

# Sciences industrielles

CPGE 2<sup>nd</sup> année



Dynamique et énergétique des  
systèmes de solides indéformables



## Sommaire

<b>1 Contexte</b>	<b>3</b>
1.1 Gyroscope de précision de Dr Nozman (feat Squeezie)	3
1.2 Modèle cinématique	3
<b>2 Inertie</b>	<b>4</b>
2.1 Masse	4
2.2 Moment d'inertie	4
Mécanique du point	4
Définition scalaire	4
Changement d'axe de rotation	5
2.3 Opérateur d'inertie	5
Définition vectorielle d'un moment d'inertie	5
Matrice associée à l'opérateur d'inertie	5
Axes principaux d'inertie	6
Changement de point	6
Solides de formes élémentaires	6
<b>3 Quantité de vitesse et quantité d'accélération</b>	<b>9</b>
Mécanique du point	9
3.1 Torseur cinétique	9
3.2 Torseur dynamique	10
Du torseur cinétique au torseur dynamique	10
3.3 Système de solides indéformables	11
3.4 Méthodologie	11
Cas particulier	12
<b>4 Energie cinétique</b>	<b>12</b>
Mécanique du point	12
4.1 Expression générale	12
Solide en translation	13
Solide en rotation autour d'un axe immobile dans R	13
4.2 Système de solides indéformables	13
4.3 Masse et moment d'inertie équivalent	14
<b>5 Dynamique des solides</b>	<b>14</b>
5.1 Principe fondamental de la dynamique	14
5.2 Théorème des actions réciproques	15
5.3 Théorèmes de l'équilibre	15
5.4 Equilibrage	17
<b>6 Puissance</b>	<b>18</b>
6.1 Puissance d'une action mécanique	18
6.2 Puissance des interefforts	18
6.3 Rendement	18
6.4 Puissance des interefforts de liaison	19
<b>7 Théorème de la puissance cinétique</b>	<b>19</b>
7.1 1 solide	19
7.2 2 solides	20
7.3 n solides	20
<b>ANNEXE</b>	<b>21</b>
Applications	21
Notations	21
<b>QUESTIONS DE COURS</b>	<b>21</b>

La dynamique des solides permet de prédire ou d'expliquer les mouvements à parti de leurs causes. Il est important de connaître les situations élémentaires pour comprendre et interpréter les résultats issus de logiciels de calculs plus complexes.

La **cinétique** est l'étude de la répartition des masses.

La **dynamique** est l'étude des mouvements et de leurs causes.

domaine	grandeurs physiques
géométrie	[longueur] et [angle]
cinématique	[longueur], [angle] et [temps]
statique	[longueur], [angle] et [masse]
cinétique	[longueur], [angle], [temps] et [masse]
dynamique	[longueur], [angle], [temps] et [masse]

## 1 Contexte

### 1.1 Gyroscopie de précision de Dr Nozman (feat Squeezeie)

(1)  
<https://youtu.be/hqjcPnl5qF4>

Dans une vidéo de sa chaîne<sup>(1)</sup>, Dr Nozman expose à Squeezeie un gyroscopie qui a la particularité d'être monté au bout d'une tige et de rester un certain temps vertical.



A l'aide de ce chapitre, nous allons calculer la matrice d'inertie, le moment cinétique puis le moment dynamique du gyroscopie et expliquer son mouvement.

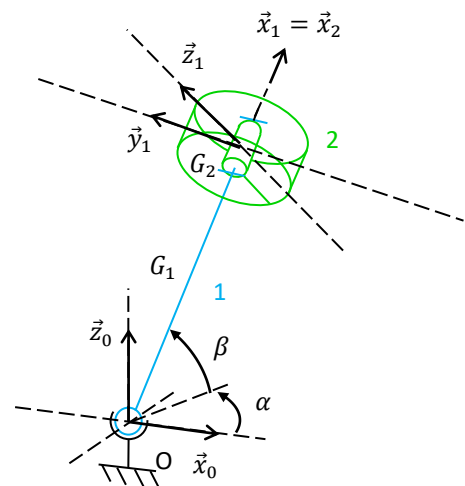
### 1.2 Modèle cinématique

On associe un repère  $R_i = (O, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ , à chaque solide  $i$ , avec  $i \in \{0,1,2\}$ .  $R_0$  est Galiléen.

La **tige 1** est un cylindre homogène de masse  $M_1$  négligeable, de centre d'inertie  $G_1$ , tel que  $\overrightarrow{OG_1} = \frac{L}{2} \vec{x}_1$  avec un angle de **précession**  $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$  autour de  $\vec{z}_0$  et de **nutation**  $\beta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$  autour de  $\vec{y}_0 = \vec{y}_1$ .

Le **disque 2** est un cylindre homogène de masse  $M_2$ , de hauteur  $h$  et de rayon  $R$ , de centre d'inertie  $G_2$ , tel que  $\overrightarrow{OG_2} = L \vec{x}_1$  avec un angle de **rotation propre** tel que  $\gamma = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$  autour de  $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ .

On note  $\Sigma = \{1,2\}$ .



## 2 Inertie

L'**inertie** est la **résistance** qu'un corps oppose au changement de son **mouvement**.

Maîtriser les inerties des solides en mouvement dans un mécanisme est intéressant car il existe un lien direct entre ces dernières et les actions mécaniques qui permettent de faire varier les mouvements.

### 2.1 Masse

On appelle **système matériel**, un ensemble de particules caractérisées par une certaine quantité de matière.

On appelle **masse** d'un système matériel la grandeur scalaire positive représentative de sa quantité de matière.

La **masse** est l'inertie en **translation**.

Un **système à masse conservative**<sup>(1)</sup> est un système dont la masse ne varie pas au cours du temps.

On appelle **centre de masse**, ou **centre d'inertie**, ou **centre de gravité**<sup>(2)</sup> d'un système matériel  $\Sigma$ , le point G tel que :  $\int_{\Sigma} \overrightarrow{GP} dm = 0$

A partir d'un point quelconque :  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \int_{\Sigma} \overrightarrow{AP} dm$

**Relation du barycentre** pour des systèmes disjoints :

$$m\overrightarrow{AG} = m_1\overrightarrow{AG}_1 + m_2\overrightarrow{AG}_2$$

Méthodologie pour déterminer la position de G :

1. Identifier les symétries ;
2. Décomposer le solide S en volumes élémentaires ;
3. Utiliser la relation du barycentre.

### 2.2 Moment d'inertie

La masse m ne permet pas à elle seule de caractériser la difficulté de mettre un solide en mouvement de rotation ou de l'en empêcher. On a besoin de connaître la façon dont cette masse est répartie par rapport à l'axe de rotation.

Le **moment d'inertie** est l'inertie en **rotation**.

#### Mécanique du point

**Exemple** : Energie cinétique dans la mécanique du point

Pour un mouvement de translation :  $E_c = \frac{1}{2} mV^2$  Pour un mouvement de rotation :  $E_c = \frac{1}{2} mR^2 \omega^2$

#### Définition scalaire

On appelle **moment d'inertie** d'un solide **par rapport à un axe**  $\Delta = (A, \vec{u})$  la somme des masses élémentaires multipliées par le carré de la distance du point courant à cet axe :

$$I_{\Delta, S} = I_{(A, \vec{u}), S} = \int_S r^2 dm = \int_S r^2 \rho dV \quad (3)$$

Son unité est  $[kg \cdot m^2]$

Le moment d'inertie caractérise la distribution de la masse d'un solide autour d'une droite.

Pour une même masse globale, plus la matière est éloignée de l'axe, plus le moment d'inertie est grand, et plus il sera difficile de mettre le solide en mouvement de rotation autour de cet axe, ou de l'arrêter.

