TD03 DYNAMIQUE
CORRECTION

Caractériser les inerties des solides en mouvement

Exercice 1 : MATRICE D'INERTIE DE SOLIDES ELEMENTAIRES

Question 1 : *Donner l'expression de la matrice d'inertie, au centre d'inertie dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, de chacun des solides suivants :*

Dans ces exemples, on a une symétrie de révolution $(G, \vec{z})$, donc $I_{G,S} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ on a $I_{G,\vec{x},S} = I_{G,\vec{y},S}$

Cylindre plein

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ \quad z \end{cases}$$

$$C = I_{zz} = I_{(G,\vec{z}),S} = \int_S (x^2+y^2)\,dm = \int_V r^2\,\rho dV = \rho \int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{z=-\frac{L}{2}}^{z=\frac{L}{2}} r^2\,rdrd\theta dz = 2\pi\rho L\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = 2\pi\frac{m}{\pi L R^2}L\frac{R^4}{4} = m\frac{R^2}{2}$$

$$Trace(I_{G,S}) = \mathrm{A}+\mathrm{A}+\mathrm{C} = \int_S (y^2+z^2)\,dm + \int_S (z^2+x^2)\,dm + \int_S (x^2+y^2)\,dm = 2\int_S (x^2+y^2+z^2)\,dm$$
$$= 2\left(m\frac{R^2}{2} + \int_V z^2\,\rho dV\right)$$

$$\int_V z^2\,\rho\, rdrd\theta dz = \rho \int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{z=-\frac{L}{2}}^{z=\frac{L}{2}} z^2\,rdrd\theta dz = 2\pi\rho\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=R} L\left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=-\frac{L}{2}}^{z=\frac{L}{2}} = 2\pi\frac{m}{\pi R^2 L}\frac{R^2}{2}2\frac{L^3}{24} = m\frac{L^2}{12}$$

$$\Rightarrow 2A + C = 2m\frac{R^2}{2} + 2m\frac{L^2}{12} \Rightarrow A = I_{xx} = \frac{1}{2}\left(2m\frac{R^2}{2} + 2m\frac{L^2}{12} - m\frac{R^2}{2}\right) = m\frac{R^2}{4} + m\frac{L^2}{12}$$

$$I_{G,S} = \begin{pmatrix} m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{L^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{L^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Il est beaucoup plus facile d'utiliser des astuces de calcul que des changements de coordonnées. Pour les cas plus compliqués, on utiliser SolidWorks → Evaluer → Propriété de masse → On lit l'inertie que l'on cherche dans la matrice bien orientée.

Disque

$$C = I_{zz} = \int_S r^2\,dm = \int_S r^2\,\rho dS = \rho\int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r^2\,rdrd\theta = 2\pi\rho\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = 2\pi\frac{m}{\pi R^2}\frac{R^4}{4} = m\frac{R^2}{2}$$

$$Trace(I_{G,S}) = \mathrm{A}+\mathrm{A}+\mathrm{C} = \int_S (y^2+z^2)\,dm + \int_S (z^2+x^2)\,dm + \int_S (x^2+y^2)\,dm = 2\int_S (x^2+y^2+z^2)\,dm$$
$$= 2\left(m\frac{R^2}{2} + \int_S z^2\,dm\right) = mR^2$$

$$\Rightarrow 2A + C = 2m\frac{R^2}{2} \Rightarrow 2A + m\frac{R^2}{2} = mR^2 \Rightarrow A = I_{xx} = m\frac{R^2}{4}$$

$$I_{G,S} = \begin{pmatrix} m\frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Un disque est un cylindre à base circulaire avec $L = 0$.

Cerceau

$$C = I_{zz} = \int_S (x^2+y^2)\,dm = \rho\int_l R^2\,dl = \rho\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} R^2 R d\theta = 2\pi R^3\frac{m}{2\pi R} = mR^2$$

$$Trace(I_{G,S}) = A + A + C = 2\int_S (x^2+y^2+z^2)\,dm = 2\left(mR^2 + \int_S z^2\,dm\right) = 2mR^2$$

$$\Rightarrow 2A + mR^2 = 2mR^2 \Rightarrow A = I_{xx} = \frac{mR^2}{2}$$

$$I_{G,S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Tube

$$C = I_{zz} = \int_S (x^2+y^2)\,dm = \int_V r^2\,\rho dV = \rho\int_{r=R_i}^{r=R_e}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{z=-\frac{L}{2}}^{z=\frac{L}{2}} r^2\,rdrd\theta dz = 2\pi\rho L\left[\frac{r^4}{4}\right]_{R_i}^{R_e} = 2\pi\frac{m}{\pi L({R_e}^2-{R_i}^2)}L\frac{{R_e}^4-{R_i}^4}{4} = m\frac{{R_e}^2+{R_i}^2}{2}$$

$$Trace(I_{G,S}) = A + A + C = 2\int_S (x^2+y^2+z^2)\,dm = 2\left(m\frac{{R_e}^2+{R_i}^2}{2} + \int_S z^2\,dm\right)$$

$$\int_V z^2\,\rho dV = \rho\int_{r=R_i}^{r=R_e}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{z=-\frac{L}{2}}^{z=\frac{L}{2}} z^2 rdrd\theta dz = \rho\left[\frac{r^2}{2}\right]_{R_i}^{R_e}2\pi\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{m}{\pi L({R_e}^2-{R_i}^2)}\frac{{R_e}^2-{R_i}^2}{2}2\pi 2\frac{L^3}{24} = m\frac{L^2}{12}$$

$$\Rightarrow 2A + m\frac{{R_e}^2+{R_i}^2}{2} = m({R_e}^2+{R_i}^2) + 2m\frac{L^2}{12} \Rightarrow A = I_{xx} = m\frac{{R_e}^2+{R_i}^2}{4} + m\frac{L^2}{12}$$

$$I_{G,S} = \begin{pmatrix} m\left(\frac{{R_e}^2+{R_i}^2}{4}+\frac{L^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{{R_e}^2+{R_i}^2}{4}+\frac{L^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{{R_e}^2+{R_i}^2}{2} \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Tige avec un repère centré

$$A = I_{xx} = \int_S (y^2+z^2)\,dm = \int_L z^2\,\rho dz = \rho\int_{z=-\frac{L}{2}}^{z=\frac{L}{2}} r^2\,dz = \rho\left[\frac{r^3}{3}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{m}{L}2\frac{L^3}{24} = m\frac{L^2}{12}$$

$$C = I_{zz} = \int_S (x^2+y^2)\,dm = \int_S r^2\,dm = 0$$

$$I_{G,S} = \begin{pmatrix} m\frac{L^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Négliger un rayon revient à négliger le moment d'inertie correspondant.

Tige avec un repère excentré

$$A = I_{xx} = \int_S (y^2+z^2)\,dm = \int_S z^2\,dm = \int_L z^2\,\rho dz = \rho\int_{z=0}^{z=L} r^2\,dz = \rho\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^L = \frac{m}{L}\frac{L^3}{3} = m\frac{L^2}{3}$$

$$C = I_{zz} = \int_S (x^2+y^2)\,dm = \int_S r^2\,dm = 0$$

$$I_{O,S} = \begin{pmatrix} m\frac{L^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{L^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Attention, le + peut sembler contre intuitif, mais la masse n'est pas la même entre un cylindre et un tube.

Question 2 : *Utiliser le théorème de Huygens sur la Tige pour retrouver le résultat.*

$$I_{(O,\vec{z}),S} = I_{(G,\vec{z}),S} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = m\frac{L^2}{12} + m\frac{L^2}{4} = m\frac{L^2}{3}$$

Exercice 2 : **DISQUE PERCE**

Question 1 : *Déterminer la position du centre de masse G en fonction de r, R et e dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$.*

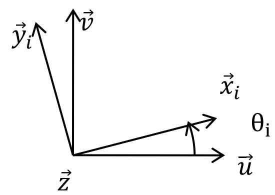
Relation du barycentre pour des systèmes disjoints :
$$m\overrightarrow{AG} = m_1\overrightarrow{AG_1} + m_2\overrightarrow{AG_2}$$ valable pour tout point A

Le point A est affecté d'une masse $m_1 = \rho\pi R^2$ avec un signe $+$.
Le point B est affecté d'une masse $m_2 = \rho\pi r^2$ avec un signe $-$.
$\overrightarrow{AB} = e\vec{u}$

$$\Rightarrow (m_1 - m_2)\overrightarrow{AG} = m_2\overrightarrow{AB}$$
$$\Rightarrow \rho\pi(R^2 - r^2)\overrightarrow{AG} = -\rho\pi r^2\overrightarrow{AB}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = -\frac{r^2}{R^2 - r^2}e\vec{u}$$

Question 2 : *Déterminer 2 relations à poser sur les coordonnées de ces deux points afin d'atteindre l'objectif proposé.*

On veut un solide équilibré $G = A$.
Le point A est affecté d'une masse $m_1 = \rho\pi R^2$ avec un signe $+$.
Le point B est affecté d'une masse $m_2 = \rho\pi r^2$ avec un signe $-$.
Le point P_3 est affecté d'une masse m_3 avec un signe $+$.
Le point P_4 est affecté d'une masse m_4 avec un signe $+$.



$$\vec{0} = -m_2\overrightarrow{AB} + m_3\overrightarrow{AP_3} + m_4\overrightarrow{AP_4}$$
$$\Rightarrow m_3\overrightarrow{AP_3} + m_4\overrightarrow{AP_4} = m_2\overrightarrow{AB}$$

On projette sur $(\vec{u}, \vec{v})$.

$$\Rightarrow \begin{cases} m_3 r_3 \cos\theta_3 + m_4 r_4 \cos\theta_4 = m_2 e \\ m_3 r_3 \sin\theta_3 + m_4 r_4 \sin\theta_4 = 0 \end{cases}$$

Exemple : $m_3 = m_4$, $r_3 = r_4$,

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m_3 r_3 \cos\theta_3 = m_2 e \\ \theta_3 = -\theta_4 \end{cases}$$

Les deux masses sont nécessairement symétriques par rapport à la droite $(A, \vec{u})$.
Si $0° < \theta_3 < 90°$ il faut un apport de matière de m_3 en tout.
Si $90° < \theta_3 < 180°$ il faut percer des trous et enlever m_3 en tout.
On a réalisé un équilibrage statique.

Exercice 3 : **MATRICE D'INERTIE DE SOLIDES ELEMENTAIRES**

Question 1 : *Donner l'expression de la matrice d'inertie, au centre d'inertie dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, de chacun des solides suivants :*

La boule et la sphère ont une symétrie centrale, donc $I_{G,S} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ on a $I_{G,\vec{x},S} = I_{G,\vec{y},S} = I_{G,\vec{z},S}$

Boule

Méthode 1 :

$$Trace(I_{G,S}) = 3A = I_{G,\vec{x},S} + I_{G,\vec{y},S} + I_{G,\vec{z},S} = \int_S (y^2 + z^2)\,dm + \int_S (z^2 + x^2)\,dm + \int_S (x^2 + y^2)\,dm = 2\rho\int_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dV$$
$$= 2\rho\int_{r=0}^{r=R} r^2 4\pi r^2 dr = 2\rho 4\pi\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R = 2\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}4\pi\frac{R^5}{5} = 3m\frac{2}{5}R^2$$

donc $A = \frac{2}{5}mR^2$

$$I_{G,S} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Méthode 2 :

$$A = I_{G,\vec{z},S} = \int_S (x^2+y^2)\,dm = \rho \int_V (x^2+y^2)\,dV$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad dV = r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi \qquad \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \sin^3\theta\, d\theta = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\left(\frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin(3\theta)\right)d\theta = \frac{4}{3}$$

$$\text{donc } A = \rho\int_V\left((r\sin\theta\cos\varphi)^2 + (r\sin\theta\sin\varphi)^2\right) r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi = \rho\int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} r^4\sin^3\theta\, drd\theta d\varphi =$$
$$\rho\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R 2\pi\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\sin^3\theta\, d\theta = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{R^5}{5}2\pi\frac{4}{3} = \frac{2}{5}mR^2$$

Sphère

$$Trace(I_{G,S}) = 3A = I_{G,\vec{x},S} + I_{G,\vec{y},S} + I_{G,\vec{z},S} = \int_S (y^2+z^2)\,dm + \int_S (z^2+x^2)\,dm + \int_S (x^2+y^2)\,dm = 2\rho\int_V (x^2+y^2+z^2)\,dV$$

$$= 2\rho\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} R^2R^2\sin\theta\, d\theta d\varphi = 2\rho 2\pi R^4[-\cos\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 2\frac{m}{4\pi R^2}2\pi R^4 2 = 2mR^2$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{3}mR^2$$

$$I_{G,S} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Exercice 4 : **MATRICE D'INERTIE DE SOLIDES ELEMENTAIRES**

Question 1 : *Donner l'expression de la matrice d'inertie, au centre d'inertie dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, de chacun des solides suivants :*

Le parallélépipède à 2 plans de symétrie, donc $I_{G,S} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Parallélépipède

$$C = I_{zz} = \int_S (x^2+y^2)\,dm = \rho\int_{x=-\frac{a}{2}}^{x=\frac{a}{2}}\int_{y=-\frac{b}{2}}^{y=\frac{b}{2}}\int_{z=-\frac{c}{2}}^{z=\frac{c}{2}}(x^2+y^2)dxdydz = \frac{m}{abc}\left(bc\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} + ac\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\right) = m\left(\frac{a^2}{12}+\frac{b^2}{12}\right)$$

Par permutation, on en déduit les autres.

$$I_{G,S} = \begin{pmatrix} m\left(\frac{b^2}{12}+\frac{c^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{a^2}{12}+\frac{c^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\left(\frac{a^2}{12}+\frac{b^2}{12}\right) \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Plaque rectangulaire

$$C = I_{zz} = \int_S (x^2+y^2)\,dm = \rho\int_{x=-\frac{a}{2}}^{x=\frac{a}{2}}\int_{y=-\frac{b}{2}}^{y=\frac{b}{2}}(x^2+y^2)dxdy = \frac{m}{ab}\left(b\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} + a\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\right) = m\left(\frac{a^2}{12}+\frac{b^2}{12}\right)$$

Par permutation, on en déduit les autres.

$$I_{G,S} = \begin{pmatrix} m\frac{b^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{a^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m\left(\frac{a^2}{12}+\frac{b^2}{12}\right) \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Une plaque rectangulaire est un parallélépipède avec $c = 0$.

