Sciences industrielles

CPGE 2nd année

Dynamique et énergétique des systèmes de solides indéformables

Sommaire

La dynamique des solides permet de prédire ou d'expliquer les mouvements à partir de leurs causes. Il est important de connaître les situations élémentaires pour comprendre et interpréter les résultats issus de logiciels de calculs plus complexes.

La **cinétique** est l'**étude de la répartition des masses**.

La **dynamique** est l'**étude des mouvements et de leurs causes**.

domaine	***grandeurs physiques***
géométrie	[longueur] et [angle]
cinématique	[longueur], [angle] et [temps]
statique	[longueur], [angle] et [masse]
cinétique	[longueur], [angle], [temps] et [masse]
dynamique	[longueur], [angle], [temps] et [masse]

1 Contexte

1.1 Gyroscope de précision de Dr Nozman (feat Squeezie)

(1) https://youtu.be/hqjcPnl5qF4

Dans une vidéo de sa chaîne(1), Dr Nozman expose à Squeezie un gyroscope qui à la particularité d'être monté au bout d'une tige et de rester un certain temps vertical.

A l'aide de ce chapitre, nous allons calculer la matrice d'inertie, le moment cinétique puis le moment dynamique du gyroscope et expliquer son mouvement.

1.2 Modèle cinématique

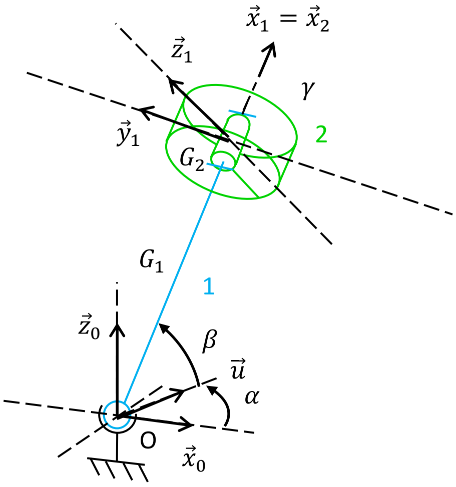
On associe une base $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$, à chaque solide i, avec $i \in \{0,1,2\}$. R_0 est Galiléen. On introduit une base intermédiaire $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

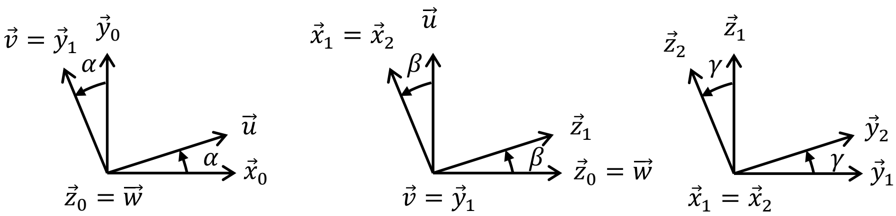
La **tige 1** est un cylindre homogène de masse m_1, de centre d'inertie G_1, tel que $\overrightarrow{OG_1} = \frac{L}{2}\vec{x}_1$ avec un angle de **précession** $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{u}) = (\vec{y}_0, \vec{v})$ autour de $\vec{z}_0 = \vec{w}$ et de **nutation** $\beta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = (\vec{u}, \vec{x}_1)$ autour de $\vec{v} = \vec{y}_1$(2).

(2) L'angle β est représenté négativement sur le schéma cinématique mais positivement sur la figue de calcul.

Le **disque 2** est un cylindre homogène de masse m_2, de hauteur h et de rayon R, de centre d'inertie G_2, tel que $\overrightarrow{OG_2} = L\vec{x}_1$ avec un angle de **rotation propre** tel que $\gamma = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ autour de $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$.

On note $\Sigma = \{1,2\}$.





2 Inertie

L'**inertie** est la **résistance** qu'un corps oppose au changement de son **mouvement**.

Maîtriser les inerties des solides en mouvement dans un mécanisme est intéressant car il existe un lien direct entre ces dernières et les actions mécaniques qui permettent de faire varier les mouvements.

2.1 Masse

On appelle **système matériel**, un ensemble de particules caractérisées par une certaine quantité de matière.

On appelle **masse** d'un système matériel la grandeur scalaire positive représentative de sa quantité de matière.

La **masse** est l'inertie en **translation**.

Un **système à masse conservative**(1) est un système dont la masse ne varie pas au cours du temps.

(1) En mécanique Newtonienne, la masse est indépendante de l'énergie. C'est le principe de conservation de la masse.

On appelle **centre de masse**, ou **centre d'inertie**, ou **centre de gravité**(2) d'un système matériel Σ, le point G tel que : $\int_{\Sigma} \overrightarrow{GP}\, dm = 0$

A partir d'un point quelconque : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m}\int_{\Sigma} \overrightarrow{AP}\, dm$

Relation du barycentre pour des systèmes disjoints :

$$\boxed{m\overrightarrow{AG} = m_1\overrightarrow{AG_1} + m_2\overrightarrow{AG_2}} \text{ avec } m = m_1 + m_2$$

(2) Pour un satellite, le moment de la gravité au centre de gravité n'est pas forcément nul car le champ de gravité n'est pas uniforme.

Méthodologie pour déterminer la position de G :

1. Identifier les symétries ;
2. Décomposer le solide S en volumes élémentaires ;
3. Utiliser la relation du barycentre.

2.2 Moment d'inertie

La masse m ne permet pas à elle seule de caractériser la difficulté de mettre un solide en mouvement de rotation ou de l'en empêcher. On a besoin de connaître la façon dont cette masse est répartie par rapport à l'axe de rotation.

Le **moment d'inertie** est l'inertie en **rotation**.

Mécanique du point

Exemple : Energie cinétique dans la mécanique du point

Pour un mouvement de translation : $E_c = \frac{1}{2}mV^2$ Pour un mouvement de rotation : $E_c = \frac{1}{2}mR^2\omega^2$

Définition scalaire

On appelle **moment d'inertie** d'un solide **par rapport à un axe** $\Delta = (A, \vec{u})$ la somme des masses élémentaires multipliées par le carré de la distance du point courant à cet axe :

$$\boxed{I_{\Delta,S} = I_{(A,\vec{u}),S} = \int_S r^2\, dm = \int_S r^2\, \rho dV}$$ (3)

Son unité est $[kg.m^2]$

(3) La répartition de la masse par rapport à l'axe de rotation, intervient au carré dans la grandeur d'inertie.

Il est positif.

Le moment d'inertie caractérise la distribution de la masse d'un solide autour d'une droite.

Pour une même masse globale, plus la matière est éloignée de l'axe, plus le moment d'inertie est grand, et plus il sera difficile de mettre le solide en mouvement de rotation autour de cet axe, ou de l'arrêter.

Question 1 : Déterminer le moment d'inertie du disque 2 du gyroscope, modélisé par un cylindre homogène, de centre G, rayon R, axe $(O, \vec{x}_1)$, de hauteur h et de masse m.

$$A_2 = I_{xx} = I_{(G,\vec{x}_1),S} = \int_S r^2\, dm = \int_S r^2\, \rho dV = \rho \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{x=0}^{x=h} r^2\, r dr d\theta dx = 2\pi\rho h \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = 2\pi \frac{m}{\pi h R^2} h \frac{R^4}{4} = m\frac{R^2}{2}$$

Changement d'axe de rotation

Théorème de Huygens scalaire

Soit un solide indéformable S de masse m et de centre de masse G.

Soit $\Delta = (A, \vec{u})$ une droite de ce solide S et soit d la distance au point G à cet axe.

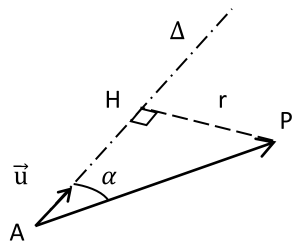
Le moment d'inertie d'un solide autour d'un axe Δ qui ne passe pas par G est égale au moment d'inertie d'un axe parallèle au premier passant par G augmenté de md^2.

$$\boxed{I_{(A,\vec{u}),S} = I_{(G,\vec{u}),S} + md^2}$$

(1) $I_{(A,\vec{u}),S} \geq I_{(G,\vec{u}),S}$

Le moment d'inertie par rapport à un axe de direction $\vec{u}$ est minimum(1) quand l'axe passe par G.

2.1 Opérateur d'inertie



Définition vectorielle d'un moment d'inertie

$$I_{\Delta,S} = I_{(A,\vec{u}),S} = \int_S r^2\, dm = \int_S HP^2\, dm = \int_S \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}\right)^2 dm$$

car $\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP} = \|\vec{u}\| \|\overrightarrow{AP}\| \sin\alpha = AP\frac{HP}{AP} = HP$

(2) $\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{w}.(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{v}.(\vec{w} \wedge \vec{u})$

On reconnait un produit mixte(2), on peut faire une permutation circulaire. $I_{\Delta,S} = \int_S (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}).(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP})\, dm = \vec{u}.\int_S \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP})\, dm$

(3) On peut voir cet opérateur comme une description de la répartition des masses dans le solide.

Soit un solide indéformable S et un point quelconque A de ce solide.

On appelle **opérateur d'inertie(3) au point A du solide S** l'application vectorielle :

$$\vec{I}_{A,S} : \quad E \to E$$
$$\vec{u} \mapsto \vec{I}_{A,S}(\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP})\, dm$$

L'opérateur est linéaire donc représentable par une matrice.

Matrice associée à l'opérateur d'inertie

En notant $\overrightarrow{AP} = x\,\vec{x} + y\,\vec{y} + z\,\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ on remarque que

$$\overrightarrow{AP} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} yw - vz \\ zu - wx \\ xv - uy \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

(4) La matrice d'un opérateur antisymétrique est aussi antisymétrique dans une base orthonormée.