(1) En mécanique Newtonienne, la masse est indépendante de l'énergie. C'est le principe de conservation de la masse.

(2) Pour un satellite, le moment de la gravité au centre de gravité n'est pas forcément nul car le champ de gravité n'est pas uniforme.

(3) La répartition de la masse par rapport à l'axe de rotation, intervient au carré dans la grandeur d'inertie.

Il est positif.

**Question 1 :** Déterminer le moment d'inertie du disque 2 du gyroscope, modélisé par un cylindre, de centre G, rayon R, axe (O,  $\vec{x}_1$ ) et hauteur h.

$$A_2 = I_{xx} = I_{(G, \vec{x}_1), S} = \int_S r^2 dm = \int_S r^2 \rho dV = \rho \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=0}^{z=h} r^2 r dr d\theta dz = 2\pi \rho h \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R = 2\pi \frac{m}{\pi h R^2} L \frac{R^4}{4} = m \frac{R^2}{2}$$

**Changement d'axe de rotation**

**Théorème de Huygens**

Soit un solide indéformable S de masse m et de centre de masse G.

Soit  $\Delta = (A, \vec{u})$  une droite de ce solide S et soit d la distance au point G à cet axe.

Le moment d'inertie d'un solide autour d'un axe  $\Delta$  qui ne passe pas par G est égale au moment d'inertie d'un axe parallèle au premier passant par G augmenté de  $md^2$ .

$$I_{(A, \vec{u}), S} = I_{(G, \vec{u}), S} + md^2$$

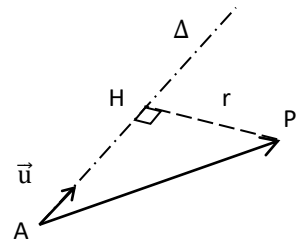
Le moment d'inertie par rapport à un axe de direction  $\vec{u}$  est minimum<sup>(1)</sup> quand l'axe passe par G.

(1)  $I_{(A, \vec{u}), S} \geq I_{(G, \vec{u}), S}$

**2.3 Opérateur d'inertie**

**Définition vectorielle d'un moment d'inertie**

$$I_{\Delta, S} = I_{(A, \vec{u}), S} = \int_S r^2 dm = \int_S HP^2 dm = \int_S (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP})^2 dm$$



On reconnait un produit mixte<sup>(2)</sup>, on peut faire une permutation

(2)  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u})$

circulaire.  $I_{\Delta, S} = \int_S (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}) \cdot (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}) dm = \vec{u} \cdot \int_S \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}) dm$

Soit un solide indéformable S et un point quelconque A de ce solide.

On appelle **opérateur d'inertie<sup>(3)</sup> au point A du solide S** l'application vectorielle :

$$\vec{I}_{A, S} : E \rightarrow E$$

$$\vec{u} \mapsto \vec{I}_{A, S}(\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}) dm$$

L'opérateur est linéaire donc représentable par une matrice.

**Matrice associée à l'opérateur d'inertie**

En notant  $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ , l'opérateur  $\overrightarrow{AP} \wedge$  s'écrit :  $\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$  <sup>(4)</sup>

L'opérateur  $\overrightarrow{AP} \wedge (\overrightarrow{AP} \wedge)$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(y^2 + z^2) & xy & xz \\ yx & -(z^2 + x^2) & yz \\ zx & zy & -(x^2 + y^2) \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

La matrice dans la base orthonormée  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  de l'opérateur d'inertie<sup>(5)(6)</sup> en A du solide S est donc :

$$\vec{I}_{A, S} = \left( \vec{I}_{A, S}(\vec{x}), \vec{I}_{A, S}(\vec{y}), \vec{I}_{A, S}(\vec{z}) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \int_S (y^2 + z^2) dm & -\int_S xy dm & -\int_S xz dm \\ -\int_S xy dm & \int_S (z^2 + x^2) dm & -\int_S yz dm \\ -\int_S xz dm & -\int_S yz dm & \int_S (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix}_{(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

(3) On peut voir cet opérateur comme une description de la répartition des masses dans le solide.

(4) La matrice d'un opérateur antisymétrique est aussi antisymétrique dans une base orthonormée.

(5) On remarque qu'en cylindrique

$$I_{(A, \vec{x}), S} = I_{xx} = \int_S (y^2 + z^2) dm = \int_S r^2 dm$$

(6) La matrice d'inertie est donnée dans les sujets d'écrit des concours, mais elle peut être à rechercher dans SolidWorks aux oraux de TP.

(1)

$$I_{xx} = \vec{x} \cdot \bar{I}_{A,S} \cdot \vec{x} = I_{(A,\vec{x}),S}$$

$$I_{xy} = \vec{x} \cdot \bar{I}_{A,S} \cdot \vec{y}$$

Pour calculer les moments d'inerties, soit on le calcule directement, soit on calcule la trace de la matrice

Trace( $\bar{I}_{A,S}$ ) = A + B + C qui est souvent plus simple avec les symétries.

(2) Ils créent des effets de balourd.

(3) Lorsque la matrice est diagonalisée dans sa base propre d'inertie, le solide est dynamiquement équilibré. Un mouvement de rotation autour de ces axes propres se fait sans aucune vibration.

$$= \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad (1)$$

La matrice d'inertie permet de synthétiser les caractéristiques d'inertie d'un solide et de calculer sa dynamique autour des différents axes.

**A, B, C** sont les **moments d'inertie** en  $[kg \cdot m^2]$ . Ils traduisent la répartition de la masse autour des différents axes.

**D, E, F** sont les **produits d'inertie**<sup>(2)</sup> en  $[kg \cdot m^2]$ . Ils traduisent une asymétrie dans la répartition de la masse.

### Axes principaux d'inertie

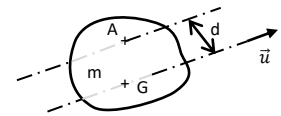
Cette matrice de l'opérateur d'inertie, ou du tenseur d'inertie, est symétrique réelle **donc toujours diagonalisable**<sup>(3)</sup>. Il y a donc 3 valeurs propres réelles et 3 vecteurs propres orthogonaux.

Les 3 valeurs propres sont appelées les **moments d'inertie principaux**. Ils sont portés par les **axes principaux d'inertie**.

Lorsque la matrice d'inertie est exprimée au centre d'inertie, les axes principaux d'inertie sont appelés les **axes centraux d'inertie**.

### Changement de point

Soit  $\vec{AP} = \vec{AG} + \vec{GP}$ , avec G le centre de masse de S.



$$\begin{aligned} \bar{I}_{A,S}(\vec{u}) &= \int_S \vec{AP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{AP}) dm \\ &= \underbrace{\int_S \vec{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{AG}) dm}_a + \underbrace{\int_S \vec{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{GP}) dm}_b + \underbrace{\int_S \vec{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{AG}) dm}_c + \underbrace{\int_S \vec{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{GP}) dm}_d \end{aligned}$$

$$a = \bar{I}_{A,\{G,m\}}(\vec{u}) = m \vec{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{GP})$$

$$b = 0 \text{ et } c = 0 \text{ car on a choisi G comme changement de point } \vec{AG} \wedge \left( \vec{u} \wedge \int_S \vec{GP} dm \right)$$

$$d = \bar{I}_{G,S}(\vec{u})$$

### Théorème

L'opérateur d'inertie du solide S en un point quelconque A est égal à la somme de l'opérateur d'inertie de ce solide calculé au centre de masse G et de l'opérateur d'inertie calculé au point A du solide S affecté de la masse totale du solide S.

$$\bar{I}_{A,S} = \bar{I}_{G,S} + \bar{I}_{A,\{G,m\}} = \bar{I}_{G,S} + m \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \vec{AG} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

### Solides de formes élémentaires

#### Solide avec plan de symétrie

On considère un solide homogène<sup>(4)</sup> S admettant 1 plan de symétrie  $(A, \vec{x}, \vec{y})$ . Pour tout point  $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , il existe un point symétrique  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$ , donc :

$$\bar{I}_{A,S} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad (5)$$

Et avec 2 plans de symétrie :

$$\bar{I}_{A,S} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

(4) Si le solide n'est pas homogène, on ne s'intéresse pas à la symétrie géométrique mais à la symétrie matérielle.