Tige avec un repère centré

$A = I_{xx} = \int_S (y^2 + z^2)\, dm = \rho \int_{z=-\frac{c}{2}}^{z=\frac{c}{2}} z^2\, dz = \rho \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{m}{L} 2 \frac{L^3}{24} = m\frac{L^2}{12}$

$C = I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2)\, dm = 0$

$$I_{G,S} = \begin{pmatrix} m\frac{L^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Négliger une épaisseur revient à négliger le moment d'inertie correspondant.

Exercice 5 : **PARALLELEPIPEDE PERCE**

Question 1 : *Déterminer la matrice d'inertie au point G dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, d'un parallélépipède de dimension a.b.c percé d'un cylindre de rayon R et de masse volumique ρ. Les 2 centres d'inertie des deux volumes sont confondus en G.*

Le parallélépipède percé à 2 plans de symétrie, donc $I_{G,S} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$, $D = E = F = 0$

Par linéarité de l'intégrale, on peut sommer ou soustraire des matrices d'inerties en un même point.

$$I_{G,par} = \begin{pmatrix} m_{par}\left(\frac{b^2}{12} + \frac{c^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m_{par}\left(\frac{a^2}{12} + \frac{c^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m_{par}\left(\frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12}\right) \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$I_{G,cyl} = \begin{pmatrix} m_{cyl}\left(\frac{R^2}{4} + \frac{c^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m_{cyl}\left(\frac{R^2}{4} + \frac{c^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m_{cyl}\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$m_{par} = \rho abc$$
$$m_{cyl} = \rho \pi R^2 c$$

$$I_{G,S} = I_{G,para} - I_{G,cyl}$$
$$= \begin{pmatrix} \rho abc\left(\frac{b^2}{12} + \frac{c^2}{12}\right) - \rho\pi R^2 c\left(\frac{R^2}{4} + \frac{c^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \rho abc\left(\frac{a^2}{12} + \frac{c^2}{12}\right) - \rho\pi R^2 c\left(\frac{R^2}{4} + \frac{c^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \rho abc\left(\frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12}\right) - \rho\pi R^2 c\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Question 2 : *Déterminer la matrice d'inertie au point O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, d'un parallélépipède de dimension a.b.c percé d'un cylindre de rayon R et de masse volumique ρ. Les 2 centres d'inertie des deux volumes ne sont plus confondus.*

$I_{G,S} = I_{G,para} - I_{G,cyl}$

Remarque : On utilise le théorème de Huygens pour changer le cylindre de révolution de point. On ne peut que sommer des matrices d'inertie au même point et dans la même base.

$$I_{A,cyl} = I_{G,cyl} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{cyl}d^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_{cyl}d^2 \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \Rightarrow I_{G,cyl} = I_{A,cyl} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{cyl}d^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_{cyl}d^2 \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$I_{G,S} = \begin{pmatrix} \rho abc\left(\frac{b^2}{12}+\frac{c^2}{12}\right) - \rho\pi R^2 c\left(\frac{R^2}{4}+\frac{c^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \rho abc\left(\frac{a^2}{12}+\frac{c^2}{12}\right) - \rho\pi R^2 c\left(\frac{R^2}{4}+\frac{c^2}{12}+d^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \rho abc\left(\frac{a^2}{12}+\frac{b^2}{12}\right) - \rho\pi R^2 c\left(\frac{R^2}{2}+d^2\right) \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Exercice 6 : **MATRICE D'INERTIE**

Question 1 : *Indiquer la forme des matrices d'inertie des solides suivants :*

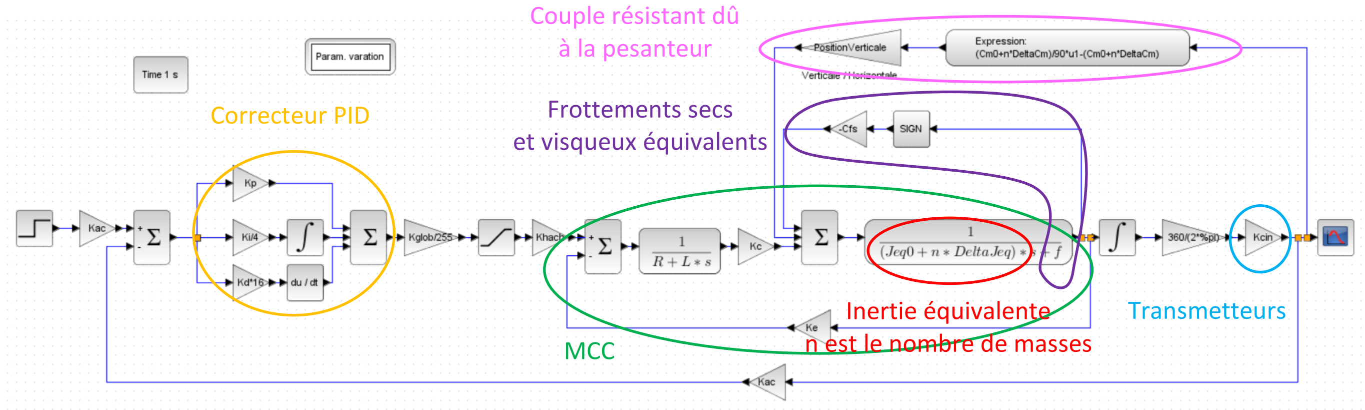
$$I_{G,villebrequin} = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad I_{G,bielle} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad I_{G,piston} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Exercice 7 : **INERTIE DU MAXPID**

Question 1 : *Déterminez le moment d'inertie du Maxpid pour 2 masselottes utile pour calculer le moment d'inertie équivalent rapporté à l'arbre moteur J_{eq}.*

On lit $C = I_{zz} \approx 113\,900\,000 \text{ g.mm}^2 \approx 0{,}114 \text{ kg.m}^2$

Question 2 : *Entourer dans la modélisation causale ci-dessous le moment d'inertie équivalent. Expliquer les différentes parties du schéma.*



Exercice 8 : **PULSAR**

Question 1 : *Calculer le moment cinétique du Soleil.*

$$\sigma_{1/Rg}(G) = I_1\omega_1 = \frac{2}{5}M_1{R_1}^2\omega_1 = \frac{2}{5}2.10^{30}.700000000^2.2.10^{-6} = 4{,}75.10^{41} kg.m^2$$

Question 2 : *Calculer la vitesse de rotation du pulsar en écrivant la conservation du moment cinétique.*

$$\frac{2}{5}M_1{R_1}^2\omega_1 = \frac{2}{5}M_1{R_2}^2\omega_2 \Rightarrow {R_1}^2\omega_1 = {R_2}^2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{{R_1}^2}{{R_2}^2}\omega_1 = \frac{700000^2}{10^2}2.10^{-6} \approx 1000\, rad/s \approx 6300\, tr/s$$

Exercice 9 : **ROTOR D'HELICOPTERE**

Question 1 : *Montrer que la matrice d'inertie du rotor est diagonale au point A dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.*

L'axe $(A,\vec{x})$ est un axe de symétrie matérielle, donc axe principal d'inertie, donc $I_{G,rotor} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

A tout point $M_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ qui appartient à la pale P_1 il existe :

- $M_2 = \begin{pmatrix} -b \\ a \\ c \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ qui appartient à la pale P_2 ;
- $M_3 = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ c \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ qui appartient à la pale P_3 ;
- $M_4 = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ c \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ qui appartient à la pale P_4.

Ainsi $F = \int_{rotor} xy\,dm = \int_{P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4} xy\,dm = \int_{P_1} xy\,dm + \int_{P_2} xy\,dm + \int_{P_3} xy\,dm + \int_{P_4} xy\,dm = ab - ab - ab + ab = 0$

La matrice est donc diagonale.

Des plans de symétrie impliquent des produits d'inertie nul mais la réciproque est fausse. C'est également ce qu'il se passe dans un équilibrage.

Question 2 : *Déterminer la matrice d'inertie de la pale P_1 au point A dans la base $(\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)$.*

La pale P_1 est une plaque, donc :

$$I_{G_1,P_1} = \begin{pmatrix} M\frac{a^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & M\frac{L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & M\left(\frac{a^2}{12}+\frac{L^2}{12}\right) \end{pmatrix}_{(G_1,\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)}$$

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_{A,S} = \bar{\bar{I}}_{G,S} + \bar{\bar{I}}_{A,\{G,m\}} = \bar{\bar{I}}_{G,S} + m\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

$\overrightarrow{AG_1} = \frac{L}{2}\vec{x} + \frac{a}{2}\vec{u}_1$

$$I_{A,P_1} = I_{G_1,P_1} + \begin{pmatrix} M\frac{a^2}{4} & -M\frac{a}{2}\frac{L}{2} & 0 \\ -M\frac{a}{2}\frac{L}{2} & M\frac{L^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & M\left(\frac{a^2}{4}+\frac{L^2}{4}\right) \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)} = \begin{pmatrix} M\frac{a^2}{3} & -M\frac{a}{2}\frac{L}{2} & 0 \\ -M\frac{a}{2}\frac{L}{2} & M\frac{L^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & M\left(\frac{a^2}{3}+\frac{L^2}{3}\right) \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)}$$

Question 3 : *Déterminer la matrice d'inertie de la pale P_1 au point A dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.*

La matrice de passage de $(\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)$ vers $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est $\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{u}_1 \\ \vec{v}_1 \end{pmatrix}$

Remarque : Attention $\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur, c'est une base. C'est une notation.

$$[\bar{\bar{I}}_{A,P_1}]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\alpha & sin\,\alpha \\ 0 & -sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M\frac{a^2}{3} & -M\frac{a}{2}\frac{L}{2} & 0 \\ -M\frac{a}{2}\frac{L}{2} & M\frac{L^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & M\left(\frac{a^2}{3}+\frac{L^2}{3}\right) \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\alpha & -sin\,\alpha \\ 0 & sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\alpha & sin\,\alpha \\ 0 & -sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M\frac{a^2}{3} & -M\frac{a}{2}\frac{L}{2}cos\,\alpha & M\frac{a}{2}\frac{L}{2}sin\,\alpha \\ -M\frac{a}{2}\frac{L}{2} & M\frac{L^2}{3}cos\,\alpha & -M\frac{L^2}{3}sin\,\alpha \\ 0 & M\left(\frac{a^2}{3}+\frac{L^2}{3}\right)sin\,\alpha & M\left(\frac{a^2}{3}+\frac{L^2}{3}\right)cos\,\alpha \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$= \begin{pmatrix} M\frac{a^2}{3} & -M\frac{a}{2}\frac{L}{2}cos\,\alpha & M\frac{a}{2}\frac{L}{2}sin\,\alpha \\ -M\frac{a}{2}\frac{L}{2}cos\,\alpha & M\frac{L^2}{3}cos^2\alpha + M\left(\frac{a^2}{3}+\frac{L^2}{3}\right)sin^2\alpha & -M\frac{L^2}{3}cos\,\alpha\,sin\,\alpha + M\left(\frac{a^2}{3}+\frac{L^2}{3}\right)cos\,\alpha\,sin\,\alpha \\ M\frac{a}{2}\frac{L}{2}sin\,\alpha & -M\frac{L^2}{3}cos\,\alpha\,sin\,\alpha + M\left(\frac{a^2}{3}+\frac{L^2}{3}\right)cos\,\alpha\,sin\,\alpha & M\frac{L^2}{3}sin^2\alpha + M\left(\frac{a^2}{3}+\frac{L^2}{3}\right)cos\,\alpha \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$= \begin{pmatrix} M\frac{a^2}{3} & -M\frac{a}{2}\frac{L}{2}cos\,\alpha & M\frac{a}{2}\frac{L}{2}sin\,\alpha \\ -M\frac{a}{2}\frac{L}{2}cos\,\alpha & M\frac{L^2}{3} + M\frac{a^2}{3}sin^2\alpha & -M\frac{L^2}{3}cos\,\alpha\,sin\,\alpha + M\left(\frac{a^2}{3}+\frac{L^2}{3}\right)cos\,\alpha\,sin\,\alpha \\ M\frac{a}{2}\frac{L}{2}sin\,\alpha & -M\frac{L^2}{3}cos\,\alpha\,sin\,\alpha + M\left(\frac{a^2}{3}+\frac{L^2}{3}\right)cos\,\alpha\,sin\,\alpha & M\frac{L^2}{3} + M\frac{a^2}{3}cos\,\alpha \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Si on a compris la démarche, on peut se contenter de calculer les termes diagonaux.

Par exemple : $I_{xx} = \vec{x}.\bar{\bar{I}}_{A,P_1}.\vec{x}$ etc Attention, quand on multiplie une matrice et un vecteur, ils doivent être exprimé dans la même base.