L'opérateur $\overrightarrow{AP} \wedge$ s'écrit : $\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ (4)

L'opérateur $\overrightarrow{AP} \wedge (\overrightarrow{AP} \wedge)$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(y^2+z^2) & xy & xz \\ yx & -(z^2+x^2) & yz \\ zx & zy & -(x^2+y^2) \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

La matrice dans la base orthonormée $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de l'opérateur d'inertie[(1)(2)] en A du solide S est donc :

$$\bar{\bar{I}}_{A,S} = \left(\vec{I}_{A,S}(\vec{x}), \vec{I}_{A,S}(\vec{y}), \vec{I}_{A,S}(\vec{z})\right) =$$

$$\begin{pmatrix} \int_S (y^2+z^2)\,dm & -\int_S xy\,dm & -\int_S xz\,dm \\ -\int_S xy\,dm & \int_S (z^2+x^2)\,dm & -\int_S yz\,dm \\ -\int_S xz\,dm & -\int_S yz\,dm & \int_S (x^2+y^2)\,dm \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad (3)$$

$$= \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

La matrice d'inertie permet de synthétiser les caractéristiques d'inertie d'un solide et de calculer sa dynamique autour des différents axes.

A, B, C sont les **moments d'inertie** en $[\boldsymbol{kg.m^2}]$. Ils traduisent la répartition de la masse autour des différents axes.

D, E, F sont les **produits d'inertie**[(4)] en $[\boldsymbol{kg.m^2}]$. Ils traduisent une asymétrie dans la répartition de la masse par rapport à des plans.

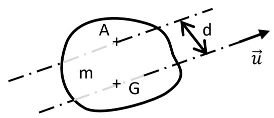
Axes principaux d'inertie

Cette matrice de l'opérateur d'inertie, ou du tenseur d'inertie, est symétrique réelle **donc toujours diagonalisable**[(5)]. Il y a donc 3 valeurs propres réelles et 3 vecteurs propres orthogonaux.

Les 3 valeurs propres sont appelées les **moments d'inertie principaux**. Ils sont portés par les **axes principaux d'inertie**.

Lorsque la matrice d'inertie est exprimée au centre d'inertie, les axes principaux d'inertie sont appelés les **axes centraux d'inertie**.

Changement de point



Soit $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP}$, avec G le centre de masse de S.

$$\vec{I}_{A,S}(\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP})\,dm$$

$$= \underbrace{\int_S \overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG})\,dm}_{a} + \underbrace{\int_S \overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP})\,dm}_{b} + \underbrace{\int_S \overrightarrow{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG})\,dm}_{c} + \underbrace{\int_S \overrightarrow{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP})\,dm}_{d}$$

$$a = m\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}) = \vec{I}_{A,\{G,m\}}(\vec{u}) = \bar{\bar{I}}_{A,\{G,m\}}.\vec{u}$$

$b = 0$ et $c = 0$ car on a choisi G comme changement de point $\overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \underbrace{\int_S \overrightarrow{GP}\,dm}_{\vec{0}}\right)$

$$d = \vec{I}_{G,S}(\vec{u}) = \bar{\bar{I}}_{G,S}.\vec{u}$$

Théorème de Huygens matriciel

L'opérateur d'inertie du solide S en un point quelconque A est égal à la somme de **l'opérateur d'inertie de ce solide calculé au centre de masse G** et de **l'opérateur d'inertie calculé au point A du solide S affecté de la masse totale du solide S**.

$$\bar{\bar{I}}_{A,S} = \bar{\bar{I}}_{G,S} + \bar{\bar{I}}_{A,(G,m)} = \bar{\bar{I}}_{G,S} + m\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Les matrices d'inertie de deux solides peuvent **s'additionner** si elles sont exprimées au **même point** et dans la **même base**.

(1) On remarque qu'en cylindrique

$I_{(A,\vec{x}),S} = I_{xx} = \int_S (y^2+z^2)\,dm$

$= \int_S r^2\,dm$

(2) La matrice d'inertie est donnée dans les sujets d'écrit des concours, mais elle peut être à rechercher dans SolidWorks aux oraux de TP.

(3) Attention, $I_{(A,\vec{x}),S}$ désigne un scalaire mais $\bar{\bar{I}}_{A,S}$ désigne une matrice.

$I_{xx} = \vec{x}.\bar{\bar{I}}_{A,S}.\vec{x} = I_{(A,\vec{x}),S}$

$I_{xy} = \vec{x}.\bar{\bar{I}}_{A,S}.\vec{y} = I_{(A,\vec{x},\vec{y}),S}$

Pour calculer les moments d'inerties, soit on le calcule directement, soit on calcule la trace de la matrice $Trace(\bar{\bar{I}}_{A,S}) = A + B + C$ *qui est souvent plus simple avec les symétries.*

(4) Ils créent des effets de balourd.

(5) Lorsque la matrice est diagonalisée dans sa base propre centrale d'inertie, le solide est dynamiquement équilibré. Un mouvement de rotation autour de ces axes centraux propres se fait sans aucune vibration.

Changement de base

La matrice de passage $\overline{\overline{P}}$ de $(\vec{x},\vec{u},\vec{v})$ vers $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est $\begin{pmatrix}\vec{x}\\ \vec{y}\\ \vec{z}\end{pmatrix} = \overline{\overline{P}}\begin{pmatrix}\vec{x}\\ \vec{u}\\ \vec{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{x}\\ \vec{u}\\ \vec{v}\end{pmatrix}$

$$\overline{\overline{I}}_{A,S} = \begin{pmatrix}A & -F & -E\\ -F & B & -D\\ -E & -D & C\end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{u},\vec{v})} = \begin{pmatrix}A' & -F' & -E'\\ -F' & B' & -D'\\ -E' & -D' & C'\end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\left[\overline{\overline{I}}_{A,S}\right]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \overline{\overline{P}}^{T}\left[\overline{\overline{I}}_{A,S}\right]_{(\vec{x},\vec{u},\vec{v})}\overline{\overline{P}}$$

Solides de formes élémentaires

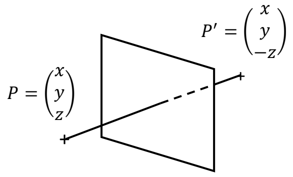
Solide avec plan de symétrie

(1) Si le solide n'est pas homogène, on ne s'intéresse pas seulement à la symétrie géométrique mais à la symétrie matérielle.

(2) Car $\int_{-L}^{L} z\,dz = 0$

On considère un solide homogène[1] S admettant 1 plan de symétrie $(A,\vec{x},\vec{y})$. Pour tout point $P = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, il existe un point symétrique $P' = \begin{pmatrix}x\\ y\\ -z\end{pmatrix}$, donc :

$$\overline{\overline{I}}_{A,S} = \begin{pmatrix}A & -F & 0\\ -F & B & 0\\ 0 & 0 & C\end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad (2)$$



$(A,\vec{x},\vec{y})$

Et avec 2 plans de symétrie : $\overline{\overline{I}}_{A,S} = \begin{pmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & C\end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Solide avec axe de révolution

(3) Tout vecteur orthogonal à $\vec{z}$ est vecteur propre. On a une valeur propre double. $I_{xx} = I_{yy}$

On considère un solide homogène S admettant comme axe de révolution $(A,\vec{z})$. Les plans $(A,\vec{y},\vec{z})$ et $(A,\vec{z},\vec{x})$ sont donc plans de symétrie, donc :

$$\overline{\overline{I}}_{A,S} = \begin{pmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & A & 0\\ 0 & 0 & C\end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad (3)$$

Question 2 : Déterminer les symétries des matrices d'inertie de la tige 1 et du cylindre 2 du gyroscope.

Les 2 solides 1 et 2 ont une symétrie de révolution $(O,\vec{x}_1)$, donc

$$\mathrm{I}_{G_1,1} = \begin{pmatrix}A_1 & 0 & 0\\ 0 & B_1 & 0\\ 0 & 0 & B_1\end{pmatrix}_{(G_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} \qquad \mathrm{I}_{G_2,2} = \begin{pmatrix}A_2 & 0 & 0\\ 0 & B_2 & 0\\ 0 & 0 & B_2\end{pmatrix}_{(G_2,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$$

Question 3 : Exprimer ces matrices en leurs centres d'inertie G_1 et G_2 puis en O.

Pour le solide 2 :

$\begin{cases} x\\ y = r\cos\theta\\ z = r\sin\theta\end{cases}$ On a déjà démontré $A_2 = I_{xx} = m_2\frac{R^2}{2}$

Il est beaucoup plus facile d'utiliser une astuce de calcul (comme calculer la Trace de la matrice) que des changements de coordonnées. Pour les cas plus compliqués, on utilise SolidWorks → Evaluer → Propriété de masse → On lit l'inertie que l'on cherche dans la matrice bien orientée.

$$Trace(I_{G,2}) = A_2 + B_2 + B_2 = \int_2 (y^2+z^2)\,dm + \int_2 (z^2+x^2)\,dm + \int_2 (x^2+y^2)\,dm$$
$$= 2\int_2 (x^2+y^2+z^2)\,dm = 2\left(\int_V x^2\,\rho dV + m_2\frac{R^2}{2}\right)$$

$$\int_V x^2\,\rho\, r dr d\theta dx = \rho \int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{x=-\frac{h}{2}}^{x=\frac{h}{2}} x^2\, r dr d\theta dx = 2\pi\rho\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=R}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-\frac{h}{2}}^{x=\frac{h}{2}} = 2\pi\frac{m_2}{\pi R^2 h}\frac{R^2}{2}2\frac{h^3}{24}$$
$$= m_2\frac{h^2}{12}$$

$$\Rightarrow A_2 + 2B_2 = 2m_2\frac{R^2}{2} + 2m_2\frac{h^2}{12} \Rightarrow B_2 = I_{yy} = \frac{1}{2}\left(2m_2\frac{R^2}{2} + 2m_2\frac{h^2}{12} - m_2\frac{R^2}{2}\right) = m_2\frac{R^2}{4} + m_2\frac{h^2}{12}$$

$$I_{G_2,2}=\begin{pmatrix} m_2\dfrac{R^2}{2} & 0 & 0\\ 0 & m_2\left(\dfrac{R^2}{4}+\dfrac{h^2}{12}\right) & 0\\ 0 & 0 & m_2\left(\dfrac{R^2}{4}+\dfrac{h^2}{12}\right)\end{pmatrix}_{(G_2,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} \qquad \overrightarrow{OG_2}=L\vec{x}_1$$