**Solide de révolution**

On considère un solide homogène S admettant comme axe de révolution  $(A, \vec{z})$ . Les plans  $(A, \vec{y}, \vec{z})$  et  $(A, \vec{x}, \vec{z})$  sont donc plans de symétrie, donc :

$$\bar{I}_{A,S} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Tout vecteur orthogonal à  $\vec{z}$  est vecteur propre.

On a une valeur propre double.

$$I_{xx} = I_{yy}$$

**Question 2 :** Déterminer les symétries de la matrice des matrices d'inertie de la tige 1 et du cylindre 2 du gyroscope.

Les 2 solides 1 et 2 ont une symétrie de révolution  $(O, \vec{x}_1)$ , donc

$$I_{G_{1,1}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}_{(G_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \quad I_{G_{2,2}} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(G_2, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

**Question 3 :** Exprimer ces matrices en leurs centres d'inertie  $G_1$  et  $G_2$  puis en O.

Pour le solide 2 :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z \end{cases} \quad \text{On a déjà démontré } A_2 = I_{xx} = m \frac{R^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Trace}(I_{G_2}) &= A_2 + B_2 + B_2 = \int_2 (y^2 + z^2) dm + \int_2 (z^2 + x^2) dm + \int_2 (x^2 + y^2) dm \\ &= 2 \int_2 (x^2 + y^2 + z^2) dm = 2 \left( \int_V x^2 \rho dV + m \frac{R^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_V x^2 \rho r dr d\theta dz &= \rho \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{x=-\frac{h}{2}}^{x=\frac{h}{2}} x^2 r dr d\theta dz = 2\pi \rho \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=R} L \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{x=-\frac{h}{2}}^{x=\frac{h}{2}} = 2\pi \frac{m}{\pi R^2 L} \frac{R^2}{2} 2 \frac{h^3}{24} \\ &= m \frac{h^2}{12} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_2 + 2B_2 = 2m \frac{R^2}{2} + 2m \frac{h^2}{12} \Rightarrow A_2 = I_{xx} = \frac{1}{2} \left( 2m \frac{R^2}{2} + 2m \frac{h^2}{12} - m \frac{R^2}{2} \right) = m \frac{R^2}{4} + m \frac{h^2}{12}$$

$$I_{G_{2,2}} = \begin{pmatrix} m_2 \frac{R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & m_2 \left( \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \left( \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) \end{pmatrix}_{(G_2, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \quad \overrightarrow{OG_2} = L \vec{x}_1$$

On utilise le Théorème de Huygens :

$$I_{O,2} = I_{G_{2,2}} + I_{G_2, \{O, m_2\}} = I_{G_{2,2}} + m_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 \end{pmatrix}_{(G_2, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

Il est beaucoup plus facile d'utiliser des astuces de calcul (comme calculer la Trace de la matrice) que des changements de coordonnées. Pour les cas plus compliqués, on utilise SolidWorks → Evaluer → Propriété de masse → On lit l'inertie que l'on cherche dans la matrice bien orientée.

$$= \begin{pmatrix} m_2 \frac{R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & m_2 \left( \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} + L^2 \right) & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \left( \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} + L^2 \right) \end{pmatrix}_{(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

Pour le solide 1 :

$$I_{G_1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 \frac{L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \frac{L^2}{12} \end{pmatrix}_{(G_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \quad \overrightarrow{OG_1} = \frac{L}{2} \vec{x}_1$$

On utilise le Théorème de Huygens :

$$I_{O,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 \left( \frac{L^2}{12} + \frac{L^2}{4} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \left( \frac{L^2}{12} + \frac{L^2}{4} \right) \end{pmatrix}_{(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 \frac{L^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \frac{L^2}{3} \end{pmatrix}_{(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}_{(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$



### 3 Quantité de vitesse et quantité d'accélération

#### Mécanique du point

(1) En l'absence de forces extérieures, ou si leur résultante est nulle, la quantité de mouvement d'un système matériel se conserve.

(2) On le note parfois aussi  $L_A$ .

La **quantité de mouvement**<sup>(1)</sup>, ou quantité de vitesse, d'un point matériel  $m$  se déplaçant à une vitesse  $\vec{v}$  :

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

Quand ce point tourne autour d'un axe  $\Delta = (A, \vec{u})$ , cette quantité de vitesse est caractérisée par le **moment cinétique**<sup>(2)</sup>,  $\vec{\sigma}_A$ , ou moment de quantité de mouvement :

$$\vec{\sigma}_A = \overrightarrow{AP} \wedge m\vec{v}$$

D'autre part, pour un système à masse conservative, la quantité d'accélération est la dérivée de la quantité de mouvement :

$$\frac{d[\vec{P}]}{dt}_R = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d[\vec{v}]}{dt}_R = m\vec{A}$$

On somme maintenant ces quantités sur le système considéré.



#### 3.1 Torseur cinétique

Soit un **système matériel**  $\Sigma$  à masse conservative, c'est-à-dire un ensemble de particules caractérisés par une certaine quantité de matière.  $\Sigma$  cela peut être un solide, plusieurs solides ou un fluide.

On appelle **résultante cinétique**, ou quantité de mouvement, ou quantité de vitesse de  $\Sigma$  dans son mouvement par rapport à R la somme des quantités de vitesses élémentaires en translation :

$$\vec{P}_{\Sigma/R} = \int_{\Sigma} \vec{v}_{/R}(P) dm = m\vec{v}_{/R}(G) \quad \text{en } [kg \cdot m/s]$$

On appelle **moment cinétique** de  $\Sigma$  dans son mouvement par rapport à R calculé en un point A quelconque la somme des moments cinétiques des quantités de vitesses élémentaires en rotation :

$$\vec{\sigma}_{\Sigma/R}(A) = \int_{\Sigma} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}_{/R}(P) dm \quad \text{en } [kg \cdot m^2/s]$$

Pour un solide indéformable, on a :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{S/R}(B) &= \int_S (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}) \wedge \vec{v}_{S/R}(P) dm = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}_{S/R}(P) dm + \overrightarrow{BA} \wedge \int_S \vec{v}_{S/R}(P) dm \\ &= \vec{\sigma}_{S/R}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge m\vec{v}_{S/R}(G) \end{aligned}$$

La fonction vectorielle  $\vec{\sigma}_{S/R}$  est donc un torseur de vecteur  $m\vec{v}_{S/R}(G)$ . C'est un champ de vecteurs équiprojectif.

$$\vec{\sigma}_{S/R} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

$$A \mapsto \vec{\sigma}_{S/R}(A) = \vec{\sigma}_{S/R}(B) + \overrightarrow{AB} \wedge m\vec{v}_{S/R}(G) \quad (3)$$

$\vec{\sigma}_{S/R}$  est le **torseur cinétique**. On appelle torseur cinétique le champ des vecteurs moment cinétique.