Question 4 : *Donner les égalités entre les moments d'inertie A, B et C des différentes pales P_i par rapport aux axes $(A,\vec{x})$, $(A,\vec{y})$ et $(A,\vec{z})$. En déduire la matrice d'inertie du rotor au point A dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.*

On a déjà démontré dans la question 1 que la matrice du rotor est diagonale.

$$I_{A,rotor} = \begin{pmatrix} A_1 & ? & ? \\ ? & B_1 & ? \\ ? & ? & C_1 \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \begin{pmatrix} A_2 & ? & ? \\ ? & B_2 & ? \\ ? & ? & C_2 \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \begin{pmatrix} A_3 & ? & ? \\ ? & B_3 & ? \\ ? & ? & C_3 \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \begin{pmatrix} A_4 & ? & ? \\ ? & B_4 & ? \\ ? & ? & C_4 \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1+A_2+A_3+A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_1+B_2+B_3+B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_1+C_2+C_3+C_4 \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Par symétrie, on observe que :

$$\begin{cases} A_1 = B_2 = A_3 = B_4 \\ B_1 = A_2 = B_3 = A_4 \\ C_1 = C_2 = C_3 = C_4 \end{cases}$$

En effet, les pales sont tournées de 90°.

$$I_{A,rotor} = \begin{pmatrix} 2A_1+2B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2A_1+2B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 4C_1 \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$= \begin{pmatrix} 2M\frac{a^2}{3}+2M\frac{L^2}{3}+2M\frac{a^2}{3}\sin^2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2M\frac{a^2}{3}+2M\frac{L^2}{3}+2M\frac{a^2}{3}\sin^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4M\frac{L^2}{3}+4M\frac{a^2}{3}\cos\alpha \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}ML^2 + \frac{2}{3}Ma^2(1+\sin^2\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}ML^2 + \frac{2}{3}Ma^2(1+\sin^2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}ML^2 + \frac{4}{3}Ma^2\cos\alpha \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Exercice 10 : **HELICE TRIPALE**

Question 1 : *Montrer que la matrice d'inertie d'une hélice tripale est diagonale au point O dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.*

A tout point $M_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ qui appartient à la pale P_1 il existe :

- $M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}b}{2} \\ \frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{b}{2} \\ c \end{pmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ qui appartient à la pale P_2 ;
- $M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}b}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{b}{2} \\ c \end{pmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ qui appartient à la pale P_3.

<u>Remarque :</u> $\begin{pmatrix} -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}b}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{b}{2} \\ c \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} \cos 120° & -\sin 120° & 0 \\ \sin 120° & \cos 120° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

$I_{G,hélice} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ on doit donc montrer que $D = E = F = 0$.

$$D = \int_{hélice} xy\, dm = \int_{P_1 \cup P_2 \cup P_3} xy\, dm = \int_{P_1} xy\, dm + \int_{P_2} xy\, dm + \int_{P_3} xy\, dm$$

$$ab + \left(-\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}b}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{b}{2}\right) + \left(-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}b}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{b}{2}\right)$$

$$= ab + \frac{1}{4}\left(-\sqrt{3}a^2 + ab - 3ab + \sqrt{3}b^2\right) + \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}a^2 + ab - 3ab - \sqrt{3}b^2\right) = 0$$

La matrice est donc bien diagonale.

Déterminer les torseurs cinétique et dynamique d'un ensemble de solide

Exercice 11 : **EOLIENNE**

Question 1 : *Préciser la forme de la matrice d'inertie de la girouette 1 au point A.*

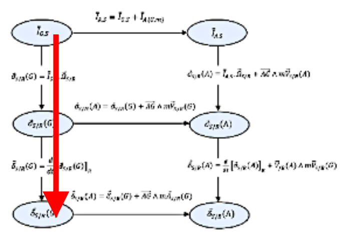
La girouette 1 possède un plan de symétrie $(A,\vec{x}_1,\vec{z}_1)$.

$$I_{A,1} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(A,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$$

Remarque : $(A,\vec{y}_1)$ est axe principal d'inertie.

Question 2 : *Déterminer au point A les éléments de réduction du torseur dynamique $\mathcal{D}(1/0)$.*

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha}\vec{z}_0$$
$$\vec{V}_{1/0}(A) = \vec{0}$$
$$\vec{A}_{1/0}(A) = \vec{0}$$



Départ : $\bar{\bar{I}}_{A,1}$ avec $A = G_1$

Arrivée : $\vec{\delta}_{1/0}(A)$ avec $A = G_1$

Chemin : On calcule donc directement $\vec{\delta}_{1/0}(A)$ à partir de $\vec{\sigma}_{1/0}(A)$.

$$\vec{\sigma}_{1/0}(A) = \bar{\bar{I}}_{A,1}.\vec{\Omega}_{1/0} + \overrightarrow{AA} \wedge m\vec{V}_{1/0}(A) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(A,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} = -E_1\dot{\alpha}\vec{x}_1 + C_1\dot{\alpha}\vec{z}_1$$

$$\vec{\delta}_{1/0}(A) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{1/0}(A)\right]_{/0} + \vec{V}_{/0}(A) \wedge \mathrm{m}\vec{V}_{1/0}(A) = \frac{d}{dt}[-E_1\dot{\alpha}\vec{x}_1 + C_1\dot{\alpha}\vec{z}_1]_{/0} = -E_1\ddot{\alpha}\vec{x}_1 - E_1\dot{\alpha}\frac{d}{dt}[\vec{x}_1]_{/0} + C_1\ddot{\alpha}\vec{z}_1$$
$$= -E_1\ddot{\alpha}\vec{x}_1 - E_1\dot{\alpha}^2\vec{y}_1 + C_1\ddot{\alpha}\vec{z}_1$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{x}_1]_{/0} = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\alpha}\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = \dot{\alpha}\vec{y}_1$$

donc $\mathcal{D}(1/0) = \vec{\delta}_{1/0} = {}_A\begin{Bmatrix} m\vec{A}_{1/0}(A) \\ \vec{\delta}_{1/0}(A) \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -E_1\ddot{\alpha}\vec{x}_1 - E_1\dot{\alpha}^2\vec{y}_1 + C_1\ddot{\alpha}\vec{z}_1 \end{Bmatrix}$

Question 3 : *Déterminer au point A les éléments de réduction du torseur dynamique* $\mathcal{D}(2/0)$.

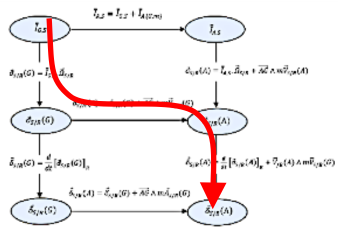
$$\vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\alpha}\vec{z}_1 + \dot{\beta}\vec{x}_1 = \dot{\beta}\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2 + \dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2$$
$$\overrightarrow{AB} = l\vec{x}_1$$
$$\vec{V}_{2/0}(B) = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AB}\right]_{/0} = \frac{d}{dt}[l\vec{x}_1]_{/0} = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge l\vec{x}_1 = l\dot{\alpha}\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = l\dot{\alpha}\vec{y}_1$$
$$\vec{A}_{2/0}(B) = \tfrac{d}{dt}\left[\vec{V}_{2/0}(B)\right]_{/0} = \tfrac{d}{dt}[l\dot{\alpha}\vec{y}_1)]_{/0} = l\ddot{\alpha}\vec{y}_1 + l\dot{\alpha}\tfrac{d}{dt}[\vec{y}_1]_{/0} = -l\dot{\alpha}^2\vec{x}_1 + l\ddot{\alpha}\vec{y}_1 + l\dot{\alpha}\dot{\beta}\vec{z}_1$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{y}_1]_{/0} = \dot{\alpha}\vec{z}_1 \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\alpha}\vec{x}_1$$

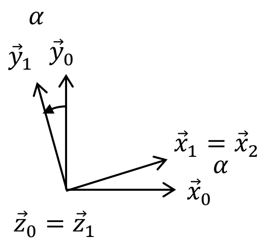
Départ : $\bar{\bar{I}}_{B,2}$ avec $B = G_2$

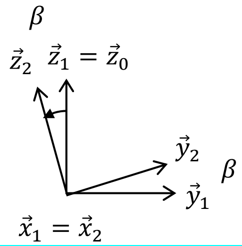
Arrivée : $\vec{\delta}_{2/0}(A)$

Chemin : A est un point de vitesse nulle /0, donc $\vec{V}_{/0}(A) = \vec{0}$. Il est plus facile de calculer $\vec{\delta}_{2/0}(A)$ en passant par $\vec{\sigma}_{2/0}(B)$ puis $\vec{\sigma}_{2/0}(A)$ que par $\vec{\delta}_{2/0}(B)$.



$$\vec{\sigma}_{2/0}(B) = \bar{\bar{I}}_{B,2}.\vec{\Omega}_{2/0} + \overrightarrow{BB} \wedge m\vec{V}_{2/0}(B) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(B,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\sin\beta \\ \dot{\alpha}\cos\beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)} =$$
$$A_2\dot{\beta}\vec{x}_2 + B_2\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2 + C_2\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2$$
$$\vec{\sigma}_{2/0}(A) = \vec{\sigma}_{2/0}(B) + \overrightarrow{AB} \wedge m\vec{V}_{2/0}(B) = A_2\dot{\beta}\vec{x}_2 + B_2\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2 + C_2\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2 + l\vec{x}_1 \wedge ml\dot{\alpha}\vec{y}_1$$
$$= A_2\dot{\beta}\vec{x}_2 + B_2\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2 + C_2\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2 + ml^2\dot{\alpha}\vec{z}_1$$





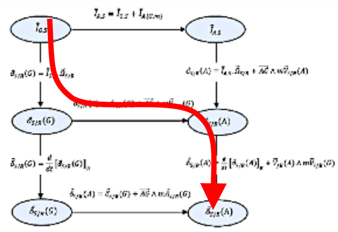
$$\vec{\delta}_{2/0}(A) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{2/0}(A)\right]_{/0} + \vec{V}_{/0}(A) \wedge m\vec{V}_{2/0}(B) = \frac{d}{dt}\left[A_2\dot{\beta}\vec{x}_2 + B_2\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2 + C_2\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2 + ml^2\dot{\alpha}\vec{z}_1\right]_{/0}$$
$$= A_2\ddot{\beta}\vec{x}_2 + A_2\dot{\beta}\frac{d}{dt}[\vec{x}_2]_{/0} + B_2\ddot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2 + B_2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta\,\vec{y}_2 + B_2\dot{\alpha}\sin\beta\frac{d}{dt}[\vec{y}_2]_{/0} + C_2\ddot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2$$
$$- C_2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\,\vec{z}_2 + C_2\dot{\alpha}\cos\beta\frac{d}{dt}[\vec{z}_2]_{/0} + ml^2\ddot{\alpha}\vec{z}_1$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{x}_2]_{/0} = \left(\dot{\alpha}\vec{z}_1 + \dot{\beta}\vec{x}_1\right) \wedge \vec{x}_1 = \dot{\alpha}\vec{y}_1$$
$$\frac{d}{dt}[\vec{y}_2]_{/0} = \left(\dot{\alpha}\vec{z}_1 + \dot{\beta}\vec{x}_2\right) \wedge \vec{y}_2 = -\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{x}_1 + \dot{\beta}\vec{z}_2$$
$$\frac{d}{dt}[\vec{z}_2]_{/0} = \left(\dot{\alpha}\vec{z}_1 + \dot{\beta}\vec{x}_2\right) \wedge \vec{z}_2 = -\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_1 - \dot{\beta}\vec{y}_2$$

$$\vec{\delta}_{2/0}(A) = A_2\ddot{\beta}\vec{x}_1 - B_2\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta\,\vec{x}_1 - C_2\dot{\alpha}^2\cos\beta\sin\beta\,\vec{x}_1 + A_2\dot{\alpha}\dot{\beta}\vec{y}_1 + B_2\ddot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2 + B_2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta\,\vec{y}_2 - C_2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta\,\vec{y}_2$$
$$+ B_2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\,\vec{z}_2 + +C_2\ddot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2 - C_2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta\,\vec{z}_2 + ml^2\ddot{\alpha}\vec{z}_1$$

donc $\mathcal{D}(2/0) = \vec{\delta}_{2/0} = {}_A\begin{Bmatrix} m\vec{A}_{2/0}(B) \\ \vec{\delta}_{2/0}(A) \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} -ml\dot{\alpha}^2\vec{x}_1 + ml\ddot{\alpha}\vec{y}_1 + ml\dot{\alpha}\dot{\beta}\vec{z}_1 \\ \dots \end{Bmatrix}$

Question 4 : *Sans faire de calcul, proposer une démarche pour calculer $\vec{\delta}_{3/0}(A)$.*



Le solide 3 est modélisé par une masse ponctuelle donc la matrice $I_{G_3,3}$ est nulle.

$$\vec{\sigma}_{3/0}(G_3) = \vec{0} \text{ car c'est une masse ponctuelle.}$$

$$\vec{\sigma}_{3/0}(A) = \vec{\sigma}_{3/0}(G_3) + \overrightarrow{AG_3} \wedge \vec{R}_{c\,3/0} = \cdots$$

$$\vec{\delta}_{3/0}(A) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{3/0}(A)\right]_{/0} = \cdots$$

$$\vec{V}_{3/0}(G_3) = \cdots$$

$$\vec{A}_{3/0}(G_3) = \cdots$$

Exercice 12 : **BRAS DE ROBOT**

Question 1 : *Déterminer l'expression des matrices d'inertie des bras $\bar{\bar{I}}_{G_2,2}$ dans la base B_2 et $\bar{\bar{I}}_{G_3,3}$ dans la base B_3.*

Les bras sont considérés comme étant des tiges, c'est-à-dire des cylindres de révolution dont le rayon est nul.

$$\bar{\bar{I}}_{G_2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(G_2,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)} \qquad \bar{\bar{I}}_{G_3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{(G_3,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)}$$

avec $B_2 = m\frac{L^2}{12}$ et $B_3 = m\frac{L^2}{12}$

On a ici $m = m_2 = m_3$ et $L = L_2 = L_3$

Question 2 : *Déterminer au point O les éléments de réduction du torseur dynamique $\mathcal{D}(2/0)$.*

$$\vec{V}_{2/0}(G_2) = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OG_2}\right]_{/0} = \frac{d}{dt}\left[\frac{L}{2}\vec{x}_2\right]_{/0} = \frac{L}{2}\dot{\alpha}\vec{y}_2$$