On utilise le Théorème de Huygens :

$$I_{O,2}=I_{G_2,2}+I_{G_2,(O,m_2)}=I_{G_2,2}+m_2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&L^2&0\\0&0&L^2\end{pmatrix}_{(G_2,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$$

$$=\begin{pmatrix} m_2\dfrac{R^2}{2} & 0 & 0\\ 0 & m_2\left(\dfrac{R^2}{4}+\dfrac{h^2}{12}+L^2\right) & 0\\ 0 & 0 & m_2\left(\dfrac{R^2}{4}+\dfrac{h^2}{12}+L^2\right)\end{pmatrix}_{(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} = \begin{pmatrix}A_2&0&0\\0&B_2&0\\0&0&B_2\end{pmatrix}_{(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$$

Pour le solide 1 :

$$I_{G_1,1}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&m_1\dfrac{L^2}{12}&0\\0&0&m_1\dfrac{L^2}{12}\end{pmatrix}_{(G_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} \qquad \overrightarrow{OG_1}=\frac{L}{2}\vec{x}_1$$

On utilise le Théorème de Huygens :

$$I_{O,1}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&m_1\left(\dfrac{L^2}{12}+\dfrac{L^2}{4}\right)&0\\0&0&m_1\left(\dfrac{L^2}{12}+\dfrac{L^2}{4}\right)\end{pmatrix}_{(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&m_1\dfrac{L^2}{3}&0\\0&0&m_1\dfrac{L^2}{3}\end{pmatrix}_{(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&B_1&0\\0&0&B_1\end{pmatrix}_{(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$$

3 Quantité de vitesse et quantité d'accélération

Mécanique du point

(1) En l'absence de forces extérieures, ou si leur résultante est nulle, la quantité de mouvement d'un système matériel se conserve.

(2) On le note parfois aussi L_A.

La **quantité de mouvement**(1), ou quantité de vitesse, d'un point matériel m se déplaçant à une vitesse $\vec{V}$: $\vec{P} = m\vec{V}$

Quand ce point tourne autour d'un axe $\Delta = (A, \vec{u})$, cette quantité de vitesse est caractérisée par le **moment cinétique**(2), $\vec{\sigma}_A$, ou moment de quantité de mouvement :

$$\vec{\sigma}_A = \overrightarrow{AP} \wedge m\vec{V}$$

D'autre part, pour un système à masse conservative, la quantité d'accélération est la dérivée de la quantité de mouvement :

$$\frac{d[\vec{P}]_{/R}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{V} + m\frac{d[\vec{V}]_{/R}}{dt} = m\vec{A}$$

On somme maintenant ces quantités sur le système considéré.

3.1 Torseur cinétique

Soit un **système matériel Σ** à masse conservative, c'est-à-dire un ensemble de particules caractérisé par une certaine quantité de matière. Σ peut être un solide, plusieurs solides ou un fluide.

On appelle **résultante cinétique**, ou quantité de mouvement, ou quantité de vitesse de Σ dans son mouvement par rapport à R la somme des quantités de vitesses élémentaires en translation :

$$\vec{P}_{\Sigma/R} = \int_\Sigma \vec{V}_{/R}(\mathrm{P})\,\mathrm{dm} = m\vec{V}_{/R}(\mathrm{G}) \qquad \text{en } [kg.m/s]$$

On appelle **moment cinétique** de Σ dans son mouvement par rapport à R calculé en un point A quelconque la somme des moments cinétiques des quantités de vitesses élémentaires en rotation :

$$\vec{\sigma}_{\Sigma/R}(A) = \int_\Sigma \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}_{/R}(\mathrm{P})\mathrm{dm} \qquad \text{en } [kg.m^2/s]$$

(3) Il y a le même lien entre le torseur cinétique $\vec{\sigma}_{S/R}$ et le moment cinétique $\vec{\sigma}_{S/R}(A)$ qu'entre la fonction f et l'image $f(x)$.

(4) Au concours, on renomme souvent cette fonction avec la lettre $\mathscr{C}$ comme cinétique.

En ce qui concerne l'accolade, de la même manière on peut définir la fonction exponentielle par :

$$exp = \begin{cases} f = f' \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(5) La résultante cinétique représente les quantités de mouvements du solide en translation. Le moment cinétique en A représente les quantités de mouvements du solide en rotation autour de A.

La résultante d'un torseur ne dépend pas du point en lequel on calcule le moment.

(6) $\bar{\bar{I}}_{A,S}$ et $\vec{\Omega}_{S/R}$ doivent être exprimés dans la même base pour pouvoir être multipliés.

Pour Σ à masse conservative, en particulier pour un solide indéformable S, on a :

$$\vec{\sigma}_{S/R}(B) = \int_S (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}) \wedge \vec{V}_{S/R}(\mathrm{P})\mathrm{dm} = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}_{S/R}(\mathrm{P})\mathrm{dm} + \overrightarrow{BA} \wedge \int_S \vec{V}_{S/R}(\mathrm{P})\mathrm{dm}$$
$$= \vec{\sigma}_{S/R}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge m\vec{V}_{S/R}(\mathrm{G})$$

La fonction vectorielle $\vec{\sigma}_{S/R}$ est donc un torseur de vecteur $m\vec{V}_{S/R}(\mathrm{G})$. C'est un champ de vecteurs équiprojectif.

$$\vec{\sigma}_{S/R} : \quad \mathscr{E} \to \mathrm{E}$$
$$\mathrm{A} \mapsto \vec{\sigma}_{S/R}(A) = \vec{\sigma}_{S/R}(B) + \overrightarrow{AB} \wedge m\vec{V}_{S/R}(G) \quad (3)$$

$\vec{\sigma}_{S/R}$ est le **torseur cinétique**. On appelle torseur cinétique le champ des vecteurs moment cinétique.

Pour un solide indéformable, on a :

$$\vec{\sigma}_{S/R}(A) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}_{S/R}(P)dm = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \left(\vec{V}_{S/R}(A) + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{\Omega}_{S/R}\right)dm$$
$$= \underbrace{\int_S \overrightarrow{AP}dm}_{m\overrightarrow{AG}} \wedge \vec{V}_{S/R}(A) + \underbrace{\int_S \overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{PA} \wedge \vec{\Omega}_{S/R}\right)dm}_{\vec{I}_{A,S}(\vec{\Omega}_{S/R}) = \bar{\bar{I}}_{A,S}.\vec{\Omega}_{S/R}}$$

Les éléments de réduction du torseur en A sont :

$$\boxed{\mathscr{C}(S/R) = \vec{\sigma}_{S/R} = \begin{Bmatrix} \vec{P}_{S/R} \\ \vec{\sigma}_{S/R}(A) \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} m\vec{V}_{S/R}(G) \\ \bar{\bar{I}}_{A,S}.\vec{\Omega}_{S/R} + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{V}_{S/R}(A) \end{Bmatrix}} \quad (4)(5)(6)$$

On a donc deux cas particuliers :

Si A est le centre de masse G :

$$\vec{\sigma}_{S/R}(G) = \bar{\bar{I}}_{G,S}.\vec{\Omega}_{S/R}$$

Si A est immobile dans le mouvement S/R :

$$\vec{\sigma}_{S/R}(A) = \bar{\bar{I}}_{A,S}.\vec{\Omega}_{S/R}$$

3.2 Torseur dynamique

On appelle **résultante dynamique**, ou quantité d'accélération, de Σ dans son mouvement par rapport à R la somme des quantités d'accélérations élémentaires en translation : $\int_\Sigma \vec{A}_{/R}(\mathrm{P})\,\mathrm{dm} = m\vec{A}_{/R}(\mathrm{G})$ en $[kg.m/s^2]$

On appelle **moment dynamique** du solide S dans son mouvement par rapport à R calculé en un point A quelconque la somme des moments dynamiques élémentaires en rotation : $\vec{\delta}_{\Sigma/R}(A) = \int_\Sigma \overrightarrow{AP} \wedge \vec{A}_{/R}(\mathrm{P})\mathrm{dm}$ en $[kg.m^2/s^2]$

Pour Σ à masse conservative, en particulier pour un solide indéformable S, on a :

$$\vec{\delta}_{S/R}(B) = \int_S (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}) \wedge \vec{A}_{S/R}(P)dm = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{A}_{S/R}(P)dm + \overrightarrow{BA} \wedge \int_S \vec{A}_{S/R}(P)dm$$
$$= \vec{\delta}_{S/R}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge m\vec{A}_{S/R}(G)$$

La fonction vectorielle $\vec{\delta}_{S/R}$ est donc un torseur de vecteur $m\vec{A}_{S/R}(G)$. C'est un champ de vecteurs équiprojectif.

$$\vec{\delta}_{S/R} : \quad \mathcal{E} \rightarrow \mathrm{E}$$
$$\mathrm{A} \mapsto \vec{\delta}_{S/R}(A) = \vec{\delta}_{S/R}(B) + \overrightarrow{AB} \wedge m\vec{A}_{S/R}(G)$$

$\vec{\delta}_{S/R}$ est le **torseur dynamique**. On appelle torseur dynamique le champ des vecteurs moment dynamique.

Du torseur cinétique au torseur dynamique

Résultante dynamique :

Le solide S est à masse conservative :

$$m\vec{A}_{S/R}(\mathrm{G}) = \frac{d}{dt}\left[m\vec{V}_{S/R}(\mathrm{G})\right]_{/R}$$

Moment dynamique :

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{S/R}(A)\right]_{/R} = \frac{d}{dt}\left[\int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}_{S/R}(P)dm\right]_{/R} = \int_S \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}_{S/R}(P)dm\right]_{/R}$$

Car le solide S est à masse conservative. On calcule la dérivée d'un produit.