Pour un solide indéformable, on a :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{S/R}(A) &= \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}_{S/R}(P) dm = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{v}_{S/R}(A) + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{\Omega}_{S/R}) dm \\ &= \underbrace{\int_S \overrightarrow{AP} dm}_{m\vec{AG}} \wedge \vec{v}_{S/R}(A) + \underbrace{\int_S \overrightarrow{AP} \wedge (\overrightarrow{PA} \wedge \vec{\Omega}_{S/R}) dm}_{\vec{I}_{A,S}(\vec{\Omega}_{S/R}) = \vec{I}_{A,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R}} \end{aligned}$$

Les éléments de réduction du torseur en A sont :

$$\mathcal{C}(S/R) = \vec{\sigma}_{S/R} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{P}_{S/R} = m\vec{v}_{S/R}(G) \\ \vec{\sigma}_{S/R}(A) = A \left( \vec{I}_{A,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R} + \vec{AG} \wedge m\vec{v}_{S/R}(A) \right) \end{array} \right. \quad (4)(5)(6)$$

(3) Il y a le même lien entre le torseur cinétique  $\vec{\sigma}_{S/R}$  et le moment cinétique  $\vec{\sigma}_{S/R}(A)$  qu'entre la fonction  $f$  et l'image  $f(x)$ .

(4) Au concours, on renomme souvent cette fonction avec la lettre  $\mathcal{C}$  comme cinétique.

En ce qui concerne l'accolade, de la même manière on peut définir la fonction exponentielle par :

$$\exp = \left\{ \begin{array}{l} f = f' \\ f(0) = 1 \end{array} \right.$$

(5) La résultante cinétique représente les quantités de mouvements du solide en translation. Le moment cinétique en A représente les quantités de mouvements du solide en rotation autour de A.

La résultante d'un torseur ne dépend pas du point en lequel on calcule le moment.

(6)  $\vec{I}_{A,S}$  et  $\vec{\Omega}_{S/R}$  doivent être exprimés dans la même base pour pouvoir être multipliés.

On a donc deux cas particuliers :

Si A est le centre de masse G :

$$\vec{\sigma}_{S/R}(G) = \bar{I}_{G,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$$

Si A est immobile dans le mouvement S/R :

$$\vec{\sigma}_{S/R}(A) = \bar{I}_{A,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$$

### 3.2 Torseur dynamique

On appelle **résultante dynamique**, ou quantité d'accélération, de  $\Sigma$  dans son mouvement par rapport à R la somme des quantités d'accélération élémentaires en translation :

$$\int_{\Sigma} \vec{A}_{S/R}(P) dm = m\vec{A}_{S/R}(G) \quad \text{en } [kg \cdot m/s]$$

On appelle **moment dynamique** du solide S dans son mouvement par rapport à R calculé en un point A quelconque la somme des moments dynamiques élémentaires en rotation :

$$\vec{\delta}_{S/R}(A) = \int_{\Sigma} \overline{AP} \wedge \vec{A}_{S/R}(P) dm \quad \text{en } [kg \cdot m^2/s]$$

Pour un solide indéformable :

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_{S/R}(B) &= \int_S (\overline{BA} + \overline{AP}) \wedge \vec{A}_{S/R}(P) dm = \int_S \overline{AP} \wedge \vec{A}_{S/R}(P) dm + \overline{BA} \wedge \int_S \vec{A}_{S/R}(P) dm \\ &= \vec{\delta}_{S/R}(A) + \overline{BA} \wedge m\vec{A}_{S/R}(G) \end{aligned}$$

La fonction vectorielle  $\vec{\delta}_{S/R}$  est donc un torseur de vecteur  $m\vec{A}_{S/R}(G)$ . C'est un champ de vecteurs équiprojectif.

$$\vec{\delta}_{S/R} : \mathcal{E} \rightarrow E$$

$$A \mapsto \vec{\delta}_{S/R}(A) = \vec{\delta}_{S/R}(B) + \overline{AB} \wedge m\vec{A}_{S/R}(G)$$

$\vec{\delta}_{S/R}$  est le **torseur dynamique**. On appelle torseur dynamique le champ des vecteurs moment dynamique.

#### Du torseur cinétique au torseur dynamique

**Résultante dynamique :**

Le solide S est à masse conservative :

$$m\vec{A}_{S/R}(G) = \frac{d}{dt} [m\vec{V}_{S/R}(G)]_R$$

**Moment dynamique :**

$$\frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{S/R}(A)]_R = \frac{d}{dt} \left[ \int_S \overline{AP} \wedge \vec{V}_{S/R}(P) dm \right]_R = \int_S \frac{d}{dt} [\overline{AP} \wedge \vec{V}_{S/R}(P) dm]_R$$

Car le solide S est à masse conservative. On calcule la dérivée d'un produit.

$$\frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{S/R}(A)]_R = \underbrace{\int_S \frac{d}{dt} [\overline{AP}]_R \wedge \vec{V}_{S/R}(P) dm}_a + \underbrace{\int_S \overline{AP} \wedge \frac{d}{dt} [\vec{V}_{S/R}(P) dm]_R}_b$$

- Calcul de a :

Soit I un point immobile dans R.

$$\frac{d}{dt} [\overline{AP}]_R = \frac{d}{dt} [\overline{IP}]_R - \frac{d}{dt} [\overline{IA}]_R = \vec{V}_{S/R}(P) - \vec{V}_{S/R}(A) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int_S \frac{d}{dt} [\overline{AP}]_R \wedge \vec{V}_{S/R}(P) dm &= \int_S -\vec{V}_{S/R}(A) \wedge \vec{V}_{S/R}(P) dm = -\vec{V}_{S/R}(A) \wedge \int_S \vec{V}_{S/R}(P) dm \\ &= -\vec{V}_{S/R}(A) \wedge m\vec{V}_{S/R}(G) \end{aligned}$$

- Calcul de b :

$$\int_S \overline{AP} \wedge \frac{d}{dt} [\vec{V}_{S/R}(P) dm]_R = \int_S \overline{AP} \wedge m\vec{A}_{S/R}(P) = \vec{\delta}_{S/R}(A)$$

(1)  $\vec{V}_{S/R}(A)$  est la vitesse de A dans R. Cette vitesse provient de la mécanique du point.

(1)  $\mathcal{D}$  comme dynamique.

(2) La résultante dynamique représente les forces nécessaires pour modifier le mouvement de translation du solide. Le moment dynamique en A représente les moments nécessaires pour modifier le mouvement de rotation autour de A.

(3) Car les solides sont disjoints, ils ne se pénètrent pas.

Les éléments de réduction du torseur en A sont :

$$\mathcal{D}(S/R) = \vec{\delta}_{S/R} = \begin{cases} m\vec{A}_{S/R}(G) \\ \vec{\delta}_{S/R}(A) \end{cases} = \begin{cases} m\vec{A}_{S/R}(G) \\ \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{S/R}(A)]_R + \vec{V}_{/R}(A) \wedge m\vec{V}_{S/R}(G) \end{cases} \quad (1)(2)$$

On a donc deux cas particuliers :

Si A est le centre de masse G :

$$\vec{\delta}_{S/R}(G) = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{S/R}(G)]_R = \frac{d}{dt} [\bar{I}_{G,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R}]_R$$

Si A est immobile dans le mouvement /R :

$$\vec{\delta}_{S/R}(A) = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{S/R}(A)]_R = \bar{I}_{A,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$$