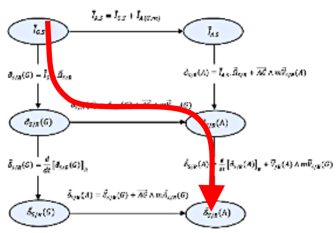
$$\vec{A}_{2/0}(G_2) = \frac{d}{dt}\left[\vec{V}_{2/0}(G_2)\right]_{/0} = \frac{d}{dt}\left[\frac{L}{2}\dot{\alpha}\vec{y}_2\right]_{/0} = \frac{L}{2}\ddot{\alpha}\vec{y}_2 + \frac{L}{2}\dot{\alpha}\frac{d}{dt}[\vec{y}_2]_{/0} = -\frac{L}{2}\dot{\alpha}^2\vec{x}_2 + \frac{L}{2}\ddot{\alpha}\vec{y}_2$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{y}_2]_{/0} = \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{y}_2 = \dot{\alpha}\vec{z}_2 \wedge \vec{y}_2 = -\dot{\alpha}\vec{x}_2$$

Départ : $\bar{\bar{I}}_{G_2,2}$

Arrivée : $\vec{\delta}_{2/0}(O)$

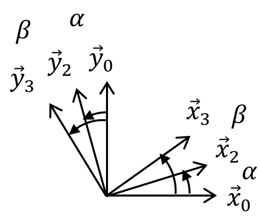
Chemin : 2/0 est un mouvement de rotation d'axe fixe $(O,\vec{z})$. O est un point fixe /0, donc $\vec{V}_{/0}(O) = \vec{0}$. Il est plus facile de calculer $\vec{\delta}_{2/0}(O)$ en passant par $\vec{\sigma}_{2/0}(G_2)$ puis $\vec{\sigma}_{2/0}(O)$ que par $\vec{\delta}_{2/0}(G_2)$.



$$\vec{\sigma}_{2/0}(G_2) = \bar{\bar{I}}_{G_2,2}.\vec{\Omega}_{2/0} + \overrightarrow{G_2G_2} \wedge m\vec{V}_{2/0}(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(G_2,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)} = B_2\dot{\alpha}\vec{z}_2 = B_2\dot{\alpha}\vec{z}_0 \text{ avec } B_2 = m\frac{L^2}{12}$$

$$\vec{\sigma}_{2/0}(O) = \vec{\sigma}_{2/0}(G_2) + \overrightarrow{OG_2} \wedge m\vec{V}_{2/0}(G_2) = m\frac{L^2}{12}\dot{\alpha}\vec{z}_0 + \frac{L}{2}\vec{x}_2 \wedge m\frac{L}{2}\dot{\alpha}\vec{y}_2 = m\frac{L^2}{12}\dot{\alpha}\vec{z}_0 + m\frac{L^2}{4}\dot{\alpha}\vec{z}_2 = m\frac{L^2}{3}\dot{\alpha}\vec{z}_0$$

$$\vec{\delta}_{2/0}(O) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{2/0}(O)\right]_{/0} + \vec{V}_{/0}(O) \wedge m\vec{V}_{2/0}(G_2) = m\frac{L^2}{3}\ddot{\alpha}\vec{z}_0 \text{ car O est fixe /0.}$$



donc
$$\mathcal{D}(2/0) = \vec{\delta}_{2/0} = {}_O\begin{Bmatrix} m\vec{A}_{2/0}(G_2) \\ \vec{\delta}_{2/0}(O) \end{Bmatrix} = {}_O\begin{Bmatrix} -m\frac{L}{2}\dot{\alpha}^2\vec{x}_2 + m\frac{L}{2}\ddot{\alpha}\vec{y}_2 \\ m\frac{L^2}{3}\ddot{\alpha}\vec{z}_0 \end{Bmatrix}$$

Question 3 : *Déterminer au point O les éléments de réduction du torseur dynamique $\mathcal{D}(3/0)$.*

$$\vec{\Omega}_{3/0} = \dot{\beta}\vec{z}_0$$

Remarque : En effet, le paramétrage de β est directement par rapport à 0.

$$\overrightarrow{OG_3} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG_3} = L\vec{x}_2 + \frac{L}{2}\vec{x}_3$$

$$\vec{V}_{3/0}(G_3) = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OG_3}\right]_{/0} = \frac{d}{dt}\left[L\vec{x}_2 + \frac{L}{2}\vec{x}_3\right]_{/0} = L\dot{\alpha}\vec{y}_2 + \frac{L}{2}\dot{\beta}\vec{y}_3$$

$$\vec{A}_{3/0}(G_3) = \frac{d}{dt}\left[\vec{V}_{3/0}(G_3)\right]_{/0} = \frac{d}{dt}\left[L\dot{\alpha}\vec{y}_2 + \frac{L}{2}\dot{\beta}\vec{y}_3\right]_{/0} = L\ddot{\alpha}\vec{y}_2 + L\dot{\alpha}\frac{d}{dt}[\vec{y}_2]_{/0} + \frac{L}{2}\ddot{\beta}\vec{y}_3 + \frac{L}{2}\dot{\beta}\frac{d}{dt}[\vec{y}_3]_{/0}$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{y}_2]_{/0} = \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{y}_2 = \dot{\alpha}\vec{z}_2 \wedge \vec{y}_2 = -\dot{\alpha}\vec{x}_2$$

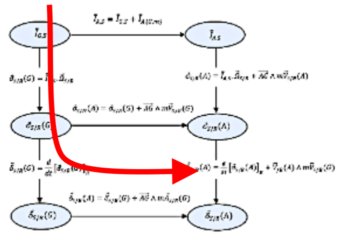
$$\frac{d}{dt}[\vec{y}_3]_{/0} = \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{y}_3 = \dot{\beta}\vec{z}_3 \wedge \vec{y}_3 = -\dot{\beta}\vec{x}_3$$

$$\vec{A}_{3/0}(G_3) = -L\dot{\alpha}^2\vec{x}_2 + L\ddot{\alpha}\vec{y}_2 - \frac{L}{2}\dot{\beta}^2\vec{x}_3 + \frac{L}{2}\ddot{\beta}\vec{y}_3$$

Départ : $\bar{\bar{I}}_{G_3,3}$

Arrivée : $\vec{\delta}_{3/0}(O)$

Chemin : Pour la suite, il est plus facile de calculer $\vec{\delta}_{3/0}(O)$ en passant par $\vec{\delta}_{3/0}(G_3)$ que par $\vec{\sigma}_{3/0}(O)$ car $\vec{V}_{/0}(O) \neq \vec{0}$.



$$\vec{\sigma}_{3/0}(G_3) = \bar{\bar{I}}_{G_3,3}.\vec{\Omega}_{3/0} + \overrightarrow{G_3G_3} \wedge m\vec{V}_{3/0}(G_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{(G_3,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)} =$$

$$B_3\dot{\beta}\vec{z}_3 = B_3\dot{\beta}\vec{z}_0 \text{ avec } B_3 = m\frac{L^2}{12}$$

$$\vec{\delta}_{3/0}(G_3) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{3/0}(G_3)\right]_{/0} + \vec{V}_{/0}(G_3) \wedge m\vec{V}_{3/0}(G_3) = B_3\ddot{\beta}\vec{z}_0$$

$$\vec{\delta}_{3/0}(O) = \vec{\delta}_{3/0}(G_3) + \overrightarrow{OG_3} \wedge m\vec{A}_{3/0}(G_3) = B_3\ddot{\beta}\vec{z}_0 + \left(L\vec{x}_2 + \frac{L}{2}\vec{x}_3\right) \wedge m\left(-L\dot{\alpha}^2\vec{x}_2 + L\ddot{\alpha}\vec{y}_2 - \frac{L}{2}\dot{\beta}^2\vec{x}_3 + \frac{L}{2}\ddot{\beta}\vec{y}_3\right)$$

$$= mL^2\ddot{\alpha}\vec{z}_0 - m\frac{L^2}{2}\dot{\beta}^2 \sin(\beta-\alpha)\,\vec{z}_0 + m\frac{L^2}{2}\ddot{\beta}\cos(\beta-\alpha)\,\vec{z}_0 + m\frac{L^2}{2}\dot{\alpha}^2\sin(\beta-\alpha)\,\vec{z}_0 + m\frac{L^2}{2}\ddot{\alpha}\cos(\beta-\alpha)\,\vec{z}_0 + m\frac{L^2}{3}\ddot{\beta}\vec{z}_0$$

donc $$\mathcal{D}(3/0) = \vec{\delta}_{3/0} = {}_O\begin{Bmatrix} m\vec{A}_{3/0}(G_3) \\ \vec{\delta}_{3/0}(O) \end{Bmatrix} =$$

$$_O\begin{Bmatrix} -mL\dot{\alpha}^2\vec{x}_2 + mL\ddot{\alpha}\vec{y}_2 - m\frac{L}{2}\dot{\beta}^2\vec{x}_3 + m\frac{L}{2}\ddot{\beta}\vec{y}_3 \\ mL^2\ddot{\alpha}\vec{z}_0 - m\frac{L^2}{2}\dot{\beta}^2\sin(\beta-\alpha)\,\vec{z}_0 + m\frac{L^2}{2}\ddot{\beta}\cos(\beta-\alpha)\,\vec{z}_0 + m\frac{L^2}{2}\dot{\alpha}^2\sin(\beta-\alpha)\,\vec{z}_0 + m\frac{L^2}{2}\ddot{\alpha}\cos(\beta-\alpha)\,\vec{z}_0 + m\frac{L^2}{3}\ddot{\beta}\vec{z}_0 \end{Bmatrix}$$

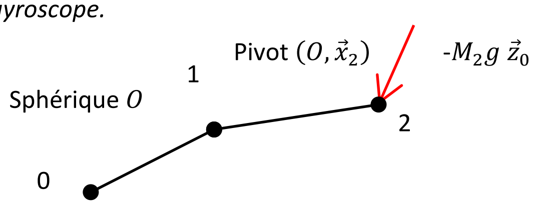
Question 4 : *Déterminer au point O les éléments de réduction du torseur dynamique* $\mathcal{D}(\{2,3\}/0)$.

$$\mathcal{D}(\{2,3\}/0) = \mathcal{D}(3/0) + \mathcal{D}(2/0)$$

$$\mathcal{D}(3/0) = \vec{\delta}_{3/0} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{R}_{d\,3/0} \\ \vec{\delta}_{3/0}(O) \end{Bmatrix} = {}_O\begin{Bmatrix} -m\frac{3L}{2}\dot{\alpha}^2\vec{x}_2 + m\frac{3L}{2}\ddot{\alpha}\vec{y}_2 - m\frac{L}{2}\dot{\beta}^2\vec{x}_3 + m\frac{L}{2}\ddot{\beta}\vec{y}_3 \\ m\frac{L^2}{3}\ddot{\beta}\vec{z}_0 + m\frac{4L^2}{3}\ddot{\alpha}\vec{z}_0 + m\frac{L^2}{2}(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}^2)\sin(\beta-\alpha)\,\vec{z}_0 + m\frac{L^2}{2}(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta})\cos(\beta-\alpha)\,\vec{z}_0 \end{Bmatrix}$$

Exercice 13 : **GYROSCOPE DE PRECISION DE DR NOZMAN (FEAT SQUEEZIE)**

Question 1 : *Tracer le graphe de structure du gyroscope.*



Question 2 : *Déterminer et justifier une démarche de résolution.*

On cherche à appliquer le PFD à Σ en O. Car le point O est un point de vitesse nulle dans 1/0 et 2/0.

Question 3 : *Lister les AM extérieures à Σ.*

On isole Σ.