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{S/R}(A)\right]_{/R} = \underbrace{\int_S \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AP}\right]_{/R} \wedge \vec{V}_{S/R}(P)dm}_{a} + \underbrace{\int_S \overrightarrow{AP} \wedge \frac{d}{dt}\left[\vec{V}_{S/R}(P)dm\right]_{/R}}_{b}$$

- Calcul de a :

Soit I un point immobile dans R.

$\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AP}\right]_{/R} = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{IP}\right]_{/R} - \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{IA}\right]_{/R} = \vec{V}_{S/R}(P) - \vec{V}_{/R}(\mathrm{A})$ (1)

(1) $\vec{V}_{/R}(A)$ est la vitesse de A dans R. Cette vitesse provient de la mécanique du point.

$$\int_S \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AP}\right]_{/R} \wedge \vec{V}_{S/R}(\mathrm{P})\mathrm{dm} = \int_S -\vec{V}_{/R}(\mathrm{A}) \wedge \vec{V}_{S/R}(\mathrm{P})\mathrm{dm} = -\vec{V}_{/R}(\mathrm{A}) \wedge \int_S \vec{V}_{S/R}(\mathrm{P})\mathrm{dm}$$
$$= -\vec{V}_{/R}(\mathrm{A}) \wedge \mathrm{m}\vec{V}_{S/R}(\mathrm{G})$$

- Calcul de b :

$$\int_S \overrightarrow{AP} \wedge \frac{d}{dt}\left[\vec{V}_{S/R}(P)dm\right]_{/R} = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge m\vec{A}_{S/R}(P) = \vec{\delta}_{S/R}(A)$$

(1) $\mathscr{D}$ comme dynamique.

(2) La résultante dynamique représente les forces nécessaires pour modifier le mouvement de translation du solide. Le moment dynamique en A représente les moments nécessaires pour modifier le mouvement de rotation autour de A.

Les éléments de réduction du torseur en A sont :

$$\boxed{\mathscr{D}(S/R) = \vec{\delta}_{S/R} = \begin{Bmatrix} m\vec{A}_{S/R}(G) \\ \vec{\delta}_{S/R}(A) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m\vec{A}_{S/R}(G) \\ \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{S/R}(A)\right]_R + \vec{V}_{/R}(A) \wedge m\vec{V}_{S/R}(G) \end{Bmatrix}}$$ (1)(2)

On a donc deux cas particuliers :

Si A est le centre de masse G :

$$\vec{\delta}_{S/R}(G) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{S/R}(G)\right]_{/R} = \frac{d}{dt}\left[\bar{\bar{I}}_{G,S}.\vec{\Omega}_{S/R}\right]_{/R}$$

Si A est immobile dans le mouvement /R :

$$\vec{\delta}_{S/R}(A) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{S/R}(A)\right]_{/R} = \frac{d}{dt}\left[\bar{\bar{I}}_{A,S}.\vec{\Omega}_{S/R}\right]_{/R}$$

3.3 Système de solides indéformables

(3) Car les solides sont disjoints, ils ne se pénètrent pas.

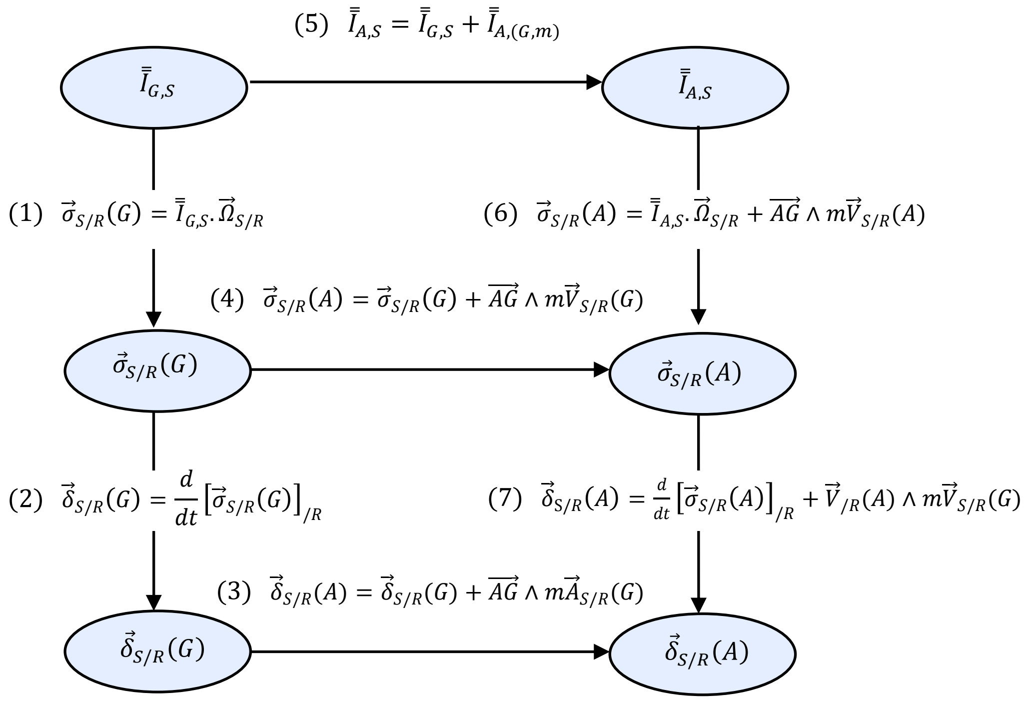
On considère que le système Σ se compose de n solides indéformables S_i en mouvement par rapport à R. Le torseur cinétique $\vec{\sigma}_{\Sigma/R}$ est la somme des torseurs cinétiques de chacun des solides(3).

$$\mathscr{C}(\Sigma/R) = \vec{\sigma}_{\Sigma/R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\sigma}_{i/R}$$

Le torseur dynamique $\vec{\delta}_{\Sigma/R}$ est la somme des torseurs dynamiques de chacun des solides.

$$\mathscr{D}(\Sigma/R) = \vec{\delta}_{\Sigma/R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\delta}_{i/R}$$

3.4 Méthodologie



Démarche de calcul d'un moment dynamique

Cas particuliers

La relation (1) est un cas particulier de la (6).

La relation (2) est un cas particulier de la (7).

La relation (4) est toujours plus simple que la (3).

Si $\vec{A}_{S/R}(G)$ est compliqué, alors la relation (3) peut être très longue.

Si A est un point fixe $/R$, alors $\vec{V}_{/R}(A) = \vec{0}$ et le chemin (1) → (4) → (7) est plus simple que le chemin (1) → (2) → (3).

Parfois, lorsque l'on ne cherche qu'une seule composante selon $\vec{u}$, on peut simplifier le calcul.

Calcul d'une projection de la résultante dynamique

$$m\vec{A}_{S/R}(G).\vec{u} = m\frac{d}{dt}\left[\vec{V}_{S/R}(G).\vec{u}\right] - m\vec{V}_{S/R}(G).\frac{d}{dt}[\vec{u}]_{/R}$$

Par exemple, pour une liaison glissière de direction $\vec{u}$.

Calcul d'une projection du moment dynamique

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{S/R}(\mathrm{A})\right]_{/R}.\vec{u} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{S/R}(\mathrm{A}).\vec{u}\right] - \vec{\sigma}_{S/R}(\mathrm{A}).\frac{d}{dt}[\vec{u}]_{/R}$$

Par exemple, pour une liaison pivot d'axe $(A, \vec{u})$.

4 Energie cinétique

Mécanique du point

Le PFD donne :

$$\vec{F} = m\vec{A}$$

On s'intéresse à la composante de la force dans la direction de la vitesse. C'est celle qui travaille et qui met en mouvement. La puissance est donc :

$$\vec{F}.\vec{V} = m\vec{A}.\vec{V} = m\frac{d\vec{V}}{dt}.\vec{V} = \frac{d\left(\frac{1}{2}m\vec{V}^2\right)}{dt}$$

Pour un point matériel de masse m se déplaçant à une vitesse V dans un repère R, l'énergie cinétique est l'énergie accumulée lors du mouvement. Elle correspond au travail nécessaire pour faire acquérir au point sa vitesse depuis le repos.

$$E_c = \frac{1}{2}m\vec{V}^2$$

4.1 Expression générale

On considère un **système matériel Σ**, c'est-à-dire un ensemble de particules caractérisées par une certaine quantité de matière. Σ cela peut être un solide, plusieurs solides ou un fluide.

On appelle **énergie cinétique** d'un système matériel Σ dans son mouvement par rapport à un repère R la quantité scalaire somme des énergies cinétiques de chacun de ses points.

$$E_{c\Sigma/\mathrm{R}} = \frac{1}{2}\int_\Sigma \vec{V}_{/R}(P)^2\, dm \text{ (1)}$$

L'unité est le Joule [J].

(1) Le champ des vecteurs vitesses $\vec{V}_{/R}$ n'est forcément pas équiprojectif, ce n'est pas un torseur.