### 3.3 Système de solides indéformables

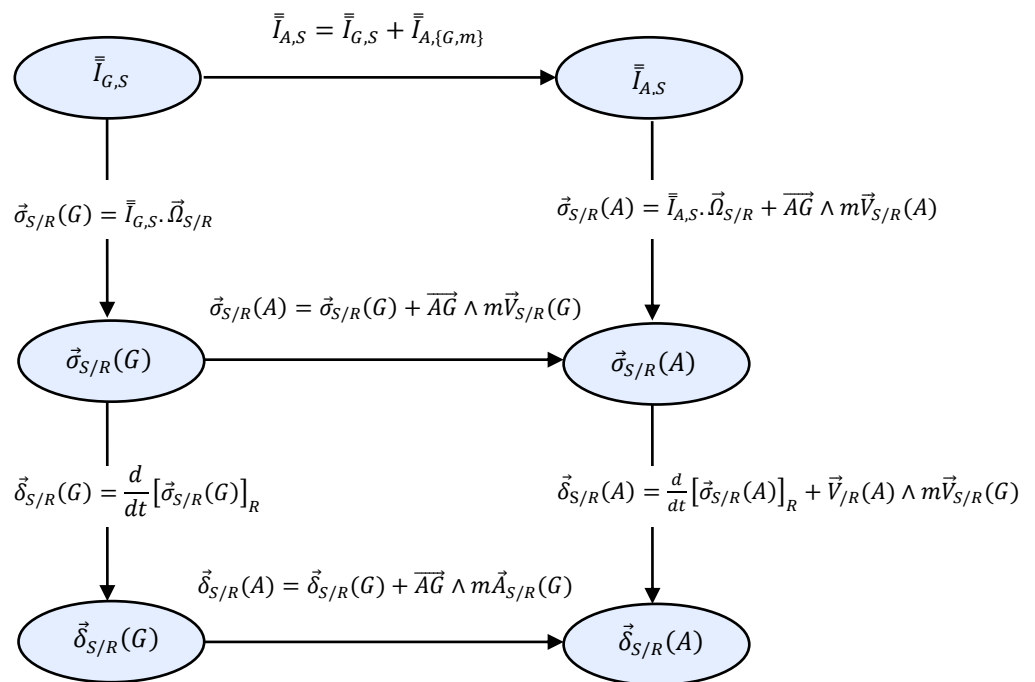
On considère que le système  $\Sigma$  se compose de n solides indéformables  $S_i$  en mouvement par rapport à R. Le torseur cinétique  $\vec{\sigma}_{\Sigma/R}$  est la somme des torseurs cinétiques de chacun des solides<sup>(3)</sup>.

$$\mathcal{C}(\Sigma/R) = \vec{\sigma}_{\Sigma/R} = \sum_{i=1}^n \vec{\sigma}_{i/R}$$

Le torseur dynamique  $\vec{\delta}_{\Sigma/R}$  est la somme des torseurs dynamiques de chacun des solides.

$$\mathcal{D}(\Sigma/R) = \vec{\delta}_{\Sigma/R} = \sum_{i=1}^n \vec{\delta}_{i/R}$$

### 3.4 Méthodologie



Démarche de calcul d'un moment dynamique

### Cas particulier

Parfois, lorsque l'on ne cherche qu'une seule composante selon  $\vec{u}$ , on peut simplifier le calcul.

#### Calcul d'une projection de la résultante dynamique

$$m\vec{A}_{S/R}(G) \cdot \vec{u} = m \frac{d}{dt} [\vec{V}_{S/R}(G) \cdot \vec{u}] - m\vec{V}_{S/R}(G) \cdot \frac{d}{dt} [\vec{u}]_R$$

Par exemple, pour une liaison glissière de direction  $\vec{u}$ .

#### Calcul d'une projection du moment dynamique

$$\frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{S/R}(A)]_R \cdot \vec{u} = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{S/R}(A) \cdot \vec{u}] - \vec{\sigma}_{S/R}(A) \cdot \frac{d}{dt} [\vec{u}]_R$$

Par exemple, pour une liaison pivot d'axe  $(A, \vec{u})$ .

## 4 Energie cinétique

### Mécanique du point

Le PFD donne :

$$\vec{F} = m\vec{A}$$

On s'intéresse à la composante de la force dans la direction de la vitesse. C'est celle qui travaille et qui met en mouvement. La puissance est donc :

$$\vec{F} \cdot \vec{V} = m\vec{A} \cdot \vec{V} = m \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\vec{V}^2 \right)$$

Pour un point matériel de masse  $m$  se déplaçant à une vitesse  $V$  dans un repère  $R$ , l'énergie cinétique est l'énergie accumulée lors du mouvement. Elle correspond au travail nécessaire pour faire acquérir au point sa vitesse depuis le repos.

$$E_c = \frac{1}{2} m\vec{V}^2$$

### 4.1 Expression générale

On considère un **système matériel**  $\Sigma$ , c'est-à-dire un ensemble de particules caractérisées par une certaine quantité de matière.  $\Sigma$  cela peut être un solide, plusieurs solides ou un fluide.

On appelle **énergie cinétique** d'un système matériel  $\Sigma$  dans son mouvement par rapport à un repère  $R$  la quantité scalaire somme des énergies cinétiques de chacun de ses points.

$$E_{c\Sigma/R} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \vec{V}_{/R}(P)^2 dm \quad (1)$$

L'unité est le Joule [J].

Pour un solide indéformable, le champ  $\vec{V}_{S/R}$  est équiprojectif, on a donc :

$$\begin{aligned} E_{cS/R} &= \frac{1}{2} \int_S (\vec{V}_{S/R}(A) + \overline{PA} \wedge \vec{\Omega}_{S/R})^2 dm = \frac{1}{2} \int_S (\vec{V}_{S/R}(A) + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AP})^2 dm \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_S \vec{V}_{S/R}(A)^2 dm}_a + \underbrace{\frac{1}{2} \int_S (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AP})^2 dm}_b + \underbrace{\frac{1}{2} \int_S 2\vec{V}_{S/R}(A) \cdot (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AP}) dm}_c \end{aligned}$$

- Calcul de a :

$$\frac{1}{2} \int_S \vec{V}_{S/R}(A)^2 dm = \frac{1}{2} m\vec{V}_{S/R}(A)^2$$

- Calcul de b :

On reconnaît un produit mixte, on peut faire une permutation circulaire.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_S (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AP})^2 dm &= \frac{1}{2} \int_S (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AP}) \cdot (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AP}) dm = \frac{1}{2} \int_S \vec{\Omega}_{S/R} \cdot (\overline{AP} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AP})) dm \\ &= \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{I}_{G,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R} \end{aligned}$$

(1) Le champ des vecteurs vitesses  $\vec{V}_{/R}$  n'est forcément pas équiprojectif, ce n'est pas un torseur.

- Calcul de  $c$  :

$$\frac{1}{2} \int_S 2\vec{v}_{S/R}(A) \cdot (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AP}) dm = m\vec{v}_{S/R}(A) \cdot (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AG})$$

Donc finalement :

$$\begin{aligned} E_{cS/R} &= \frac{1}{2} m\vec{v}_{S/R}(A)^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \bar{I}_{G,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R} + m\vec{v}_{S/R}(A) \cdot (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AG}) \\ &= \frac{1}{2} (m\vec{v}_{S/R}(A)^2 + m\vec{v}_{S/R}(A) \cdot (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AG}) + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \bar{I}_{G,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R} + m\vec{v}_{S/R}(A) \cdot (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AG})) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{v}_{S/R}(A) \cdot m(\vec{v}_{S/R}(A) + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AG}) + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \bar{I}_{G,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot (\overline{AG} \wedge m\vec{v}_{S/R}(A))) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{v}_{S/R}(A) \cdot m\vec{v}_{S/R}(G) + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot (\bar{I}_{A,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R} + \overline{AG} \wedge m\vec{v}_{S/R}(A))) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{v}_{S/R}(A) \cdot m\vec{v}_{S/R}(G) + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{\sigma}_{S/R}(A)) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} m\vec{v}_{S/R}(G) \\ \vec{\sigma}_{S/R}(A) \end{array} \right\} \odot \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{v}_{S/R}(A) \end{array} \right\} \quad (1) \\ &= \frac{1}{2} \vec{\sigma}_{S/R} \odot \vec{v}_{S/R} \end{aligned}$$

(1) Lorsque l'on fait une opération entre 2 torseurs à partir de leurs composantes, ils doivent être exprimés au même point.

