rotation ;
  - de moment d'inertie  $J_2$  par rapport à l'axe de rotation ;
  - de nombre de dents  $Z_2$ .
- Un arbre intermédiaire 3 denté 2, en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{x}_1)$  avec le bâti :
  - de masse  $m_3$  ;
  - de centre d'inertie  $G_3$  supposé sur l'axe de rotation ;
  - de moment d'inertie  $J_3$  par rapport à l'axe de rotation ;
  - de nombres de dents  $Z_{3a}$  et  $Z_{3b}$ .
- Un tambour et roue dentée 4, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_1)$  avec le bâti :
  - de rayon  $R$  ;
  - de masse  $m_4$  ;
  - de centre d'inertie  $G_4$  supposé sur l'axe de rotation ;
  - de moment d'inertie  $J_4$  par rapport à l'axe de rotation ;
  - de nombre de dents  $Z_4$ .
- Un câble :
  - de masse négligeable, supposé inextensible.
- Une charge :
  - de masse  $m_5$  ;
  - de centre d'inertie  $G_5$  supposé sur l'axe de rotation.

On note  $g$  l'accélération de la pesanteur orientée suivant  $-\vec{y}_1$ .

On note  $C_m$  le couple exercée par le moteur sur l'arbre 2.

**Objectif** : déterminer la loi de commande en effort en vue de dimensionner le moteur électrique.  $C_m = f(M)$

Dans une première approche, on suppose que toutes les liaisons sont parfaites.

**Question 1** : Colorier et compléter le schéma cinématique en y mettant les différents éléments entrant en jeu (couple, vitesse, rendement, moment d'inertie).

**Question 2** : Déterminer la relation entre  $v_{5/1}$  la vitesse de déplacement de la charge par rapport au bâti et  $\omega_{2/1}$  la vitesse de rotation du moteur.

**Question 3** : Proposer et justifier une démarche de résolution pour déterminer la loi de commande en effort.

**Question 4** : Déterminer la loi de commande en effort. Interpréter les différents termes trouvés.

Dans une deuxième approche, on suppose un couple résistant au niveau de la liaison tambour-bâti qui est dû à un phénomène de frottement visqueux caractérisé par un coefficient  $\mu$ .

Rendement de chaque train d'engrenages du réducteur :  $\eta_{r1} = \eta_{r2} = 0,9$

**Question 5** : Modifier la loi de commande en effort obtenue précédemment en tenant compte de ces nouvelles hypothèses.

Application numérique :

$$Z_2 = 15 \text{ dents}$$

$$Z_{3a} = 150 \text{ dents}$$

$$Z_4 = 90 \text{ dents}$$

$$Z_{3b} = 15 \text{ dents}$$

$$\text{Moteur } N_{2/1} = 1400 \text{ tr/min}$$

$$\text{Tambour du treuil } \phi = 200 \text{ mm}$$

$$\text{Masse } m_5 = 100 \text{ kg}$$

$$J_2 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$J_3 = 0,12 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$$

$$J_4 = 2,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\mu = 0,1$$

On désire accélérer la charge durant 1s maximum et la monter sur une distance de 10m.

**Question 6** : Choisir un moteur.

## ANNEXE

Type	Puissance nominale à 50 Hz	Vitesse nominale	Couple nominal	Intensité nominale	Facteur de puissance	Rendement	Courant démarrage / Courant nominal	Masse
	$P_N$ kW	$N_N$ min <sup>-1</sup>	$C_N$ N.m	$I_N(400V)$ A	$\cos \varphi$	$\eta$ %	$I_D / I_N$	IM B3 kg

### Moteurs asynchrones 230V/400V – 6 pôles

<b>LS 80 L</b>	0.25	955	2.5	0.85	0.67	63	3.9	8.4
<b>LS 80 L</b>	0.37	950	3.7	1.1	0.72	66	4.3	9.7
<b>LS 80 L</b>	0.55	950	5.5	1.9	0.64	68	4.9	11
<b>LS 90 S</b>	0.75	930	7.7	2.1	0.77	68	4.2	13.5
<b>LS 90 L</b>	1.1	915	11.5	3	0.75	70	4.7	15.2
<b>LS 100 L</b>	1.5	905	15.8	4.2	0.74	69	4.5	20
<b>LS 100 L</b>	1.8	935	19	4.5	0.76	76	4.5	22
<b>LS 112 M</b>	2.2	905	23.2	5.8	0.76	72	5.6	24.2

### Moteurs asynchrones 230V/400V – 4 pôles

<b>LS 63 M</b>	0.18	1390	1.2	0.64	0.65	62	3.7	5
<b>LS 63 M<sup>1</sup></b>	0.18	1410	1.2	0.62	0.75	63	3.7	5
<b>LS 63 M</b>	0.25	1390	1.6	0.85	0.65	65	4	5.1
<b>LS 63 M<sup>1</sup></b>	0.25	1390	1.6	0.85	0.65	65	4	5.1
<b>LS 71 L</b>	0.25	1425	1.7	0.8	0.65	69	4.6	6.4
<b>LS 71 L</b>	0.37	1420	2.5	1.06	0.7	72	4.9	7.3
<b>LS 71 L</b>	0.55	1400	3.8	1.62	0.7	70	4.8	8.3
<b>LS 80 L</b>	0.55	1400	3.8	1.6	0.74	67	4.4	8.2
<b>LS 80 L</b>	0.75	1400	5.1	2.01	0.77	70	4.5	9.3
<b>LS 80 L</b>	0.9	1425	6	2.44	0.73	73	5.8	10.9
<b>LS 90 S</b>	1.1	1429	7.4	2.5	0.84	76.8	4.8	11.5
<b>LS 90 L</b>	1.5	1428	10	3.4	0.82	78.5	5.3	13.5
<b>LS 90 L</b>	1.8	1438	12	4	0.82	80.1	6	15.2