Pour un solide indéformable, le champ $\vec{V}_{S/R}$ est équiprojectif, on a donc :

$$E_{cS/R} = \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{V}_{S/R}(A) + \overrightarrow{PA}\wedge\vec{\Omega}_{S/R}\right)^2 dm = \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{V}_{S/R}(A) + \vec{\Omega}_{S/R}\wedge\overrightarrow{AP}\right)^2 dm$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_S \vec{V}_{S/R}(A)^2\, dm}_{\text{a}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_S \left(\vec{\Omega}_{S/R}\wedge\overrightarrow{AP}\right)^2 dm}_{\text{b}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_S 2\vec{V}_{S/R}(A).\left(\vec{\Omega}_{S/R}\wedge\overrightarrow{AP}\right) dm}_{\text{c}}$$

- Calcul de a :

$$\frac{1}{2}\int_S \vec{V}_{S/R}(A)^2\, dm = \frac{1}{2}m\vec{V}_{S/R}(A)^2$$

- Calcul de b :

On reconnait un produit mixte, on peut faire une permutation circulaire.

$$\frac{1}{2}\int_S \left(\vec{\Omega}_{S/R}\wedge\overrightarrow{AP}\right)^2 dm = \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{\Omega}_{S/R}\wedge\overrightarrow{AP}\right).\left(\vec{\Omega}_{S/R}\wedge\overrightarrow{AP}\right) dm = \frac{1}{2}\int_S \vec{\Omega}_{S/R}.\left(\overrightarrow{AP}\wedge\left(\vec{\Omega}_{S/R}\wedge\overrightarrow{AP}\right)\right) dm$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{S/R}.\bar{\bar{I}}_{A,S}.\vec{\Omega}_{S/R}$$

- Calcul de c :

$$\frac{1}{2}\int_S 2\vec{V}_{S/R}(A).\left(\vec{\Omega}_{S/R}\wedge\overrightarrow{AP}\right)dm = m\vec{V}_{S/R}(A).\left(\vec{\Omega}_{S/R}\wedge\overrightarrow{AG}\right)$$

Donc finalement :

$$E_{cS/R} = \frac{1}{2}m\vec{V}_{S/R}(A)^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{S/R}.\bar{\bar{I}}_{A,S}.\vec{\Omega}_{S/R} + m\vec{V}_{S/R}(A).\left(\vec{\Omega}_{S/R}\wedge\overrightarrow{AG}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(m\vec{V}_{S/R}(A)^2 + m\vec{V}_{S/R}(A).\left(\vec{\Omega}_{S/R}\wedge\overrightarrow{AG}\right) + \vec{\Omega}_{S/R}.\bar{\bar{I}}_{A,S}.\vec{\Omega}_{S/R} + m\vec{V}_{S/R}(A).\left(\vec{\Omega}_{S/R}\wedge\overrightarrow{AG}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{V}_{S/R}(A).m\left(\vec{V}_{S/R}(A) + \vec{\Omega}_{S/R}\wedge\overrightarrow{AG}\right) + \vec{\Omega}_{S/R}.\bar{\bar{I}}_{A,S}.\vec{\Omega}_{S/R} + \vec{\Omega}_{S/R}.\left(\overrightarrow{AG}\wedge m\vec{V}_{S/R}(A)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{V}_{S/R}(A).m\vec{V}_{S/R}(G) + \vec{\Omega}_{S/R}.\left(\bar{\bar{I}}_{A,S}.\vec{\Omega}_{S/R} + \overrightarrow{AG}\wedge m\vec{V}_{S/R}(A)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{V}_{S/R}(A).m\vec{V}_{S/R}(G) + \vec{\Omega}_{S/R}.\vec{\sigma}_{S/R}(A)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} m\vec{V}_{S/R}(G) \\ \vec{\sigma}_{S/R}(A)\end{Bmatrix}\odot\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}_{S/R}(A)\end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2}\,\vec{\sigma}_{S/R}\odot\vec{V}_{S/R}$$

(1) Lorsque l'on fait une opération entre 2 torseurs à partir de leurs composantes, ils doivent être exprimés au même point.

> **Théorème**
> L'énergie cinétique d'un solide S en mouvement dans un repère R est égale à la moitié du comoment des torseurs cinétique et cinématique.
>
> $$\boxed{E_{cS/R} = \frac{1}{2}\mathcal{C}(S/R)\odot\mathcal{V}(S/R) = \frac{1}{2}\,\vec{\sigma}_{S/R}\odot\vec{V}_{S/R}} \quad (2)(3)$$

(2) c'est le produit de 2 fonctions.

(3) L'énergie cinétique ne dépend pas du point A.

Solide en translation

Pour un solide en translation, on a donc :

$$E_{cS/R} = \frac{1}{2}\,{}_G\begin{Bmatrix} m\vec{V}_{S/R}(G) \\ \vec{0}\end{Bmatrix}\odot\begin{Bmatrix}\vec{0} \\ \vec{V}_{S/R}(G)\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}m\vec{V}_{S/R}(G)^2$$

Solide en rotation autour d'un axe immobile dans R

Pour un solide en rotation autour de l'axe immobile $(A,\vec{z})$ dans R, on a donc :

$$E_{cS/R} = \frac{1}{2}\,{}_A\begin{Bmatrix}\vec{0} \\ I_{xz}\vec{x} + I_{yz}\vec{y} + I_{zz}\vec{z}\end{Bmatrix}\odot{}_A\begin{Bmatrix}\omega\vec{z} \\ \vec{0}\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}I_{zz}\omega^2 = \frac{1}{2}J_z\omega^2$$

4.2 Système de solides indéformables

On considère que le système Σ se compose de n solides indéformables S_i en mouvement par rapport à R.

L'énergie cinétique $E_{cS/R}$ de l'ensemble du système est égale à la somme des énergies cinétiques de chacun des solides indéformables.[4]

(4) Car les solides sont disjoints, ils ne se pénètrent pas.

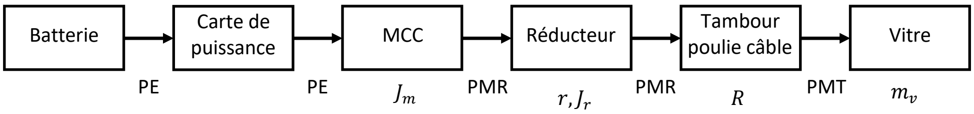
$$E_{c\Sigma/R} = \sum_{i=1}^{n} E_{ci/R} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{C}(i/R)\odot\mathcal{V}(i/R) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\vec{\sigma}_{i/R}\odot\vec{V}_{i/R}$$

4.3 Masse et moment d'inertie équivalent

Exemple : ouvrant piloté de Bugatti

On s'intéresse à la vitre d'une bugatti Chiron. La chaîne de puissance considérée est ci-dessous.

On associe un repère 0 au châssis, un repère 1 au rotor du moteur, un repère 2 à l'arbre de sortie du réducteur et au tambour, un repère 3 à la vitre.



$$\mathcal{V}(1/0) = \mathbb{V}_{1/0} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_m \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \qquad \mathcal{V}(2/0) = \mathbb{V}_{2/0} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_r \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \qquad \mathcal{V}(3/0) = \mathbb{V}_{3/0} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_v \vec{z} \end{Bmatrix}$$

avec $\omega_r = r\omega_m$ et $V_v = R\omega_r$

On isole l'ensemble des pièces en mouvement par rapport au châssis $\Sigma = \{1,2,3\}$.

$$E_{c\Sigma/0} = E_{c1/0} + E_{c2/0} + E_{c3/0}$$

1/0 et 2/0 sont des mouvements de rotation. 3/0 est un mouvement de translation.

$$E_{c\Sigma/0} = \frac{1}{2}J_m{\omega_m}^2 + \frac{1}{2}J_r{\omega_r}^2 + \frac{1}{2}m_v{V_v}^2 = \frac{1}{2}J_m{\omega_m}^2 + \frac{1}{2}J_r r^2{\omega_m}^2 + \frac{1}{2}m_v R^2 r^2{\omega_m}^2$$
$$= \frac{1}{2}(J_m + J_r r^2 + m_v R^2 r^2){\omega_m}^2 = \frac{1}{2}J_{eq}{\omega_m}^2$$

(1) J_m et mR^2r^2 sont souvent du même ordre de grandeur.

Industriellement, on dimensionne empiriquement tel que $\frac{mR^2r^2}{J_m} \leq 6$

$J_r r^2$ est souvent négligeable.

Mais on pourrait aussi écrire :

$$E_{c\Sigma/0} = \frac{1}{2}J_m{\omega_m}^2 + \frac{1}{2}J_r{\omega_r}^2 + \frac{1}{2}m_v{V_v}^2 = \frac{1}{2}\frac{J_m}{R^2r^2}{V_v}^2 + \frac{1}{2}\frac{J_r}{R^2}{V_v}^2 + \frac{1}{2}m_v{V_v}^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{J_m}{R^2r^2} + \frac{J_r}{R^2} + m_v\right){V_v}^2 = \frac{1}{2}M_{eq}{V_v}^2$$

> Le terme M_{eq} est appelé **masse équivalente** des solides en mouvement ramenée sur l'axe effecteur.
> Le terme J_{eq} est appelé **moment d'inertie équivalent** des solides en mouvement ramené sur l'axe moteur(2)(3)(4).

(2) On choisit en général de ramener sur l'actionneur.

(3) Cette inertie équivalente de tous les solides en mouvement correspond au moment d'inertie d'un solide fictif, qui, entrainé par le moteur, développerait la même énergie cinétique.

(4) La part de l'inertie équivalente due aux solides situés après le réducteur est souvent négligeable.

L'utilisation d'une inertie équivalente ou d'une masse équivalente permet d'étudier la loi de mouvement de l'une des pièces du mécanisme en tenant compte de l'intégralité de ses pièces.

5 Dynamique des solides

5.1 Principe fondamental de la dynamique

Le PFD permet d'établir une relation entre les actions mécaniques qui sont appliquées à un solide ou un ensemble de solides et les mouvements qui en résultent selon toutes les directions de l'espace.

> **Enoncé du PFD**
>
> Il existe au moins un référentiel galiléen R_g tel que pour tout ensemble matériel Σ et à chaque instant t, le **torseur dynamique** associé au mouvement de ce système par rapport à ce repère est égal au **torseur des actions mécaniques** extérieures exercées sur Σ.
>
> $$\boxed{\mathcal{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \mathcal{D}(\Sigma/R_g) \Leftrightarrow \vec{M}_{\bar{\Sigma}\rightarrow\Sigma} = \vec{\delta}_{\Sigma/R_g} \Leftrightarrow \sum_i \begin{Bmatrix} \vec{R}_{i\rightarrow\Sigma} \\ \vec{M}_{i\rightarrow\Sigma}(A) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m\vec{A}_{\Sigma/R_g}(G) \\ \vec{\delta}_{\Sigma/R_g}(A) \end{Bmatrix}}$$ (5)(6)
>
> On a 1 équation torsorielle, soit 2 équations vectorielles, soit 6 équations scalaires.
>
> **Théorème de la Résultante Dynamique (TRD)** : $\sum_i \vec{R}_{i\rightarrow\Sigma} = m\vec{A}_{\Sigma/R_g}(G)$
>
> **Théorème du Moment Dynamique (TMD)(7) au point A** : $\sum_i \vec{M}_{i\rightarrow\Sigma}(A) = \vec{\delta}_{\Sigma/R_g}(A)$

(5) C'est l'égalité de 2 fonctions.
(6) i numérote une partition de $\bar{\Sigma}$.
(7) La 2nd équation vectorielle est parfois appelée Théorème du Moment Cinétique en physique.