(2) c'est le produit de 2 fonctions.

(3) L'énergie cinétique ne dépend pas du point A.

#### Théorème

L'énergie cinétique d'un solide S en mouvement dans un repère R est égale à la moitié du comoment des torseurs cinétique et cinématique.

$$E_{cS/R} = \frac{1}{2} \mathcal{C}(S/R) \odot \mathcal{U}(S/R) = \frac{1}{2} \vec{\sigma}_{S/R} \odot \vec{v}_{S/R} \quad (2)(3)$$

#### Solide en translation

Pour un solide en translation, on a donc :

$$E_{cS/R} = \frac{1}{2} \begin{array}{l} m\vec{v}_{S/R}(G) \\ \vec{0} \end{array} \odot \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{v}_{S/R}(G) \end{array} = \frac{1}{2} m\vec{v}_{S/R}(G)^2$$

#### Solide en rotation autour d'un axe immobile dans R

Pour un solide en rotation autour de l'axe immobile  $(A, \vec{z})$  dans R, on a donc :

$$E_{cS/R} = \frac{1}{2} \begin{array}{l} \vec{0} \\ I_{xz}\vec{x} + I_{yz}\vec{y} + I_{zz}\vec{z} \end{array} \odot \begin{array}{l} \omega\vec{z} \\ \vec{0} \end{array} = \frac{1}{2} J_z \omega^2$$

## 4.2 Système de solides indéformables

On considère que le système  $\Sigma$  se compose de  $n$  solides indéformables  $S_i$  en mouvement par rapport à R.

L'énergie cinétique  $E_{c\Sigma/R}$  de l'ensemble du système est égale à la somme des énergies cinétiques de chacun des solides indéformables.<sup>(4)</sup>

$$E_{c\Sigma/R} = \sum_{i=1}^n E_{ci/R} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathcal{C}(i/R) \odot \mathcal{U}(i/R) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \vec{\sigma}_{i/R} \odot \vec{v}_{i/R}$$

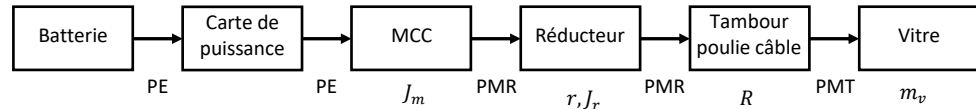
(4) Car les solides sont disjoints, ils ne se pénètrent pas.

### 4.3 Masse et moment d'inertie équivalent

**Exemple :** ouvrant piloté de Bugatti

On s'intéresse à la vitre d'une Bugatti Chiron. La chaîne de puissance considérée est ci-dessous.

On associe un repère 0 au châssis, un repère 1 au rotor du moteur, un repère 2 à l'arbre de sortie du réducteur et au tambour, un repère 3 à la vitre.



$$\mathcal{V}(1/0) = \vec{V}_{1/0} = \begin{matrix} A \\ \vec{0} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \omega_m \vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix} \right. \quad \mathcal{V}(2/0) = \vec{V}_{2/0} = \begin{matrix} A \\ \vec{0} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \omega_r \vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix} \right. \quad \mathcal{V}(3/0) = \vec{V}_{3/0} = \begin{matrix} A \\ \vec{V}_v \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{z} \end{matrix} \right.$$

avec  $\omega_r = r \omega_m$  et  $V_v = R \omega_r$

On isole l'ensemble des pièces en mouvement par rapport au châssis  $\Sigma = \{1,2,3\}$ .

$$E_{c\Sigma/0} = E_{c1/0} + E_{c2/0} + E_{c3/0}$$

1/0 et 2/0 sont des mouvements de rotation. 3/0 est un mouvement de translation.

$$E_{c\Sigma/0} = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_r \omega_r^2 + \frac{1}{2} m_v V_v^2 = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_r r^2 \omega_m^2 + \frac{1}{2} m_v R^2 r^2 \omega_m^2 = \frac{1}{2} (J_m + J_r r^2 + m_v R^2 r^2) \omega_m^2 = \frac{1}{2} J_{eq} \omega_m^2$$

Mais on pourrait aussi écrire :

$$E_{c\Sigma/0} = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_r \omega_r^2 + \frac{1}{2} m_v V_v^2 = \frac{1}{2} \frac{J_m}{R^2 r^2} V_v^2 + \frac{1}{2} \frac{J_r}{R^2} V_v^2 + \frac{1}{2} m_v V_v^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{J_m}{R^2 r^2} + \frac{J_r}{R^2} + m_v \right) V_v^2 = \frac{1}{2} M_{eq} V_v^2$$

Le terme  $M_{eq}$  est appelé **masse équivalente** des solides en mouvement ramenée sur l'axe effecteur.

Le terme  $J_{eq}$  est appelé **moment d'inertie équivalent** des solides en mouvement ramené sur l'axe moteur<sup>(1)(2)(3)</sup>.

L'utilisation d'une inertie équivalente ou d'une masse équivalente permet d'étudier la loi de mouvement de l'une des pièces du mécanisme en tenant compte de l'intégralité de ses pièces.

## Dynamique des solides

### Principe fondamental de la dynamique

Le PFD permet d'établir une relation entre les actions mécaniques qui sont appliquées à un solide ou un ensemble de solides et les mouvements qui en résultent selon toutes les directions de l'espace.

#### Énoncé du PFD

Il existe au moins un référentiel galiléen  $R_g$  tel que pour tout ensemble matériel  $\Sigma$  et à chaque instant  $t$ , le **torseur dynamique** associé au mouvement de ce système par rapport à ce repère est égal au **torseur des actions mécaniques** extérieures exercées sur  $\Sigma$ .

$$\mathcal{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \mathcal{D}(\Sigma/R_g) \Leftrightarrow \vec{M}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma} = \vec{\delta}_{\Sigma/R_g} \Leftrightarrow \sum_i \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{i \rightarrow \Sigma} \\ \vec{M}_{i \rightarrow \Sigma}(A) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} m \vec{A}_{\Sigma/R_g}(G) \\ \vec{\delta}_{\Sigma/R_g}(A) \end{matrix} \right\} \quad (4)(5)$$

On a 1 équation torsorielle, soit 2 équations vectorielles, soit 6 équations scalaires.

**Théorème de la Résultante Dynamique (TRD) :**  $\sum_i \vec{R}_{i \rightarrow \Sigma} = m \vec{A}_{\Sigma/R_g}(G)$

**Théorème du Moment Dynamique (TMD)<sup>(6)</sup> au point A :**  $\sum_i \vec{M}_{i \rightarrow \Sigma}(A) = \vec{\delta}_{\Sigma/R_g}(A)$

(1) On choisit en général de ramener sur l'arbre moteur.

(2) Cette inertie équivalente de tous les solides en mouvement correspond au moment d'inertie d'un

### 5

5.1 solide fictif, qui, entraîné par le moteur, développerait la même énergie cinétique.

(3) La part de l'inertie équivalente due aux solides situés après le réducteur est souvent négligeable.

(4) C'est l'égalité de 2 fonctions.

(5)  $i$  numérote une partition de  $\bar{\Sigma}$ .