On fait le BAME :

On néglige l'action de pesanteur sur 1.

$$\mathcal{T}_{0\to1}\blacksquare = \vec{M}_{0\to1} = \underset{O}{\blacksquare}\begin{Bmatrix}\vec{R}_{0\to1}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{T}_{t\to2}\blacksquare = \vec{M}_{t\to2} = \underset{G_2}{\blacksquare}\begin{Bmatrix}\vec{R}_{t\to2}\\ \vec{0}\end{Bmatrix} = \underset{O}{\blacksquare}\begin{Bmatrix}-m_2 g\,\vec{z}_0\\ m_2 g\,L\cos\beta\,\vec{y}_1\end{Bmatrix}$$

$$\vec{M}_{t\to2}(O) = \vec{M}_{t\to2}(G_2) + \overrightarrow{OG_2}\wedge -m_2 g\,\vec{z}_0 = L\vec{x}_1 \wedge -m_2 g\,\vec{z}_0 = m_2 g\,L\cos\beta\,\vec{y}_1$$

Question 4 : *Déterminer les matrices d'inertie de 1 et de 2 en O.*

$$I_{G_1,1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & m_1\frac{L^2}{12} & 0\\ 0 & 0 & m_1\frac{L^2}{12}\end{pmatrix}_{(G_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} \qquad \overrightarrow{OG_1} = \frac{L}{2}\vec{x}_1$$

$$I_{O,1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & m_1\left(\frac{L^2}{12}+\frac{L^2}{4}\right) & 0\\ 0 & 0 & m_1\left(\frac{L^2}{12}+\frac{L^2}{4}\right)\end{pmatrix}_{(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & m_1\frac{L^2}{3} & 0\\ 0 & 0 & m_1\frac{L^2}{3}\end{pmatrix}_{(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & B_1 & 0\\ 0 & 0 & B_1\end{pmatrix}_{(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$$

$$I_{G_2,2} = \begin{pmatrix}m_2\frac{R_2{}^2}{2} & 0 & 0\\ 0 & m_2\left(\frac{R_2{}^2}{4}+\frac{L^2}{12}\right) & 0\\ 0 & 0 & m_2\left(\frac{R_2{}^2}{4}+\frac{L^2}{12}\right)\end{pmatrix}_{(G_2,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} \qquad \overrightarrow{OG_2} = L\vec{x}_1$$

$$I_{O,2} = I_{G_2,2} + I_{G_2,\{O,m_2\}} = I_{G_2,2} + m_2\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & L^2 & 0\\ 0 & 0 & L^2\end{pmatrix}_{(G_2,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$$

$$= \begin{pmatrix}m_2\frac{R_2{}^2}{2} & 0 & 0\\ 0 & m_2\left(\frac{R_2{}^2}{4}+\frac{L^2}{12}+L^2\right) & 0\\ 0 & 0 & m_2\left(\frac{R_2{}^2}{4}+\frac{L^2}{12}+L^2\right)\end{pmatrix}_{(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} = \begin{pmatrix}A_2 & 0 & 0\\ 0 & B_2 & 0\\ 0 & 0 & B_2\end{pmatrix}_{(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$$

Question 5 : *Calculer le moment dynamique de Σ/0.*

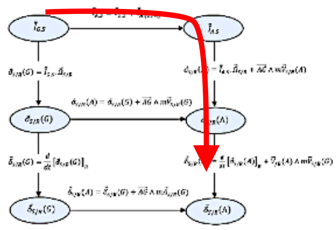
$$\vec{\delta}_{\Sigma/0}(O) = \vec{\delta}_{1/0}(O) + \vec{\delta}_{2/0}(O)$$

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha}\vec{z}_0 + \dot{\beta}\vec{y}_1 = \dot{\alpha}(-\sin\beta\,\vec{x}_1 + \cos\beta\,\vec{z}_1) + \dot{\beta}\vec{y}_1 = -\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_1 + \dot{\beta}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_1$$

Départ : On a déjà calculé $\bar{\bar{I}}_{O,1}$

Arrivée : $\vec{\delta}_{1/0}(O)$

Chemin : O est un point fixe /0, donc $\vec{V}_{/0}(O) = \vec{0}$.



$$\vec{\sigma}_{1/0}(O) = \bar{\bar{I}}_{O,1}.\vec{\Omega}_{1/0} + \overrightarrow{OG_1}\wedge m_1\vec{V}_{1/0}(O) = \bar{\bar{I}}_{O,1}.\vec{\Omega}_{1/0}$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & B_1 & 0\\ 0 & 0 & B_1\end{pmatrix}_{(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} \begin{pmatrix}-\dot{\alpha}\sin\beta\\ \dot{\beta}\\ \dot{\alpha}\cos\beta\end{pmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} \approx \vec{0}$$

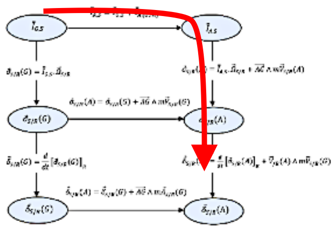
$$\vec{\delta}_{1/0}(O) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{1/0}(O)\right]_{/0} + \vec{V}_{/0}(O)\wedge m_1\vec{V}_{1/0}(G_1) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{1/0}(O)\right]_{/0} \approx \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\gamma}\vec{x}_1 + (\dot{\beta} + \dot{\alpha}\sin\alpha)\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\cos\alpha\,\vec{z}_1 = (\dot{\gamma} - \dot{\alpha}\sin\beta)\vec{x}_1 + \dot{\beta}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_1$$

Départ : On a déjà calculé $\bar{\bar{I}}_{O,2}$

Arrivée : $\vec{\delta}_{2/0}(O)$

Chemin : O est un point fixe /0, donc $\vec{V}_{/0}(O) = \vec{0}$.



$$\vec{\sigma}_{2/0}(O) = \bar{\bar{I}}_{O,2}.\vec{\Omega}_{2/0} + \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2\vec{V}_{2/0}(O) = \bar{\bar{I}}_{O,2}.\vec{\Omega}_{2/0}$$
$$= \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} \begin{pmatrix} \dot{\gamma} - \dot{\alpha}\sin\beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\cos\beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$$
$$\approx A_2(\dot{\gamma} - \dot{\alpha}\sin\beta)\vec{x}_1$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{x}_1]_{/0} = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x}_1 = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x}_1 = \left(-\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_1 + \dot{\beta}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_1\right) \wedge \vec{x}_1 = -\dot{\beta}\vec{z}_1 + \dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{y}_1$$

$$\vec{\delta}_{2/0}(O) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{2/0}(O)\right]_{/0} + \vec{V}_{/0}(O) \wedge m_2\vec{V}_{2/0}(G_2) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{2/0}(O)\right]_{/0} = \frac{d}{dt}[A_2\dot{\gamma}\vec{x}_1]_{/0}$$
$$= A_2(\ddot{\gamma} - \ddot{\alpha}\sin\beta - \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta)\vec{x}_1 + A_2(\dot{\gamma} - \dot{\alpha}\sin\beta)\frac{d}{dt}[\vec{x}_1]_{/0}$$
$$= A_2(\ddot{\gamma} - \ddot{\alpha}\sin\beta - \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta)\vec{x}_1 + A_2(\dot{\gamma} - \dot{\alpha}\sin\beta)\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{y}_1 - A_2(\dot{\gamma} - \dot{\alpha}\sin\beta)\dot{\beta}\vec{z}_1$$

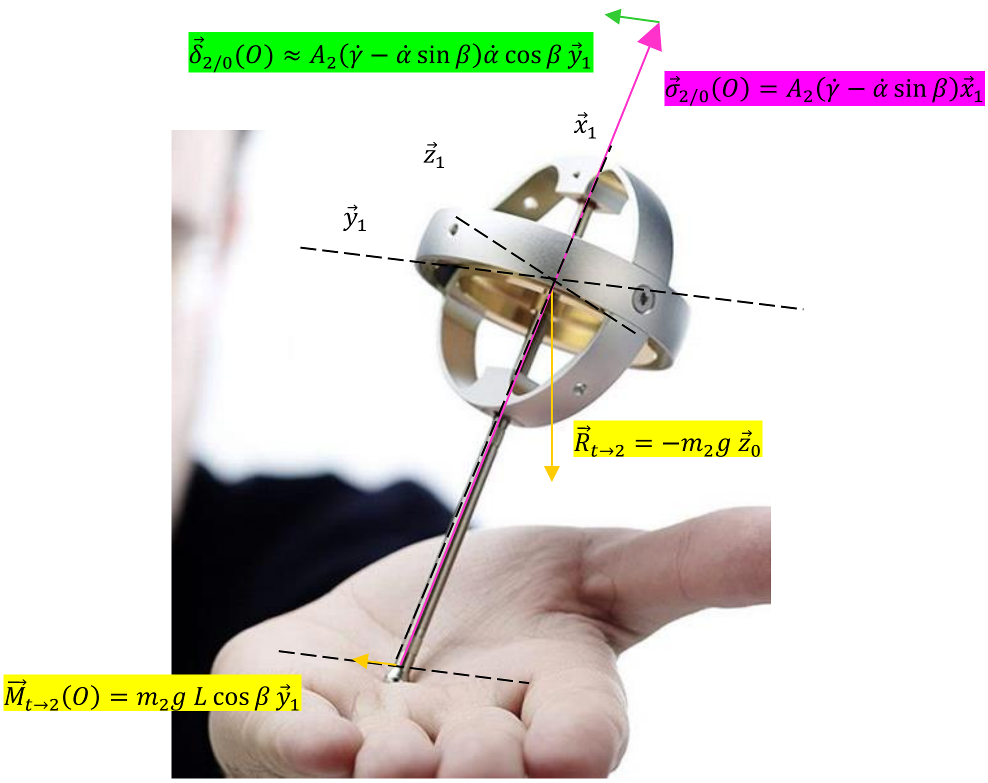
Question 8 : Sans résoudre les équations du mouvement, déterminer la direction principale du mouvement 1/0.

On applique le PFD à Σ en O.

$$\vec{M}_{0\to 2}(O) + \vec{M}_{t\to 2}(O) = \vec{\delta}_{2/0}(O)$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 g\, L\cos\beta \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} \approx \begin{pmatrix} A_2(\ddot{\gamma} - \ddot{\alpha}\sin\beta - \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta) \\ A_2(\dot{\gamma} - \dot{\alpha}\sin\beta)\dot{\alpha}\cos\beta \\ -A_2(\dot{\gamma} - \dot{\alpha}\sin\beta)\dot{\beta} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$$

La composante selon $\vec{y}_1$ est la plus importante car la vitesse de rotation $\dot{\gamma} = 12000\ tr/min$ est très importante.

Question 9 : Dessiner les différents vecteurs $\vec{R}_{t\to 2}, \vec{M}_{t\to 2}(O), \vec{\sigma}_{2/0}(O), \vec{\delta}_{2/0}(O)$ sur la photo.



Remarque : La variation du moment cinétique est donc quasi uniquement dans le même sens que le moment du poids ! Donc le gyroscope tourne dans votre main !

Le moment cinétique représente une quantité de vitesse. Le moment dynamique représente la variation du moment cinétique et le lien entre mouvements et actions mécaniques.

Tout comme il est difficile de modifier un mouvement de translation qui va vite, il est difficile de modifier un mouvement de rotation qui va vite !

Exercice 14 : **ROULEAU SUR PLAN INCLINE**

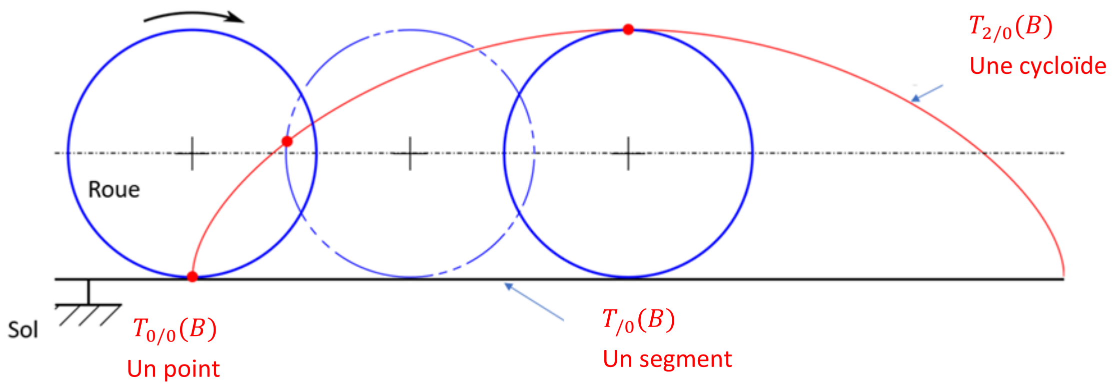
Question 1 : *Déterminer le torseur cinématique 2/0.*

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{x}_1 + R\vec{y}_1$$
$$\overrightarrow{BA} = R\vec{y}_1$$
$$\vec{V}_{2/0}(B) = \vec{V}_{2/0}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} = \dot{x}\vec{x}_1 + R\vec{y}_1 \wedge \dot{\beta}\vec{z}_1 = \dot{x}\vec{x}_1 + R\dot{\beta}\vec{x}_1$$
$$\mathcal{V}(2/0) = \vec{\mathcal{V}}_{2/0} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{2/0} \\ \vec{V}_{2/0}(A) \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \dot{\beta}\vec{z}_0 \\ \dot{x}\vec{x}_1 \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} \dot{\beta}\vec{z}_0 \\ \dot{x}\vec{x}_1 + R\dot{\beta}\vec{x}_2 \end{Bmatrix}$$

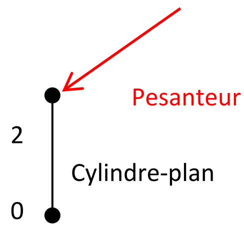
Remarque : d'autre part, on a aussi

$$\vec{V}_{/0}(B) = \frac{d\left[\overrightarrow{OB}\right]_{/0}}{dt} = \frac{d[x\vec{x}_1]_{/0}}{dt} = \dot{x}\vec{x}_1$$

Si on souhaite tracer des trajectoires, il faudrait distinguer B_0, B et B_2. En un point géométrique de contact B entre deux solides, on distingue 3 points coïncidents à un instant.



Question 2 : *Caractériser les torseurs des AM sur 2 en B.*



<u>Hypothèse :</u> problème plan.

On isole 2.

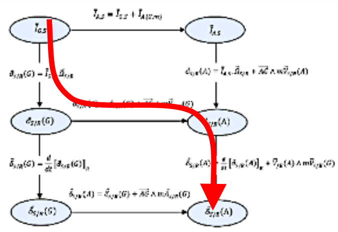
On fait le BAME :

$$\mathcal{F}(0 \to 2) = \vec{\mathcal{M}}_{0\to 2} = {}_B\begin{Bmatrix} X_{0\to 2}\vec{x}_1 + Y_{0\to 2}\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

On utilise le modèle des lois de Coulomb : $|X_{0\to 2}| \leq f|Y_{0\to 2}|$

$$\mathcal{F}(ter \to 2) = \vec{\mathcal{M}}_{ter\to 2} = {}_A\begin{Bmatrix} -mg\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} -mg\vec{y}_0 \\ mgR\sin\alpha\,\vec{z}_0 \end{Bmatrix}$$
$$\vec{M}_{ter\to 2}(B) = \vec{M}_{ter\to 2}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge -mg\vec{y}_0 = R\vec{y}_1 \wedge -mg\vec{y}_0 = mgR\sin\alpha\,\vec{z}_0$$

Question 3 : *Ecrire l'équation reliant les paramètres du mouvement.*



Départ : Il est facile d'écrire $\bar{\bar{I}}_{A,2}$

Arrivée : $\vec{\delta}_{2/0}(B)$ car on ne connait pas $X_{0\to 2}$ et $Y_{0\to 2}$, il y a un moment nul en B.