Le PFD est une égalité entre les quantités d'accélération et les actions mécaniques extérieures. Les 6 équations scalaires obtenues sont à mettre en relation avec les 6 ddl dans l'espace géométrique de dimension 3.

La dynamique permet la résolution de 2 types de problèmes :

- Les efforts sont connus, on détermine les mouvements et on peut dimensionner les actionneurs (moteurs, vérins, ...).
- Les mouvements sont connus, on détermine les efforts et on peut dimensionner les pièces soumises à des accélérations (bielles, suspensions, structures, ...).

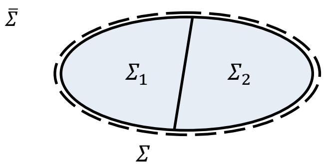
Les conséquences de ce principe sont nombreuses.

5.2 Théorème des actions réciproques

(1) On parle de partition si $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$ et $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$

(2) On pourrait aussi utiliser la notation $\mathcal{F}(\bar{1} \to 1) = \mathcal{D}(1/R_g)$

On considère un système matériel Σ dont une partition(1) est Σ_1 et Σ_2. On applique le PFD à Σ_1, Σ_2 et Σ (2).



$$\vec{M}_{\bar{1}\to 1} = \vec{\delta}_{1/R_g} \quad (1)$$

$$\vec{M}_{\bar{2}\to 2} = \vec{\delta}_{2/R_g} \quad (2)$$

$$\vec{M}_{\bar{\Sigma}\to \Sigma} = \vec{\delta}_{\Sigma/R_g} \quad (3)$$

On a

$$\vec{\delta}_{\Sigma/R_g} = \vec{\delta}_{1/R_g} + \vec{\delta}_{2/R_g}$$

$$\vec{M}_{\bar{1}\to 1} = \vec{M}_{2\to 1} + \vec{M}_{\bar{\Sigma}\to 1}$$

$$\vec{M}_{\bar{2}\to 2} = \vec{M}_{1\to 2} + \vec{M}_{\bar{\Sigma}\to 2}$$

$$\vec{M}_{\bar{\Sigma}\to \Sigma} = \vec{M}_{\bar{\Sigma}\to 1} + \vec{M}_{\bar{\Sigma}\to 2}$$

En faisant $(1) + (2) - (3)$, on démontre :

Théorème des actions réciproques

Soient 2 systèmes matériels quelconques Σ_1 et Σ_2 disjoints. Le torseur des actions mécaniques exercées par $1 \to 2$ est l'opposé du torseur des actions mécaniques exercées par $2 \to 1$.

(3) $\mathcal{F}(1 \to 2) = -\mathcal{F}(2 \to 1)$

$$\vec{M}_{1\to 2} = -\vec{M}_{2\to 1} \quad (3) \quad \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_{1\to 2} \\ \vec{M}_{1\to 2}(A) \end{cases} = -\begin{cases} \vec{R}_{2\to 1} \\ \vec{M}_{2\to 1}(A) \end{cases}$$

5.3 Théorèmes de l'équilibre

On appelle **équilibre** un mouvement nul.

(4) Appelé parfois Principe Fondamental de la Statique (PFS) si on n'a pas admis un principe plus général avant.

(5) La réciproque est fausse.

(6) $\forall t \ \sum_i \mathcal{F}(i \to S) = \mathcal{O}$

La fonction torsorielle nulle pourrait se noter $\vec{0}$.

Théorème de l'équilibre(4)(5) (TDLE) :

Si un solide S est à **l'équilibre** par rapport à un **référentiel Galiléen** alors la somme des torseurs des **actions mécaniques** du milieu extérieur sur S est **nulle**.

$$\forall t, \forall P \quad \vec{V}_{S/R_g}(P) = \vec{0} \quad \Rightarrow \forall t \ \sum_i \ \vec{M}_{i\to S} = 0 \quad (6)$$

$$\Rightarrow \sum_i \begin{cases} \vec{R}_{i\to S} \\ \vec{M}_{i\to S}(A) \end{cases} = {}_A\begin{cases} \vec{0} \\ \vec{0} \end{cases}$$

L'équation torsorielle ci-dessus conduit donc à l'écriture de **2 équations vectorielles** :

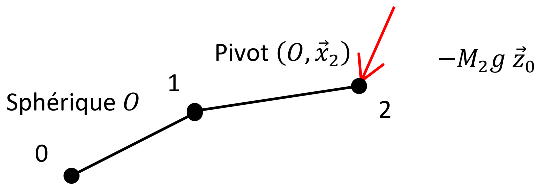
Théorème de la Résultante Statique (TRS) : $\sum_i \vec{R}_{i\to S} = \vec{0}$

Théorème du Moment Statique (TMS) au point A : $\sum_i \vec{M}_{i\to S}(A) = \vec{0}$

(7) $\mathcal{D}(S \to R_g) = \mathcal{O}$

Si $\vec{V}$ est un champ uniforme et constant, alors : $\vec{\delta}_{S/R_g} = 0$ (7)

Question 4 : Tracer le graphe de structure du gyroscope



Question 5 : Indiquer et justifier une démarche de résolution.

On cherche à appliquer le PFD à Σ en O. Car le point O est un point de vitesse nulle dans 1/0 et 2/0.

Question 6 : Lister les AM extérieures à Σ.

On isole Σ.

On fait le BAME :

On néglige l'action de pesanteur sur 1.

$$\mathcal{F}_{0\to1} = \vec{M}_{0\to1} = {}_{O}\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{0\to1}\\ \vec{0}\end{matrix}\right.$$

$$\mathcal{F}_{t\to2} = \vec{M}_{t\to2} = {}_{G_2}\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{t\to2}\\ \vec{0}\end{matrix}\right. = {}_{O}\left\{\begin{matrix}-m_2 g\,\vec{z}_0\\ m_2 g\,L\cos\beta\,\vec{y}_1\end{matrix}\right.$$

$$\vec{M}_{t\to2}(O) = \vec{M}_{t\to2}(G_2) + \overrightarrow{OG_2} \wedge -m_2 g\,\vec{z}_0 = L\vec{x}_1 \wedge -m_2 g\,\vec{z}_0 = m_2 g\,L\cos\beta\,\vec{y}_1$$

Question 7 : Calculer le moment dynamique de Σ/0.

$$\vec{\delta}_{\Sigma/0}(O) = \vec{\delta}_{1/0}(O) + \vec{\delta}_{2/0}(O)$$

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha}\vec{z}_0 + \dot{\beta}\vec{y}_1 = -\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_1 + \dot{\beta}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_1$$

On veut que $\bar{\bar{I}}_{O,1}$ et $\vec{\Omega}_{1/0}$ soient exprimées dans B_1

$$\vec{\sigma}_{1/0}(O) = \bar{\bar{I}}_{O,1}.\vec{\Omega}_{1/0} + \overrightarrow{OG_1} \wedge m\vec{V}_{1/0}(O) = \bar{\bar{I}}_{O,1}.\vec{\Omega}_{1/0}$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & B_1 & 0\\ 0 & 0 & B_1\end{pmatrix}_{(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} \begin{pmatrix}-\dot{\alpha}\sin\beta\\ \dot{\beta}\\ \dot{\alpha}\cos\beta\end{pmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} \approx \vec{0}$$

$$\vec{\delta}_{1/0}(O) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{1/0}(O)\right]_0 + \vec{V}_{/0}(\mathrm{O}) \wedge \mathrm{m}\vec{V}_{1/0}(G_1) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{1/0}(O)\right]_0 \approx \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}_{2/0} = (\dot{\gamma} - \dot{\alpha}\sin\beta)\vec{x}_1 + \dot{\beta}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_1$$

$$\vec{\sigma}_{2/0}(O) = \bar{\bar{I}}_{O,2}.\vec{\Omega}_{2/0} + \overrightarrow{OG_2} \wedge m\vec{V}_{2/0}(O) = \bar{\bar{I}}_{O,2}.\vec{\Omega}_{2/0}$$

$$= \begin{pmatrix}A_2 & 0 & 0\\ 0 & B_2 & 0\\ 0 & 0 & B_2\end{pmatrix}_{(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} \begin{pmatrix}\dot{\gamma} - \dot{\alpha}\sin\beta\\ \dot{\beta}\\ \dot{\alpha}\cos\beta\end{pmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} \approx A_2(\dot{\gamma} - \dot{\alpha}\sin\beta)\vec{x}_1$$

$$\vec{\delta}_{2/0}(O) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{2/0}(O)\right]_0 + \vec{V}_{/0}(O) \wedge \mathrm{m}\vec{V}_{2/0}(G_2) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_{2/0}(O)\right]_0 = \frac{d}{dt}\left[A_2(\dot{\gamma} - \dot{\alpha}\sin\beta)\vec{x}_1\right]_0$$

$$= A_2(\ddot{\gamma} - \ddot{\alpha}\sin\beta - \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta)\vec{x}_1 + A_2(\dot{\gamma} - \dot{\alpha}\sin\beta)\frac{d}{dt}[\vec{x}_1]_0$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{x}_1]_0 = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x}_1 = \left((\dot{\gamma} - \dot{\alpha}\sin\beta)\vec{x}_1 + \dot{\beta}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_1\right) \wedge \vec{x}_1 = \dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{y}_1 - \dot{\beta}\vec{z}_1$$

$$= A_2(\ddot{\gamma} - \ddot{\alpha}\sin\beta - \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta)\vec{x}_1 + A_2(\dot{\gamma} - \dot{\alpha}\sin\beta)\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{y}_1 - A_2(\dot{\gamma} - \dot{\alpha}\sin\beta)\dot{\beta}\vec{z}_1$$

Question 8 : Sans résoudre les équations du mouvement, déterminer la direction principale du mouvement 1/0.