(6) La 2<sup>nd</sup> équation vectorielle est parfois appelée Théorème du Moment Cinétique en physique.

Le PFD est une égalité entre les quantités d'accélération et les actions mécaniques extérieures. Les 6 équations scalaires obtenus sont à mettre en relation avec les 6 ddl dans l'espace géométrique de dimension 3.

La dynamique permet la résolution de 2 types de problèmes :

- Les efforts sont connus, on détermine les mouvements et on peut dimensionner les actionneurs (moteurs, vérins, ...).
- Les mouvements sont connus, on détermine les efforts et on peut dimensionner les pièces soumises à des accélérations (bielles, suspensions, structures, ...).

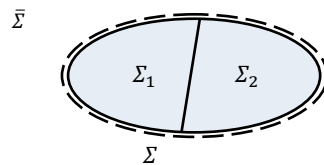
Les conséquences de ce principe sont nombreuses.

### 5.2 Théorème des actions réciproques

(1) On parle de partition si  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$  et  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$

(2) On pourrait aussi utiliser la notation  $\mathcal{F}(\bar{1} \rightarrow 1) = \mathcal{D}(1/R_g)$

On considère un système matériel  $\Sigma$  dont une partition<sup>(1)</sup> est  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . On applique le PFD à  $\Sigma_1, \Sigma_2$  et  $\Sigma$ <sup>(2)</sup>.



$$\vec{M}_{\bar{1} \rightarrow 1} = \vec{\delta}_{1/R_g} \quad (1)$$

$$\vec{M}_{\bar{2} \rightarrow 2} = \vec{\delta}_{2/R_g} \quad (2)$$

$$\vec{M}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma} = \vec{\delta}_{\Sigma/R_g} \quad (3)$$

On a

$$\vec{\delta}_{\Sigma/R_g} = \vec{\delta}_{1/R_g} + \vec{\delta}_{2/R_g}$$

$$\vec{M}_{\bar{1} \rightarrow 1} = \vec{M}_{2 \rightarrow 1} + \vec{M}_{\bar{\Sigma} \rightarrow 1}$$

$$\vec{M}_{\bar{2} \rightarrow 2} = \vec{M}_{1 \rightarrow 2} + \vec{M}_{\bar{\Sigma} \rightarrow 2}$$

$$\vec{M}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma} = \vec{M}_{\bar{\Sigma} \rightarrow 1} + \vec{M}_{\bar{\Sigma} \rightarrow 2}$$

En faisant (1) + (2) - (3), on démontre :

#### Théorème des actions réciproques

Soient 2 systèmes matériels quelconques  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  disjoints. Le torseur des actions mécaniques exercées par 1 → 2 est l'opposé du torseur des actions mécaniques exercées par 2 → 1 .

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{M}_{2 \rightarrow 1} \quad (3)$$

(3)  $\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = -\mathcal{F}(2 \rightarrow 1)$

### 5.3 Théorèmes de l'équilibre

On appelle **équilibre** un mouvement nul.

#### Théorème de l'équilibre<sup>(4)(5)</sup> :

Si un solide S est à l'**équilibre** par rapport à un **référentiel Galiléen** alors la somme des torseurs des **actions mécaniques** du milieu extérieur sur S est **nulle**.

$$\forall t, \forall P \quad \vec{V}_{S/R_g}(P) = \vec{0} \Rightarrow \forall t \sum_i \vec{M}_{i \rightarrow S} = \vec{0} \quad (6)$$

$$\Rightarrow \sum_i \begin{cases} \vec{R}_{i \rightarrow S} \\ \vec{M}_{i \rightarrow S}(A) \end{cases} = A \begin{cases} \vec{0} \\ \vec{0} \end{cases}$$

L'équation torsorielle ci-dessus conduit donc à l'écriture de **2 équations vectorielles** :

**Théorème de la Résultante Statique (TRS) :**  $\sum_i \vec{R}_{i \rightarrow S} = \vec{0}$

**Théorème du Moment Statique (TMS) au point A :**  $\sum_i \vec{M}_{i \rightarrow S}(A) = \vec{0}$

Si  $\vec{V}$  est un champ uniforme et constant, alors :  $\vec{\delta}_{S/R_g} = \vec{0} \quad (7)$

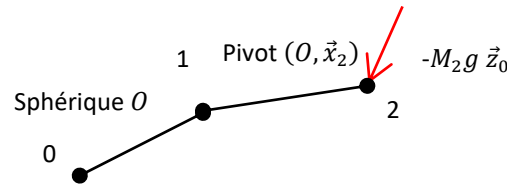
(4) Appelé parfois Principe Fondamental de la Statique (PFS) si on n'a pas admis un principe plus général avant.

(5) La réciproque est fautive.

(6)  $\forall t \sum_i \mathcal{F}(i \rightarrow S) = \vec{0}$

(7)  $\mathcal{D}(S \rightarrow R_g) = \vec{0}$

**Question 4 :** Tracer le graphe de structure du gyroscope



**Question 5 :** Déterminer et justifier une démarche de résolution.

On cherche à appliquer le PFD à  $\Sigma$  en O. Car le point O est un point de vitesse nulle dans 1/0 et 2/0.

**Question 6 :** Lister les AM extérieures à  $\Sigma$ .

On isole  $\Sigma$ .

On fait le BAME :

On néglige l'action de pesanteur sur 1.

$$\mathcal{F}_{0 \rightarrow 1} = \vec{M}_{0 \rightarrow 1} = \begin{matrix} \blacksquare \\ O \end{matrix} \begin{matrix} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} \\ \vec{0} \end{matrix}$$

$$\mathcal{F}_{t \rightarrow 2} = \vec{M}_{t \rightarrow 2} = \begin{matrix} \blacksquare \\ G_2 \end{matrix} \begin{matrix} \vec{R}_{t \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{matrix} = \begin{matrix} \blacksquare \\ O \end{matrix} \begin{matrix} -m_2 g \vec{z}_0 \\ m_2 g L \cos \beta \vec{y}_1 \end{matrix}$$

$$\vec{M}_{t \rightarrow 2}(O) = \vec{M}_{t \rightarrow 2}(G_2) + \overrightarrow{OG_2} \wedge -m_2 g \vec{z}_0 = L \vec{x}_1 \wedge -m_2 g \vec{z}_0 = m_2 g L \cos \beta \vec{y}_1$$

**Question 7 :** Calculer le moment dynamique de  $\Sigma/0$ .

$$\vec{\delta}_{\Sigma/0}(O) = \vec{\delta}_{1/0}(O) + \vec{\delta}_{2/0}(O)$$

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha} \vec{z}_0 + \dot{\beta} \vec{y}_1 = (\dot{\beta} + \dot{\alpha} \sin \alpha) \vec{y}_1 + \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{z}_1$$

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{1/0}(O) &= \bar{I}_{0,1} \cdot \vec{\Omega}_{1/0} + \overrightarrow{OG_1} \wedge m \vec{V}_{1/0}(O) = \bar{I}_{0,1} \cdot \vec{\Omega}_{1/0} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}_{(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\beta} + \dot{\alpha} \sin \alpha \\ \dot{\alpha} \cos \alpha \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \approx \vec{0} \end{aligned}$$

$$\vec{\delta}_{1/0}(O) = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{1/0}(O)]_0 + \vec{V}_{/0}(O) \wedge m \vec{V}_{1/0}(G_1) = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{1/0}(O)]_0 \approx \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\gamma} \vec{x}_1 + (\dot{\beta} + \dot{\alpha} \sin \alpha) \vec{y}_1 + \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{z}_1$$