Chemin : $\vec{V}_{/0}(B) \wedge m\vec{V}_{2/0}(A) = \dot{x}\vec{x}_1 \wedge m\dot{x}\vec{x}_1 = \vec{0}$

$$\vec{A}_{2/0}(A) = \frac{d\left[\vec{V}_{2/0}(A)\right]_{/0}}{dt} = \frac{d[\dot{x}\vec{x}_1]_{/0}}{dt} = \ddot{x}\vec{x}_1$$

$$\vec{\sigma}_{2/0}(A) = \bar{\bar{I}}_{A,2}.\vec{\Omega}_{2/0} + \overrightarrow{AA} \wedge m\vec{V}_{2/0}(A) = \begin{pmatrix} - & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}_{(A,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)} = \frac{mR^2}{2}\dot{\beta}\vec{z}_0$$

$$\vec{\sigma}_{2/0}(B) = \vec{\sigma}_{2/0}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge m\vec{V}_{2/0}(A) = \frac{mR^2}{2}\dot{\beta}\vec{z}_0 + R\vec{y}_1 \wedge m\dot{x}\vec{x}_1 = \frac{mR^2}{2}\dot{\beta}\vec{z}_0 + mR\dot{x}\vec{z}_0$$

$$\vec{\delta}_{2/0}(B) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{2/0}(B)\right]_{/0} + \vec{V}_{/0}(B) \wedge m\vec{V}_{2/0}(A) = \frac{d}{dt}\left[\frac{mR^2}{2}\dot{\beta}\vec{z}_0 + Rm\dot{x}\vec{z}_0\right]_{/0} + \dot{x}\vec{x}_1 \wedge m\dot{x}\vec{x}_1 = \frac{mR^2}{2}\ddot{\beta}\vec{z}_0 + mR\ddot{x}\vec{z}_0$$

$$\mathcal{D}(2/0) = \vec{\delta}_{2/0} = \begin{Bmatrix} m\vec{A}_{2/0}(A) \\ \vec{\delta}_{2/0}(B) \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} m\ddot{x}\vec{x}_1 \\ \frac{mR^2}{2}\ddot{\beta}\vec{z}_0 + mR\ddot{x}\vec{z}_0 \end{Bmatrix}$$

On applique le PFD à 2 en B.

$$\mathcal{F}(\bar{2} \to 2) = \mathcal{D}(2/0)$$

$$\Rightarrow {}_B\begin{Bmatrix} X_{0\to2}\vec{x}_1 + Y_{0\to2}\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + {}_B\begin{Bmatrix} -mg\vec{y}_0 \\ mgR\sin\alpha\,\vec{z}_0 \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} m\ddot{x}\vec{x}_1 \\ \frac{mR^2}{2}\ddot{\beta}\vec{z}_0 + mR\ddot{x}\vec{z}_0 \end{Bmatrix}$$

Question 4 : *Dans le cas du roulement sans glissement déterminer le mouvement du rouleau.*

Il y a maintenant rsg en B.

$$\vec{V}_{2/0}(B) = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \dot{x}\vec{x}_1 + R\dot{\beta}\vec{x}_1 = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \dot{x} = -R\dot{\beta}$$
$$\Rightarrow \ddot{x} = -R\ddot{\beta}$$

On a donc

$$\frac{mR^2}{2}\ddot{\beta} + mR\ddot{x} = mgR\sin\alpha$$
$$\Rightarrow \frac{mR}{2}\ddot{x} = mgR\sin\alpha$$
$$\Rightarrow \ddot{x}(\mathrm{t}) = 2g\sin\alpha$$
$$\Rightarrow \dot{x}(\mathrm{t}) = 2g\sin\alpha\, t + \dot{x}(0)$$

Or $\dot{x}(0) = 0$

$$\Rightarrow x(\mathrm{t}) = g\sin\alpha\, t^2 + x(0)$$

Exercice 15 : **ROBOVOLC**

Question 1 : *A partir de l'expression générale précédente, préciser et justifier la forme simplifiée de la matrice d'inertie $I(i, G_i)$ du bras i prenant en compte sa modélisation géométrique.*

Les bras 1 et 2 possèdent 3 plans de symétrie ; $(G_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i)$, $(G_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$, $(G_i, \vec{z}_i, \vec{x}_i)$ donc :

$$I(G_i, i) = \begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{pmatrix}_{(G_i, \vec{x}_i, \vec{x}_i, \vec{x}_i)}$$

<u>Remarque :</u> 2 plans suffiraient pour écrire cette forme.

Question 2 : *Déterminer l'hyperstatisme du modèle du système (Figure 1). Conclure sur la possibilité d'obtenir les différentes actions de liaison (leur calcul n'est pas demandé).*

Le mécanisme est modélisé par une chaîne ouverte, le modèle est donc isostatique $h = 0$. On peut donc déterminer toutes les inconnues de liaison.

Question 3 : *Calculer $\vec{V}(G_1, 1/0), \vec{\Gamma}(G_1, 1/0), \vec{V}(G_2, 2/0), \vec{\Gamma}(G_2, 2/0), \vec{V}(P, 3/0)$ et $\vec{\Gamma}(P, 3/0)$ en fonction des paramètres variables (θ_1, θ_2, λ_3) et des dimensions constantes.*

$$\vec{V}(G_1, 1/0) = \frac{d\left[\overrightarrow{O_1G_1}\right]_{/0}}{dt} = \frac{d\left[\frac{l_1}{2}\vec{x}_1\right]_{/0}}{dt} = \vec{\Omega}(1/0) \wedge \frac{l_1}{2}\vec{x}_1 = \dot{\theta}_1\vec{z}_1 \wedge \frac{l_1}{2}\vec{x}_1 = \frac{l_1}{2}\dot{\theta}_1\vec{y}_1$$

$$\vec{\Gamma}(G_1, 1/0) = \frac{d\left[\vec{V}(G_1, 1/0)\right]_{/0}}{dt} = \frac{d\left[\frac{l_1}{2}\dot{\theta}_1\vec{y}_1\right]_{/0}}{dt} = \frac{l_1}{2}\ddot{\theta}_1\vec{y}_1 - \frac{l_1}{2}\dot{\theta}_1^{\,2}\vec{x}_1$$

$$\vec{V}(G_2, 2/0) = \frac{d\left[\overrightarrow{O_1G_2}\right]_{/0}}{dt} = \frac{d\left[l_1\vec{x}_1 + \frac{l_2}{2}\vec{x}_2\right]_{/0}}{dt} = l_1\dot{\theta}_1\vec{y}_1 + \frac{l_2}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\vec{y}_2$$

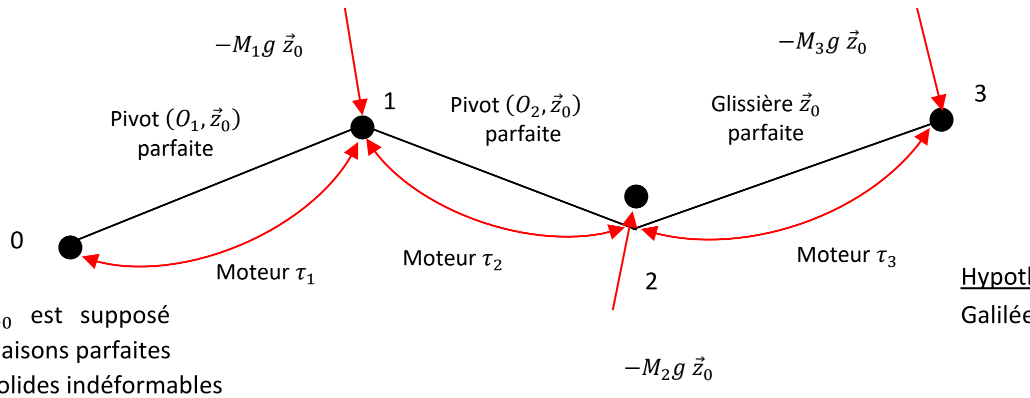
$$\vec{\Gamma}(G_2, 2/0) = \frac{d\left[\vec{V}(G_2, 2/0)\right]_{/0}}{dt} = \frac{d\left[l_1\dot{\theta}_1\vec{y}_1 + \frac{l_2}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\vec{y}_2\right]_{/0}}{dt} = l_1\ddot{\theta}_1\vec{y}_1 - l_1\dot{\theta}_1^{\,2}\vec{x}_1 + \frac{l_2}{2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\vec{y}_2 - \frac{l_2}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\vec{x}_2$$

$$\vec{V}(P, 3/0) = \frac{d\left[\overrightarrow{O_1P}\right]_{/0}}{dt} = \frac{d[l_1\vec{x}_1 + l_2\vec{x}_2 - \lambda_3\vec{z}_0]_{/0}}{dt} = l_1\dot{\theta}_1\vec{y}_1 + l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\vec{y}_2 - \dot{\lambda}_3\vec{z}_0$$

$$\vec{\Gamma}(P, 3/0) = \frac{d\left[\vec{V}(P, 3/0)\right]_{/0}}{dt} = \left[\frac{d\left(l_1\dot{\theta}_1\vec{y}_1 + l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\vec{y}_2 - \dot{\lambda}_3\vec{z}_0\right)}{dt}\right]_{/0}$$

$$= l_1\ddot{\theta}_1\vec{y}_1 - l_1\dot{\theta}_1^{\,2}\vec{x}_1 + l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\vec{y}_2 - l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\vec{x}_2 - \ddot{\lambda}_3\vec{z}_0$$

Question 4 : *A partir du théorème du moment dynamique, donner l'expression du couple moteur τ_2 dans la liaison pivot d'axe $(O_2, \vec{z}_0)$ en fonction de θ_1, θ_2, $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_2$ et des données du problème. Faire de même pour le couple moteur τ_1 dans la liaison pivot d'axe $(O_1, \vec{z}_0)$. On simplifiera les expressions en introduisant les notations*



<u>Hypothèses :</u>

- R_0 est supposé Galiléen
- Liaisons parfaites
- Solides indéformables
- Masse ponctuelle en $P = G_3$
- Géométrie des bras possédant 2 plans de symétrie orthogonaux

On cherche τ_2.
On isole {2,3}.
On fait le BAME :

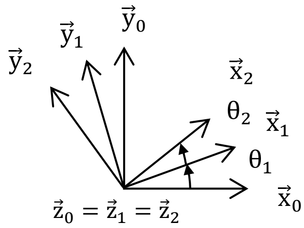
- $\mathcal{T}(1 \to 2) = {}_{O_2}\begin{Bmatrix} \vec{R}_{12} \\ \vec{M}_{12} \end{Bmatrix}$ avec $\vec{M}_{12} . \vec{z}_0 = 0$

- $\mathcal{F}(\text{ter} \to 2) = {}_{G_2}\begin{Bmatrix} -m_2 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
- $\mathcal{F}(\text{ter} \to 3) = {}_{G_3}\begin{Bmatrix} -m_3 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
- $\mathcal{F}(1\text{ mot} \to 2) = {}_{O_2}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \tau_2 \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$

On applique le Théorème du Moment Dynamique en O_2 en projection sur $\vec{z}_0$:

$$\mathcal{F}(\overline{2+3} \to 2+3) = \mathcal{D}(2+3/0)$$

$$\Rightarrow \vec{M}(O_2, \overline{2+3} \to 2+3).\vec{z}_0 = \vec{\delta}(O_2, 2+3/0).\vec{z}_0$$



$\vec{M}(O_2, 1 \to 2).\vec{z}_0 = 0$
$\vec{M}(O_2, \text{ter} \to 2).\vec{z}_0 = 0$
$\vec{M}(O_2, \text{ter} \to 3).\vec{z}_0 = 0$
$\vec{M}(O_2, 1\text{mot} \to 2).\vec{z}_0 = \tau_2$
$\vec{\delta}(O_2, 2+3/0) = \vec{\delta}(O_2, 2/0) + \vec{\delta}(O_2, 3/0)$

$$\vec{\delta}(O_2, 2/0).\vec{z}_0 = \vec{\delta}(G_2, 2/0).\vec{z}_0 + \left(\overrightarrow{O_2G_2} \wedge m_2 \vec{\Gamma}(G_2, 2/0)\right).\vec{z}_0$$

$$= \frac{d\left[I(G_2,2).\vec{\Omega}(2/0)\right]_{/0}}{dt}.\vec{z}_0 + \left(\overrightarrow{O_2G_2} \wedge m_2 \vec{\Gamma}(G_2, 2/0)\right).\vec{z}_0$$

$$= \left[\frac{d\left(I(G_2,2).(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\vec{z}_0\right)}{dt}\right]_{/0}.\vec{z}_0 + \left(\frac{l_2}{2}\vec{x}_2 \wedge m_2\left(l_1\ddot{\theta}_1\vec{y}_1 - l_1\dot{\theta}_1^{\,2}\vec{x}_1 + \frac{l_2}{2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\vec{y}_2 - \frac{l_2}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\vec{x}_2\right)\right).\vec{z}_0$$

avec $\quad \vec{x}_2 \wedge \vec{y}_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right)\vec{z}_0 = \cos\theta_2\,\vec{z}_0 \qquad$ et $\qquad \vec{x}_2 \wedge \vec{x}_1 = -\sin\theta_2\,\vec{z}_0$

$$= C_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 \frac{l_2}{2}\ddot{\theta}_1\cos\theta_2 + m_2 l_1 \frac{l_2}{2}\dot{\theta}_1^{\,2}\sin\theta_2 + m_2\frac{l_2^{\,2}}{4}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)$$