On applique le PFD à Σ en O.

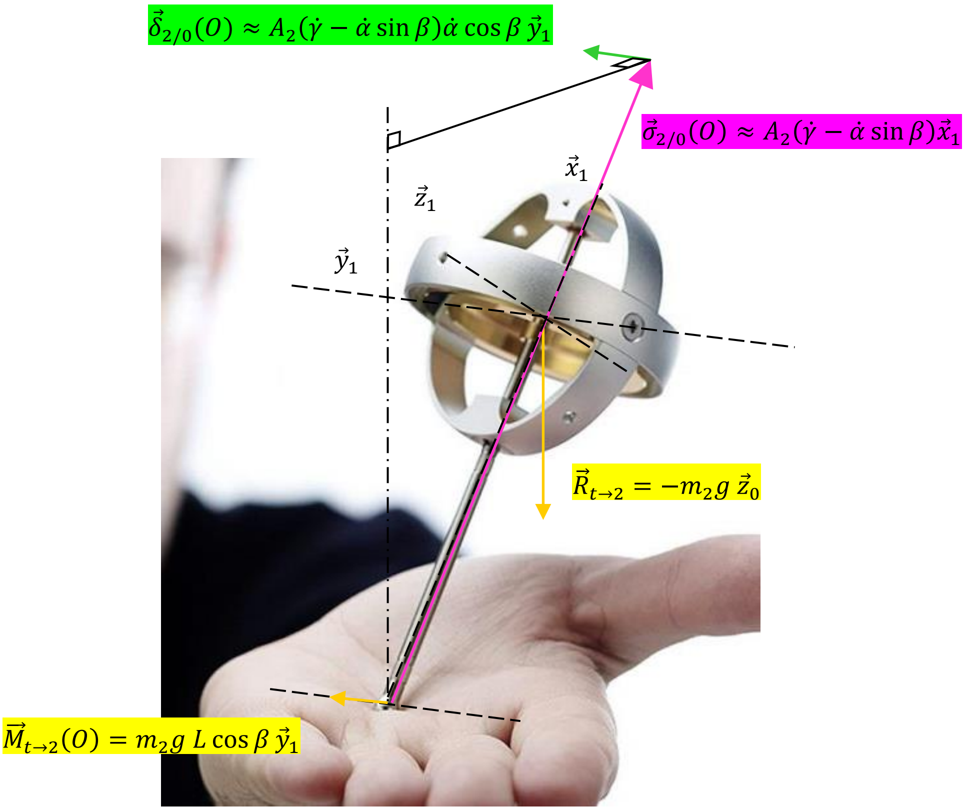
$$\vec{M}_{0\to 2}(O) + \vec{M}_{t\to 2}(O) = \vec{\delta}_{2/0}(O)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 g\, L\cos\beta \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} = \begin{pmatrix} A_2\left(\ddot{\gamma} - \ddot{\alpha}\sin\beta - \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta\right) \\ A_2(\dot{\gamma} - \dot{\alpha}\sin\beta)\dot{\alpha}\cos\beta \\ -A_2(\dot{\gamma} - \dot{\alpha}\sin\beta)\dot{\beta} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$$

La composante selon $\vec{y}_1$ est la plus importante car la vitesse de rotation $\dot{\gamma} = 12000\ tr/min$ est très importante.

On pourrait tracer $\alpha(t)$ et $\gamma(t)$ avec une intégration numérique.

Question 9 : Dessiner les différents vecteurs $\vec{R}_{t\to 2}, \vec{M}_{t\to 2}(O), \vec{\sigma}_{2/0}(O), \vec{\delta}_{2/0}(O)$ sur la photo.



La variation du moment cinétique est donc quasi uniquement dans le même sens que le moment du poids ! Donc le gyroscope tourne dans votre main et ne tombe pas !
Tout comme il est difficile de modifier un mouvement de translation qui va vite, il est difficile de modifier un mouvement de rotation qui va vite !

5.4 Equilibrage

Une application du PFD est l'équilibrage d'un solide en rotation autour d'un axe fixe. Lorsqu'un solide possède une mauvaise répartition de matière autour de cet axe, des forces tournantes indésirables provoquent des vibrations nuisibles.

Un solide en rotation non verticale est équilibré statiquement (à l'arrêt) si quelle que soit sa position angulaire, il ne se met pas à tourner sous l'effet de son poids.

Un solide en rotation est équilibré dynamiquement si les actions mécaniques transmises dans les liaisons entre le rotor et le bâti sont indépendantes de la position angulaire du rotor quel que soit le mouvement de rotation du rotor.

Un solide est dit **équilibré** lors de sa rotation autour d'un axe fixe si et seulement si :

Equilibrage statique :

- Son centre de masse est sur l'axe de rotation.

Equilibrage dynamique :

- Son centre de masse est sur l'axe de rotation(1).
- L'axe de rotation est un axe principal d'inertie.

Equilibreuse de roue

(1) Si un solide est équilibré dynamiquement alors il est équilibré statiquement.

6 Puissance

6.1 Puissance d'une action mécanique

On appelle puissance de l'action mécanique $2 \rightarrow 1$ dans le mouvement $1/R$ la quantité scalaire somme des puissances élémentaires développées au niveau de chacun des points du solide considéré S_1.

$$P_{2\rightarrow 1/R} = \int_{S_1} \vec{f}_{2\rightarrow 1}(P).\vec{V}_{1/R}(P)dm \quad ^{(2)(3)}$$

Son unité est le Watt [W].

(2) On note $P_{2\rightarrow 1,1/R} = P_{2\rightarrow 1/R}$

(3) La puissance dépend du repère dans lequel elle est calculée.

Pour un solide indéformable, le champ $\vec{V}_{1/R}$ est équiprojectif, on a donc :

$$\int_{S_1} \vec{f}_{2\rightarrow 1}(P).\vec{V}_{1/R}(P)dm = \int_{S_1} \vec{f}_{2\rightarrow 1}(P).\vec{V}_{1/R}(A)dm + \int_{S_1} \vec{f}_{2\rightarrow 1}(P).\overrightarrow{PA}\wedge\vec{\Omega}_{1/R}dm$$

$$= \int_{S_1} \vec{f}_{2\rightarrow 1}(P)dm\,.\vec{V}_{1/R}(A) + \int_{S_1} \vec{\Omega}_{1/R}.\left(\overrightarrow{AP}\wedge\vec{f}_{2\rightarrow 1}(P)\right)dm$$

$$= \vec{F}_{2\rightarrow 1}.\vec{V}_{1/R}(A) + \vec{\Omega}_{1/R}.\int_{S_1}\left(\overrightarrow{AP}\wedge\vec{f}_{2\rightarrow 1}(P)\right)dm$$

$$= \vec{F}_{2\rightarrow 1}.\vec{V}_{1/R}(A) + \vec{\Omega}_{1/R}.\vec{M}_{2\rightarrow 1}(A) = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{2\rightarrow 1} \\ \vec{M}_{2\rightarrow 1}(A) \end{Bmatrix} \odot \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{1/R} \\ \vec{V}_{1/R}(A) \end{Bmatrix} = \vec{M}_{2\rightarrow 1}\odot\vec{V}_{1/R}$$

On appelle **puissance** de l'action mécanique $2 \rightarrow 1$ dans le mouvement $1/R$ la quantité scalaire obtenue par comoment du torseur associé à l'action mécanique $2 \rightarrow 1$ et du torseur cinématique associé au mouvement $1/R$.

$$\boxed{P_{2\rightarrow 1/R} = \vec{M}_{2\rightarrow 1}\odot\vec{V}_{1/R}} \quad ^{(4)}$$

(4) Si $P_{...} > 0$, on parle d'action motrice, sinon d'action résistante.

$P(2 \rightarrow 1/R)$
$= \mathcal{F}(2 \rightarrow 1)\odot\mathcal{V}(1/R)$

On parle de **puissance galiléenne** lorsque le mouvement est exprimé par rapport à R_g.

6.2 Puissance des interefforts

Soit 2 solides indéformables S_1 et S_2.

(1) $P(1 \leftrightarrow 2)$
$= \mathcal{F}(1 \to 2) \odot \mathcal{V}(2/1)$
$= \mathcal{F}(2 \to 1) \odot \mathcal{V}(1/2)$

On appelle **puissance des interefforts** la puissance de l'action mécanique d'un solide 1 sur un solide 2 dans leur mouvement relatif 2/1.

$$\boxed{P_{1\leftrightarrow 2} = \vec{M}_{1\to 2} \odot \vec{V}_{2/1} = \vec{M}_{2\to 1} \odot \vec{V}_{1/2}} \quad (1)$$

Elle ne dépend pas du repère.

6.3 Rendement

On définit le rendement d'un système comme étant $\eta = \left|\frac{P_s}{P_e}\right|$.

La puissance dissipée est donc de $P_{dis} = (1-\eta)P_e$

Exemple en régime permanent :

$$P_e \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow \begin{cases} P_s = \eta P_e \\ P_{dis} = (1-\eta)P_e \end{cases}$$

6.4 Puissance des interefforts de liaison

Si la puissance dissipée au niveau d'une liaison est nulle alors

$$P_{1\leftrightarrow 2} = 0 \Leftrightarrow \vec{M}_{1\to 2} \odot \vec{V}_{1/R} = 0 \quad (2)$$

(2) Les torseurs des actions mécaniques transmissibles et cinématiques d'une liaison parfaite ont une forme duale.
$P(1 \leftrightarrow 2) =$
$\mathcal{F}(1 \to 2) \odot \mathcal{V}(2/1) = \mathcal{O}$

Si une **liaison** est **parfaite** alors le mouvement est sans pertes $P_{1\leftrightarrow 2} = 0$.