$\vec{\delta}(O_2, 3/0).\vec{z}_0 = \vec{\delta}(P, 3/0).\vec{z}_0 + \left(\overrightarrow{O_2P} \wedge m_3\vec{\Gamma}(P, 3/0)\right).\vec{z}_0$

Or $\vec{\delta}(P, 3/0) = \vec{0}$ car m_3 est une masse ponctuelle et $P = G_3$.

$$\vec{\delta}(O_2, 3/0).\vec{z}_0 = \left((l_2\vec{x}_2 - \lambda_3\vec{z}_0) \wedge m_3\left(l_1\ddot{\theta}_1\vec{y}_1 - l_1\dot{\theta}_1^{\,2}\vec{x}_1 + l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\vec{y}_2 - l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\vec{x}_2 - \ddot{\lambda}_3\vec{z}_0\right)\right).\vec{z}_0$$

$$= m_3 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1\cos\theta_2 + m_3 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^{\,2}\sin\theta_2 + m_3 l_2^{\,2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)$$

donc

$\vec{\delta}(O_2, 2+3/0).\vec{z}_0$

$$= C_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1\frac{l_2}{2}\ddot{\theta}_1\cos\theta_2 + m_2 l_1\frac{l_2}{2}\dot{\theta}_1^{\,2}\sin\theta_2 + m_2\frac{l_2^{\,2}}{4}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_3 l_1 l_2\ddot{\theta}_1\cos\theta_2 + m_3 l_1 l_2\dot{\theta}_1^{\,2}\sin\theta_2 + m_3 l_2^{\,2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)$$

$$= \left(C_2 + m_2\frac{l_2^{\,2}}{4} + m_3 l_2^{\,2}\right)(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \left(m_2 l_1\frac{l_2}{2} + m_3 l_1 l_2\right)\ddot{\theta}_1\cos\theta_2 + \left(m_2 l_1\frac{l_2}{2} + m_3 l_1 l_2\right)\dot{\theta}_1^{\,2}\sin\theta_2$$

$= \beta(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \gamma\ddot{\theta}_1\cos\theta_2 + \gamma\dot{\theta}_1^{\,2}\sin\theta_2$

Finalement

$$\tau_2 = \beta(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \gamma\ddot{\theta}_1\cos\theta_2 + \gamma\dot{\theta}_1^{\,2}\sin\theta_2$$

On cherche τ_1.
On isole $\{1,2,3\}$.
On fait le BAME :

- $\mathcal{F}(0 \to 1) = {}_{O_1}\begin{Bmatrix} \vec{R}_{01} \\ \vec{M}_{01} \end{Bmatrix}$ avec $\vec{M}_{01}.\vec{z}_0 = 0$
- $\mathcal{F}(\text{ter} \to 2) = {}_{G_1}\begin{Bmatrix} -m_1 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
- $\mathcal{F}(\text{ter} \to 2) = {}_{G_2}\begin{Bmatrix} -m_2 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
- $\mathcal{F}(\text{ter} \to 3) = {}_{P}\begin{Bmatrix} -m_3 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
- $\mathcal{F}(0\text{ mot} \to 1) = {}_{O_1}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \tau_1 \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$

On applique le Théorème du Moment Dynamique en O_1 en projection sur $\vec{z}_0$:

$$\mathcal{F}(\overline{1+2+3} \to 1+2+3) = \mathcal{D}(1+2+3/0)$$

$$\Rightarrow \vec{M}(O_1, \overline{1+2+3} \to 1+2+3).\vec{z}_0 = \vec{\delta}(O_1, 1+2+3/0).\vec{z}_0$$

$\vec{M}(O_1, 0 \rightarrow 1).\vec{z}_0 = 0$
$\vec{M}(O_1, ter \rightarrow 1).\vec{z}_0 = 0$
$\vec{M}(O_1, ter \rightarrow 2).\vec{z}_0 = 0$
$\vec{M}(O_1, ter \rightarrow 3).\vec{z}_0 = 0$
$\vec{M}(O_1, 0mot \rightarrow 1).\vec{z}_0 = \tau_1$
$\vec{\delta}(O_1, \{1,2,3\}/0) = \vec{\delta}(O_1, 1/0) + \vec{\delta}(O_1, 2/0) + \vec{\delta}(O_1, 3/0)$

$$\vec{\delta}(O_1, 1/0).\vec{z}_0 = C_1\ddot{\theta}_1 + m_1\frac{{l_1}^2}{2}\ddot{\theta}_1$$

$$\vec{\delta}(O_1, 2/0).\vec{z}_0 = \vec{\delta}(O_2, 2/0).\vec{z}_0 + \left(\overrightarrow{O_1O_2} \wedge m_2\vec{\Gamma}(G_2, 2/0)\right).\vec{z}_0$$

$$= \vec{\delta}(O_2, 2/0).\vec{z}_0 + \left((l_1\vec{x}_1 + d_2\vec{z}_0) \wedge m_2\left(l_1\ddot{\theta}_1\vec{y}_1 - l_1{\dot{\theta}_1}^2\vec{x}_1 + \frac{l_2}{2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\vec{y}_2 - \frac{l_2}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\vec{x}_2\right)\right).\vec{z}_0$$

avec $\quad \vec{x}_1 \wedge \vec{y}_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta_2\right)\vec{z}_0 = \cos\theta_2\,\vec{z}_0 \quad$ et $\quad \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 = \sin\theta_2\,\vec{z}_0$

$$= \vec{\delta}(O_2, 2/0).\vec{z}_0 + m_2{l_1}^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1\frac{l_2}{2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\cos\theta_2 - m_2l_1\frac{l_2}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\sin\theta_2$$

$$\vec{\delta}(O_1, 3/0).\vec{z}_0 = \vec{\delta}(P, 3/0).\vec{z}_0 + \left(\overrightarrow{O_1P} \wedge m_3\vec{\Gamma}(P, 3/0)\right).\vec{z}_0$$

Or $\vec{\delta}(P, 3/0) = \vec{0}$ car m_3 est une masse ponctuelle et $P = G_3$.

$$\vec{\delta}(O_1, 3/0).\vec{z}_0 = \left(\overrightarrow{O_1P} \wedge m_3\vec{\Gamma}(P, 3/0)\right).\vec{z}_0$$

$$= \left((l_1\vec{x}_1 + l_2\vec{x}_2 + (d_2 - \lambda_3)\vec{z}_0) \wedge m_3\left(l_1\ddot{\theta}_1\vec{y}_1 - l_1{\dot{\theta}_1}^2\vec{x}_1 + l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\vec{y}_2 - l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\vec{x}_2 - \ddot{\lambda}_3\vec{z}_0\right)\right).\vec{z}_0$$

$$= m_3{l_1}^2\ddot{\theta}_1 + m_3l_1l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\cos\theta_2 - m_3l_1l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\sin\theta_2 + m_3l_1l_2\ddot{\theta}_1\cos\theta_2 + m_3l_1l_2{\dot{\theta}_1}^2\sin\theta_2 + m_3{l_2}^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)$$

donc

$\vec{\delta}(O_1, \{1,2,3\}/0).\vec{z}_0$

$$= C_1\ddot{\theta}_1 + m_1\frac{{l_1}^2}{2}\ddot{\theta}_1 + C_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2l_1\frac{l_2}{2}\ddot{\theta}_1\cos\theta_2 + m_2l_1\frac{l_2}{2}{\dot{\theta}_1}^2\sin\theta_2 + m_2\frac{{l_2}^2}{4}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2{l_1}^2\ddot{\theta}_1$$
$$+ m_2l_1\frac{l_2}{2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\cos\theta_2 - m_2l_1\frac{l_2}{2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\sin\theta_2 + m_3{l_1}^2\ddot{\theta}_1 + m_3l_1l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\cos\theta_2$$
$$- m_3l_1l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\sin\theta_2 + m_3l_1l_2\ddot{\theta}_1\cos\theta_2 + m_3l_1l_2{\dot{\theta}_1}^2\sin\theta_2 + m_3{l_2}^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)$$

$$= \left(C_1 + m_1\frac{{l_1}^2}{2} + m_2{l_1}^2 + m_3{l_1}^2\right)\ddot{\theta}_1 + \left(C_2 + m_2\frac{{l_2}^2}{4} + m_3{l_2}^2\right)(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \left(m_2l_1\frac{l_2}{2} + m_3l_1l_2\right)\ddot{\theta}_1\cos\theta_2$$
$$+ \left(m_2l_1\frac{l_2}{2} + m_3l_1l_2\right){\dot{\theta}_1}^2\sin\theta_2 + \left(m_2l_1\frac{l_2}{2} + m_3l_1l_2\right)(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\cos\theta_2$$
$$+ \left(-m_2l_1\frac{l_2}{2} - m_3l_1l_2\right)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\sin\theta_2$$
$$= \alpha\ddot{\theta}_1 + \beta(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \gamma\ddot{\theta}_1\cos\theta_2 + \gamma{\dot{\theta}_1}^2\sin\theta_2 + \gamma(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\cos\theta_2 - \gamma(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2\sin\theta_2$$
$$= \alpha\ddot{\theta}_1 + \beta(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \gamma\ddot{\theta}_1\cos\theta_2 + \gamma(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\cos\theta_2 - \gamma{\dot{\theta}_2}^2\sin\theta_2 - 2\gamma\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2$$

Finalement

$$\tau_1 = \alpha\ddot{\theta}_1 + \beta(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \gamma\ddot{\theta}_1\cos\theta_2 + \gamma(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\cos\theta_2 - \gamma{\dot{\theta}_2}^2\sin\theta_2 - 2\gamma\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_2$$

Question 5 : *Montrer alors que la dynamique du système peut être décrite par un système d'équations différentielles du 2nd ordre non-linéaires et couplées, de la forme :*

On isole 3.

On fait le BAME :

- $\mathcal{F}(2 \rightarrow 3) = {}_P\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{23}\\ \vec{M}_{23}\end{matrix}\right. \qquad$ avec $\vec{R}_{23}.\vec{z}_0 = 0$
- $\mathcal{F}(pes \rightarrow 3) = {}_P\left\{\begin{matrix}-m_3g\,\vec{z}_0\\ \vec{0}\end{matrix}\right.$
- $\mathcal{F}(2\ mot \rightarrow 3) = {}_P\left\{\begin{matrix}F_3\,\vec{z}_0\\ \vec{0}\end{matrix}\right.$

On applique le TRD en projection selon $\vec{z}$:

$$F_3 - m_3g = m_3\ddot{\lambda}_3$$

On a donc finalement

$$\begin{pmatrix} \alpha+\beta+2\gamma\cos\theta_2 & \beta+\gamma\cos\theta_2 & 0 \\ \beta+\gamma\cos\theta_2 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -m_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot\theta_1 \\ \ddot\theta_2 \\ \ddot\lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\gamma\sin\theta\,\dot\theta_2 & -\gamma\sin\theta\,\dot\theta_2 & 0 \\ \gamma\sin\theta_2\,\dot\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \\ \dot\lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_3 g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

Question 6 : *Montrer que les effets dynamiques dans le plan horizontal sont découplés de ceux dans la direction verticale.*

Les deux premières lignes ne dépendent pas des variables $\ddot\lambda_3, \dot\lambda_3, \lambda_3$. Les effets dynamiques dans le plan horizontal sont donc indépendants de ceux dans la direction verticale.

Question 7 : *Donner trois éléments qui pourraient faire sortir le modèle dynamique précédent de son domaine de validité.*

Pour ce modèle, on a supposé certaines hypothèses qui ne sont pas forcément vraies :

- Liaisons parfaites
- Solides indéformables
- Masse ponctuelle en P
- Géométrie des bras possédant 2 plans de symétrie orthogonaux
-

Exercice 16 : **ENERGIE CINETIQUE D'UNE BUGATTI CHIRON**

Question 1 : *Calculer l'énergie cinétique du bolide.*

On isole les principales pièces en mouvement par rapport à la route $\Sigma = \{4\,roues, châssis, \}$.

<u>Hypothèse :</u> on néglige l'énergie cinétique des petites pièces, comme la rotation de la transmission.

$$E_{c\Sigma/0} = 4E_{c\,r/0} + E_{c\,c/0}$$

r/0 est un mouvement de rotation. c/0 est un mouvement de translation.

Modélisons les roues par des cylindres plein.

$$E_{c\Sigma/0} = 4\frac{1}{2}J_r{\omega_r}^2 + \frac{1}{2}M_c{V_c}^2 = 4\frac{1}{2}m_r\frac{{R_r}^2}{2}\frac{{V_c}^2}{{R_r}^2} + \frac{1}{2}M_c{V_c}^2 \approx 4\frac{1}{4}12.117^2 + \frac{1}{2}1995.117^2 \approx 165\,000 + 13\,600\,000\text{ J}$$

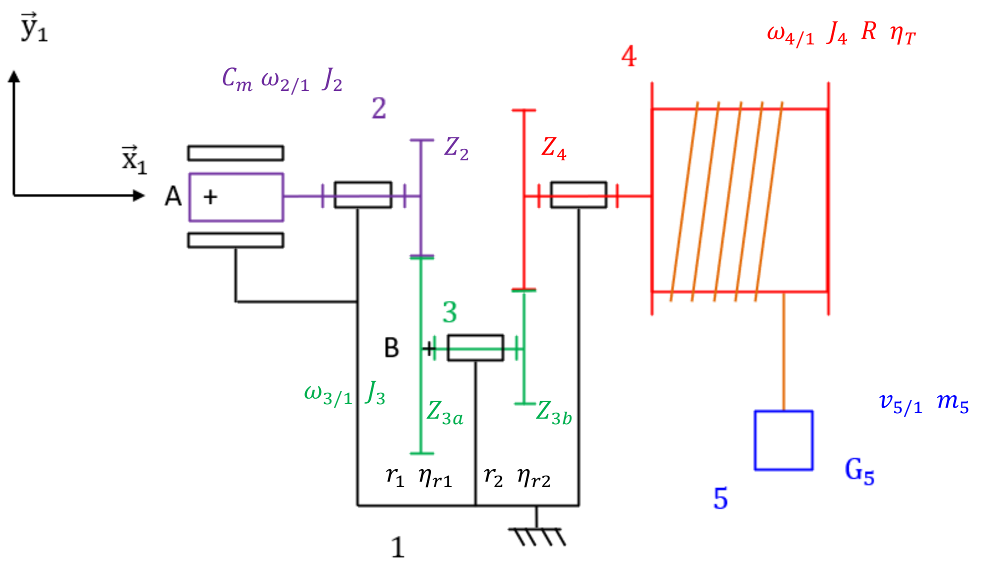
Question 2 : *L'énergie cinétique des roues est-elle négligeable ?*

Oui, car $\frac{165000}{13\,600\,000} = 0{,}012 = 1{,}2\% \ll 1$

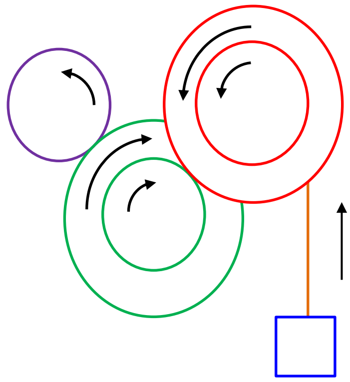
Remarque : C'est environ le rapport des masses.

Exercice 17 : **MOTORISATION D'UN TREUIL**

Question 1 : *Colorier et compléter le schéma cinématique en y mettant les différents éléments entrant en jeu (couple, vitesse, rendement, moment d'inertie).*



Question 2 : *Déterminer la relation entre $v_{5/1}$ la vitesse de déplacement de la charge par rapport au bâti et $\omega_{2/1}$ la vitesse de rotation du moteur.*



$$v_{5/1} = +R\ \omega_{4/1}$$

$$\frac{\omega_{4/1}}{\omega_{2/1}} = (-1)^n \frac{\prod Z_{menantes}}{\prod Z_{menées}} = (-1)^2 \frac{Z_2 Z_4}{Z_{3a} Z_{3b}} \Rightarrow \omega_{4/1} = r_1 r_2 \omega_{2/1}$$

$$\Rightarrow v_{5/1} = +R\ r_1 r_2 \omega_{2/1} = R\ \frac{Z_2 Z_4}{Z_{3a} Z_{3b}} \omega_{2/1}$$

car $\omega_{2/1} > 0 \Rightarrow v_{5/1} > 0$

Question 3 : *Proposer et justifier une démarche de résolution pour déterminer la loi de commande en effort.*

Le mécanisme comporte un seul degré de liberté, nous allons dont utiliser le théorème de la puissance cinétique (TPC).

Question 4 : *Déterminer la loi de commande en effort. Interpréter les différents termes trouvés.*

Energie cinétique :

On isole l'ensemble $\Sigma = \{2,3,4,5\}$ des solides en mouvement par rapport à 1.
1 est un repère galiléen.

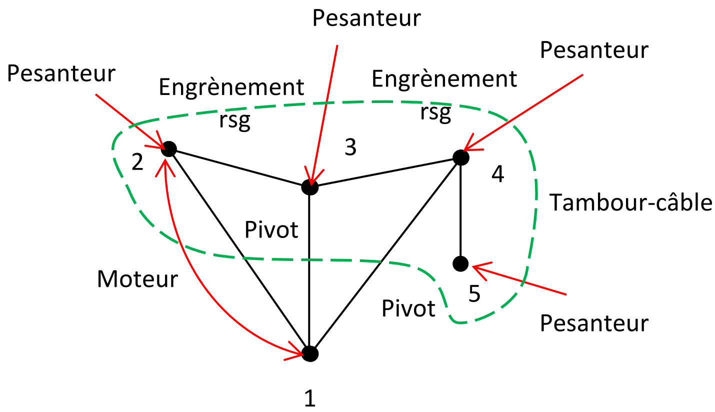
$$E_{c\ \Sigma/1} = E_{c\ 2/1} + E_{c\ 3/1} + E_{c\ 4/1} + E_{c\ 5/1}$$

Remarque : Attention le bâti n'est pas forcément numéroté 0.

$2/1, 3/1, 4/1$ sont des mouvements de rotation autour d'un axe fixe.
$5/1$ est un mouvement de translation rectiligne.

$$\omega_{3/1} = r_1 \omega_{2/1}$$
$$\omega_{4/1} = r_1 r_2 \omega_{2/1}$$
$$v_{5/1} = R r_1 r_2 \omega_{2/1}$$

$$E_{c\ \Sigma/1} = \frac{1}{2} J_2 {\omega_{2/1}}^2 + \frac{1}{2} J_3 {\omega_{3/1}}^2 + \frac{1}{2} J_4 {\omega_{4/1}}^2 + \frac{1}{2} m_5 {v_{5/1}}^2 = \frac{1}{2}(J_2 + J_3 {r_1}^2 + J_4 {r_1}^2 {r_2}^2 + m_5 R^2 {r_1}^2 {r_2}^2) {\omega_{2/1}}^2 = \frac{1}{2} J_{eq} {\omega_{2/1}}^2$$



Remarque : on a besoin d'un graphe de structure pour les puissances.

Puissances extérieures :

$$P_{ext} = P_{\bar{\Sigma} \to \Sigma/1} = P_{1 \to 2/1} + P_{1 \to 3/1} + P_{1 \to 4/1} + P_{\underset{1 \to 2/1}{mot}} + P_{ter \to 2/1} + P_{ter \to 3/1} + P_{ter \to 4/1} + P_{ter \to 5/1}$$

$$P_{\underset{1 \to 2/1}{mot}} = C_m \omega_{2/1}$$

Les liaisons sont supposées parfaites, on fait l'hypothèse qu'il y a rsg au niveau des dentures.

$$P_{1 \to 2/1} = P_{1 \to 3/1} = P_{1 \to 4/1} = 0$$

Les centres de gravités 2 3 4 ont une vitesse nulle (car les solides sont équilibrés).

$$P_{ter\to 2/1} = P_{ter\to 3/1} = P_{ter\to 4/1} = 0$$

$$P_{ter\to 5/1} = \mathcal{F}(ter \to 5)\odot\mathcal{V}(5/1) = \vec{M}_{ter\to 5}\odot\vec{V}_{5/1} = {}_{G_5}\begin{Bmatrix} -m_5 g\vec{y}_1 \\ \vec{0}\end{Bmatrix} \odot {}_{\forall P}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ v_{5/1}\vec{y}_1\end{Bmatrix} = -m_5 g v_{5/1}$$

$$P_{ext} = C_m\omega_{2/1} - m_5 g v_{5/1}$$

<u>Puissances intérieures :</u>

$$P_{int} = \sum_{\substack{i,j=2\\ i<j}}^{n} P_{S_i \leftrightarrow S_j} = 0$$

On applique le théorème de la puissance cinétique (TPC) à Σ :

$$\frac{dE_{c\,\Sigma/1}}{dt} = P_{ext} + P_{int}$$

$$\Rightarrow J_{eq}\dot{\omega}_{2/1}\omega_{2/1} = C_m\omega_{2/1} - m_5 g v_{5/1}$$

$$\Rightarrow J_{eq}\dot{\omega}_{2/1} = C_m - m_5 g R\,\frac{Z_2 Z_4}{Z_{3a}Z_{3b}}$$

$$\Rightarrow C_m = J_{eq}\dot{\omega}_{2/1} + m_5 g R\,\frac{Z_2 Z_4}{Z_{3a}Z_{3b}}$$

Remarque :

Le terme $J_{eq}\dot{\omega}_{2/1}$ représente le couple moteur à fournir pour accélérer le mouvement, en particulier pour mettre les masses en mouvement au démarrage et freiner.

Le terme $m_5 g R\,\frac{Z_2 Z_4}{Z_{3a}Z_{3b}}$ représente le couple moteur à fournir pour compenser l'action de pesanteur à vitesse constante ou pour la maintenir en équilibre.

Question 5 : *Modifier la loi de commande en effort obtenue précédemment en tenant compte de ces nouvelles hypothèses.*

<u>hypothèse :</u> les puissances dissipées en régime transitoire sont égales aux puissances dissipées en régime permanent.

$$P_{1\to 4/1} = \mathcal{F}(1\to 4)\odot\mathcal{V}(4/1) = \vec{M}_{1\to 4}\odot\vec{V}_{4/1} = {}_{G_4}\begin{Bmatrix} X_{1\to 4}\vec{x}_1 + Y_{1\to 4}\vec{y}_1 + Z_{1\to 4}\vec{y}_1 \\ -\mu\omega_{4/1}\vec{x}_1 + M_{1\to 4}\vec{y}_1 + N_{1\to 4}\vec{z}_1\end{Bmatrix} \odot {}_{G_4}\begin{Bmatrix} \omega_{4/1}\vec{x}_1 \\ \vec{0}\end{Bmatrix} = -\mu{\omega_{4/1}}^2$$

$$P_{2\leftrightarrow 3} + P_{3\leftrightarrow 4} = -(1-\eta)P_e = -(1-\eta)C_m\omega_{2/1} \qquad \text{avec} \qquad \eta = \eta_{r1}\eta_{r2} = 0{,}9.0{,}9$$

On applique le TPC :

$$J_{eq}\dot{\omega}_{2/1}\omega_{2/1} = C_m\omega_{2/1} - m_5 g R\frac{Z_2 Z_4}{Z_{3a}Z_{3b}} - \mu{\omega_{4/1}}^2 - (1-\eta)C_m\omega_{2/1}$$

$$J_{eq}\dot{\omega}_{2/1} = C_m - m_5 g R\frac{Z_2 Z_4}{Z_{3a}Z_{3b}} - \mu\left(\frac{Z_2 Z_4}{Z_{3a}Z_{3b}}\right)^2 \omega_{2/1} - (1-\eta)C_m$$

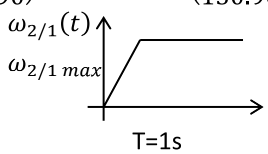
$$\Rightarrow C_m = \frac{1}{\eta}\left(J_{eq}\dot{\omega}_{2/1} + m_5 g R\,\frac{Z_2 Z_4}{Z_{3a}Z_{3b}} + \mu\left(\frac{Z_2 Z_4}{Z_{3a}Z_{3b}}\right)^2\right)$$

Question 6 : *Choisir un moteur.*

On cherche $N_{2/1}$, C_m et P_m.

$$N_{2/1} = 1400\ tr/min$$

$$J_{eq} = J_2 + J_3{r_1}^2 + J_4\left(\frac{Z_2 Z_4}{Z_{3a}Z_{3b}}\right)^2 + m_5 R^2\left(\frac{Z_2 Z_4}{Z_{3a}Z_{3b}}\right)^2 = 8.10^{-3} + 0{,}12\left(\frac{15}{150}\right)^2 + 2{,}4\left(\frac{15.15}{150.90}\right)^2 + 100.0{,}1^2\left(\frac{15.15}{150.90}\right)^2$$
$$\approx 0{,}0102\ kg.m^2$$



$$\dot{\omega}_{2/1} = \frac{\omega_{2/1\,max}}{T} = \frac{\frac{2\pi}{60}1400}{1} \approx 146{,}6\ rad/s^2$$

$$C_m = \frac{1}{\eta}\left(J_{eq}\dot{\omega}_{2/1} + m_5 g R\,\frac{Z_2 Z_4}{Z_{3a}Z_{3b}} + \mu\left(\frac{Z_2 Z_4}{Z_{3a}Z_{3b}}\right)^2\right) = \frac{1}{0{,}9.0{,}9}\left(0{,}0102.146{,}6 + 100.9{,}81.0{,}1\,\frac{15.15}{150.90} + 0{,}1\left(\frac{15.15}{150.90}\right)^2\right)$$
$$= 3{,}48\ Nm$$

$$P_m = C_m\omega_{2/1} = 3{,}48.\frac{2\pi}{60}1400 = 510\ W$$

On choisit donc le moteur le plus petit car le moins cher, le moteurs asynchrones 4 pôles LS 80 L.

Type	Puissance nominale à 50 Hz	Vitesse nominale	Couple nominal	Intensité nominale	Facteur de puissance	Rendement	Courant démarrage / Courant nominal	Masse
	P_N kW	N_N min^{-1}	C_N N.m	$I_{N(400V)}$ A	$Cos\ \varphi$	η %	I_D / I_N	IM B3 kg
LS 63 M	0.18	1390	1.2	0.64	0.65	62	3.7	5
LS 63 M[1]	0.18	1410	1.2	0.62	0.75	63	3.7	5
LS 63 M	0.25	1390	1.6	0.85	0.65	65	4	5.1
LS 63 M[1]	0.25	1390	1.6	0.85	0.65	65	4	5.1
LS 71 L	0.25	1425	1.7	0.8	0.65	69	4.6	6.4
LS 71 L	0.37	1420	2.5	1.06	0.7	72	4.9	7.3
LS 71 L	0.55	1400	3.8	1.62	0.7	70	4.8	8.3
LS 80 L	0.55	1400	3.8	1.6	0.74	67	4.4	8.2
LS 80 L	0.75	1400	5.1	2.01	0.77	70	4.5	9.3
LS 80 L	0.9	1425	6	2.44	0.73	73	5.8	10.9
LS 90 S	1.1	1429	7.4	2.5	0.84	76.8	4.8	11.5
LS 90 L	1.5	1428	10	3.4	0.82	78.5	5.3	13.5
LS 90 L	1.8	1438	12	4	0.82	80.1	6	15.2