Si on néglige le frottement dans un contact par glissement, on a un modèle de liaison parfaite.
Si on néglige la résistance au roulement dans un contact par roulement, on a un modèle de liaison parfaite.

7 Théorème de la puissance cinétique

Le TPC(3) permet de déterminer l'équation du mouvement. Elle est déduite du PFD, ce n'est pas une équation supplémentaire.

(3) Parfois abusivement appelé Théorème de l'Energie Cinétique (TEC).

Il est pertinent d'utiliser le TPC lorsque l'on étudie un système ayant une seule mobilité utile.

Contrairement au PFD, une action mécanique qui ne travaille pas ne peut pas être déterminée avec le TPC.

7.1 1 solide

Pour un solide indéformable unique S, la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique galiléenne est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures qui lui sont appliquées.

$$\frac{dE_{c\,S/R_g}}{dt} = P_{\bar{S}\to S/R_g} = \vec{M}_{\bar{S}\to S} \odot \vec{V}_{S/R_g} \quad (4)$$

(4) Parfois abusivement appelé Théorème de l'Energie Cinétique (TEC).
$P(\bar{S} \to S/R_g)$
$= \mathcal{F}(\bar{S} \to S) \odot \mathcal{V}(S/R_g)$

Démonstration

Soit un solide indéformable S en mouvement dans un référentiel galiléen.

$$\vec{M}_{\bar{S}\to S} = \vec{\delta}_{S/R_g}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_{\bar{S}\to S} \odot \vec{V}_{S/R_g} = \vec{\delta}_{S/R_g} \odot \vec{V}_{S/R_g}$$

Soit A un point quelconque et P un point courant.

$$\Rightarrow \vec{M}_{\bar{S}\to S} \odot \vec{V}_{S/R_g} = {}_A\begin{cases} \int_S \vec{A}_{S/R_g}(P)dm \\ \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{A}_{S/R_g}(P)dm \end{cases} \odot {}_A\begin{cases} \vec{\Omega}_{S/R_g} \\ \vec{V}_{S/R_g}(A) \end{cases}$$

$$= \vec{V}_{S/R_g}(A).\int_S \vec{A}_{S/R_g}(P)dm + \vec{\Omega}_{S/R_g}.\int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{A}_{S/R_g}(P)dm$$

Or $\vec{V}_{S/R_g}(A) = \vec{V}_{S/R_g}(P) + \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_g}$

$$= \vec{V}_{S/R_g}(P).\int_S \vec{A}_{S/R_g}(P)dm + \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_g}.\int_S \vec{A}_{S/R_g}(P)dm + \vec{\Omega}_{S/R_g}.\int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{A}_{S/R_g}(P)dm$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale, on peut écrire le produit mixte :

$$= \vec{V}_{S/R_g}(P).\int_S \vec{A}_{S/R_g}(P)dm + \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_g}.\vec{A}_{S/R_g}(P)dm + \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{A}_{S/R_g}(P).\vec{\Omega}_{S/R_g}dm$$

$$= \vec{V}_{S/R_g}(P).\int_S \vec{A}_{S/R_g}(P)dm - \int_S \cancel{\overrightarrow{AP} \wedge \vec{A}_{S/R_g}(P).\vec{\Omega}_{S/R_g}}dm + \int_S \cancel{\overrightarrow{AP} \wedge \vec{A}_{S/R_g}(P).\vec{\Omega}_{S/R_g}}dm$$

$$= \int_S \vec{V}_{S/R_g}(P).\vec{A}_{S/R_g}(P)dm$$

$$= \int_S \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{V}_{S/R_g}(P)^2\right)dm$$

$$= \frac{d}{dt}\int_S \left(\frac{1}{2}\vec{V}_{S/R_g}(P)^2\right)dm$$

$$= \frac{dE_{c\,S/R_g}}{dt}$$

On en déduit l'expression du théorème de l'énergie cinétique dans le cas d'un solide indéformable.

$$\Rightarrow \vec{M}_{\bar{S}\to S} \odot \vec{V}_{S/R_g} = \frac{dE_{c\,S/R_g}}{dt}$$

La dérivée de l'énergie cinétique est le comoment du champ des moments et du champ des vitesses.

7.2 2 solides

Pour un système matériel Σ formé de 2 solides indéformables 1 et 2, la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique galiléenne est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à ce système et de la puissance des interefforts entre 1 et 2.

$$\frac{dE_{c\,\Sigma/R_g}}{dt} = P_{\bar{\Sigma}\to\Sigma/R_g} + P_{1\leftrightarrow 2}$$

Démonstration

Soit Σ un système matériel formé de 2 solides indéformables 1 et 2, avec $\Sigma = 1 \cup 2$ et $1 \cap 2 = \emptyset$.

$$\frac{dE_{c\,\Sigma/R_g}}{dt} = \frac{dE_{c\,1/R_g}}{dt} + \frac{dE_{c\,2/R_g}}{dt}$$

En appliquant le TPC à chaque solide :

$$\frac{dE_{c\,1/R_g}}{dt} = P_{\bar{1}\to 1/R_g} = P_{\bar{\Sigma}\to 1/R_g} + P_{2\to 1/R_g}$$
$$\frac{dE_{c\,2/R_g}}{dt} = P_{\bar{2}\to 2/R_g} = P_{\bar{\Sigma}\to 2/R_g} + P_{1\to 2/R_g}$$

En sommant

$$\frac{dE_{c\ \Sigma/R_g}}{dt} = P_{\bar{\Sigma}\to 1/R_g} + P_{\bar{\Sigma}\to 2/R_g} + P_{2\to 1/R_g} + P_{1\to 2/R_g} = P_{\bar{\Sigma}\to \Sigma/R_g} + P_{1\leftrightarrow 2}$$

Car

$$P_{2\to 1/R_g} + P_{1\to 2/R_g} = \vec{M}_{2\to 1}\odot\vec{V}_{1/R_g} + \vec{M}_{1\to 2}\odot\vec{V}_{2/R_g} = \vec{M}_{2\to 1}\odot\left(\vec{V}_{1/R_g} - \vec{V}_{2/R_g}\right) = \vec{M}_{2\to 1}\odot\vec{V}_{1/2} = P_{1\leftrightarrow 2}$$

7.3 n solides

Pour un système matériel Σ formé de n solides indéformables, la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique galiléenne est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à ce système et de la puissance des interefforts.

$$\boxed{\frac{dE_{c\ \Sigma/\mathrm{R}_g}}{dt} = \underbrace{P_{\bar{\Sigma}\to\Sigma/\mathrm{R}_g}}_{P_{ext}} + \underbrace{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} P_{\mathrm{S_i}\leftrightarrow \mathrm{S_j}}}_{P_{int}}}$$ (1)

(1) Par exemple pour $n = 3 : P_{int} = P_{S_1\leftrightarrow S_2} + P_{S_1\leftrightarrow S_3} + P_{S_2\leftrightarrow S_3}$

ANNEXE

Applications

$A \rightarrow f(A)$: champ scalaire	ex : champ de pressions $A \rightarrow P(A)$
$A \rightarrow \vec{f}(A)$: champ vectoriel	ex : champ de vitesses $A \rightarrow \vec{V}(A)$
$A \rightarrow \bar{\bar{f}}(A)$: champ tensoriel	ex : champ tensoriel $A \rightarrow \bar{\bar{I}}(A)$
$\vec{u} \rightarrow f(\vec{u})$: opérateur scalaire = forme	ex : produit scalaire
$\vec{u} \rightarrow \vec{f}(\vec{u})$: opérateur vectoriel	ex : produit vectoriel

Notations

$$\bar{\bar{I}}_{A,S} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = I_{11}\vec{x}\otimes\vec{x} + I_{12}\vec{x}\otimes\vec{y} + I_{21}\vec{y}\otimes\vec{x} + I_{22}\vec{y}\otimes\vec{y} + I_{33}\vec{z}\otimes\vec{z}$$

$\otimes$ est le produit tensoriel à ne pas confondre avec le comoment $\odot$ ou $\times$.

QUESTIONS DE COURS

Donner les relations qui permettent de déterminer la position du centre de masse.
Donner la définition d'un moment d'inertie par rapport à un axe, ainsi que son unité.
Exprimer les différents éléments d'une matrice d'inertie.
Donner la notion de base principale d'inertie.
Donner les simplifications d'une matrice d'inertie qu'impose :

- un ou plusieurs plans de symétrie ;
- un axe de révolution ;
- une dimension négligeable devant les deux autres.

Donner le théorème d'Huygens.
Donner l'expression des résultantes cinétique et dynamique.
Donner l'expression des moments cinétique et dynamique dans les 2 cas particuliers (au centre de gravité G et en un point fixe du référentiel galiléen).
Donner les méthodes pour déterminer les moments cinétique et dynamique.

Donner l'expression du PFD.
Donner la méthode pour déterminer une équation différentielle de mouvement ou une loi de commande en effort.

Expliquer la différence entre énergie et puissance. Donner la relation mathématique qui les relie.
Donner l'expression du théorème de l'énergie cinétique appliqué à un ensemble de solides.
Quel est l'ensemble de solides à isoler pour utiliser ce théorème ?
Donner l'expression de l'énergie cinétique appliqué à un solide, puis à un ensemble de solides.
Donner les différents cas de son expression.
Comment détermine-t-on l'inertie équivalente ou la masse équivalente de tous les solides en mouvement ?
Donner l'expression de la puissance des actions mécaniques extérieures à un solide, puis à un ensemble de solides.
Donner l'expression de la puissance des actions mécaniques intérieures à un ensemble de solides.
Déterminer les puissances des actions de liaisons lors de frottements sec et fluide.
Donner l'expression de la puissance dissipée en fonction du rendement.

Qu’appelle-t-on équilibrage statique et équilibrage dynamique.

Comment équilibrer un solide en rotation autour d’un axe fixe.