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{2/0}(O) &= \bar{I}_{0,2} \cdot \vec{\Omega}_{2/0} + \overrightarrow{OG_2} \wedge m \vec{V}_{2/0}(O) = \bar{I}_{0,2} \cdot \vec{\Omega}_{2/0} \\ &= \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\beta} + \dot{\alpha} \sin \alpha \\ \dot{\alpha} \cos \alpha \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \approx A_2 \dot{\gamma} \vec{x}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\vec{x}_1]_0 &= \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x}_1 = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x}_1 = ((\dot{\beta} + \dot{\alpha} \sin \alpha) \vec{y}_1 + \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{z}_1) \wedge \vec{x}_1 \\ &= -(\dot{\beta} + \dot{\alpha} \sin \alpha) \vec{z}_1 + \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{y}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_{2/0}(O) &= \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{2/0}(O)]_0 + \vec{V}_{/0}(O) \wedge m \vec{V}_{2/0}(G_2) = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{2/0}(O)]_0 = \frac{d}{dt} [A_2 \dot{\gamma} \vec{x}_1]_0 \\ &= A_2 \ddot{\gamma} \vec{x}_1 + A_2 \dot{\gamma} \frac{d}{dt} [\vec{x}_1]_0 = A_2 \ddot{\gamma} \vec{x}_1 + A_2 \dot{\gamma} \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{y}_1 - A_2 \dot{\gamma} (\dot{\beta} + \dot{\alpha} \sin \alpha) \vec{z}_1 \end{aligned}$$



**Question 8 :** Sans résoudre les équations du mouvement, déterminer la direction principale du mouvement 1/0.

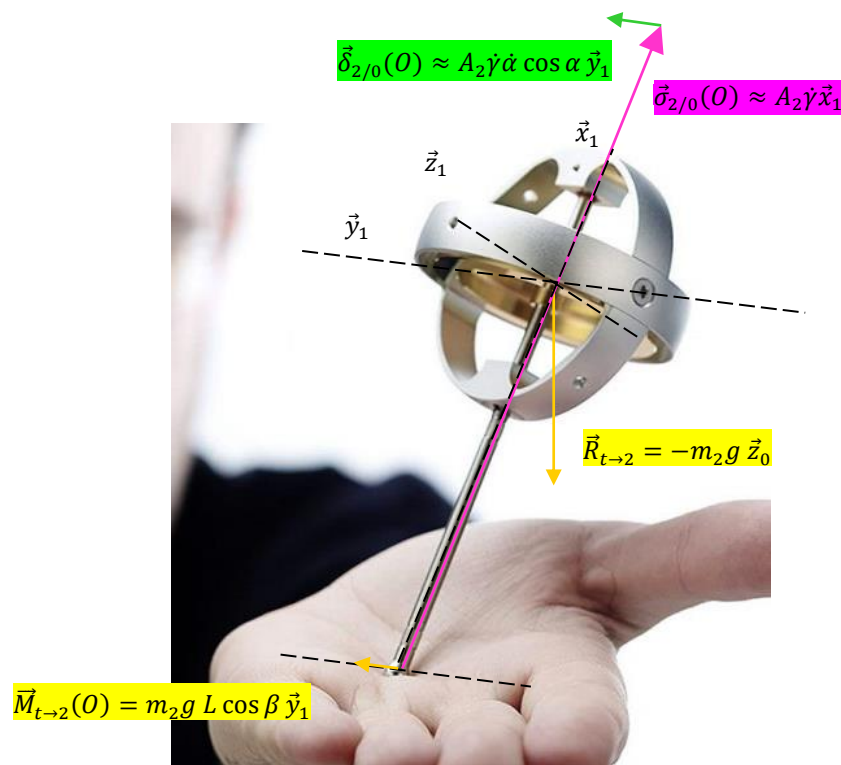
On applique le PFD à  $\Sigma$  en O.

$$\vec{M}_{0 \rightarrow 2}(O) + \vec{M}_{t \rightarrow 2}(O) = \vec{\delta}_{2/0}(O)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 g L \cos \beta \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \approx \begin{pmatrix} A_2 \ddot{\gamma} \\ A_2 \dot{\gamma} \dot{\alpha} \cos \alpha \\ A_2 \dot{\gamma} (\dot{\beta} + \dot{\alpha} \sin \alpha) \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

La composante selon  $\vec{y}_1$  est la plus importante car la vitesse de rotation  $\dot{\gamma} = 12000 \text{ tr/min}$  est très importante.

**Question 9 :** Dessiner les différents vecteurs  $\vec{R}_{t \rightarrow 2}$ ,  $\vec{M}_{t \rightarrow 2}(O)$ ,  $\vec{\sigma}_{2/0}(O)$ ,  $\vec{\delta}_{2/0}(O)$  sur la photo.



La variation du moment cinétique est donc quasi uniquement dans le même sens que le moment du poids ! Donc le gyroscope tourne dans votre main !

Tout comme il est difficile de modifier un mouvement de translation qui va vite, il est difficile de modifier un mouvement de rotation qui va vite !

## 5.4 Equilibrage

Une application du PFD est l'équilibrage d'un solide en rotation autour d'un axe fixe. Lorsqu'un solide possède une mauvaise répartition de matière autour de cet axe, des forces tournantes indésirables provoquent des vibrations nuisibles.

Un solide en rotation est équilibré statiquement (à l'arrêt) si quelle que soit sa position angulaire, il ne se met pas à tourner sous l'effet de son poids.

Un solide en rotation est équilibré dynamiquement si les actions mécaniques transmises dans les liaisons entre le rotor et le bâti sont indépendantes de la position angulaire du rotor quel que soit le mouvement de rotation du rotor.



Équilibreuse de roue

Un solide est dit **équilibré** lors de sa rotation autour d'un axe fixe si et seulement si :

**Équilibrage statique :**

- Son centre de masse est sur l'axe de rotation.

**Équilibrage dynamique :**

- Son centre de masse est sur l'axe de rotation<sup>(1)</sup>.
- L'axe de rotation est un axe principal d'inertie.

(1) Si un solide est équilibré dynamiquement alors il est équilibré statiquement.

## 6 Puissance

### 6.1 Puissance d'une action mécanique

On appelle puissance de l'action mécanique 2 → 1 dans le mouvement 1/R la quantité scalaire somme des puissances élémentaires développées au niveau de chacun des points du solide considéré  $S_1$ .

$$P_{2 \rightarrow 1/R} = \int_{S_1} \vec{f}_{2 \rightarrow 1}(P) \cdot \vec{v}_{1/R}(P) dm \quad (2)(3)$$

Son unité est le Watt [W].

Pour un solide indéformable, le champ  $\vec{v}_{1/R}$  est équiprojectif, on a donc

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \vec{f}_{2 \rightarrow 1}(P) \cdot \vec{v}_{1/R}(P) dm &= \int_{S_1} \vec{f}_{2 \rightarrow 1}(P) \cdot \vec{v}_{1/R}(A) dm + \int_{S_1} \vec{f}_{2 \rightarrow 1}(P) \cdot \overline{PA} \wedge \vec{\Omega}_{1/R} dm \\ &= \int_{S_1} \vec{f}_{2 \rightarrow 1}(P) dm \cdot \vec{v}_{1/R}(A) + \int_{S_1} \vec{\Omega}_{1/R} \cdot (\overline{AP} \wedge \vec{f}_{2 \rightarrow P}(P)) dm \\ &= \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_{1/R}(A) + \vec{\Omega}_{1/R} \cdot \int_{S_1} (\overline{AP} \wedge \vec{f}_{2 \rightarrow P}(P)) dm \\ &= \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_{1/R}(A) + \vec{\Omega}_{1/R} \cdot \vec{M}_{2 \rightarrow 1}(A) = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{2 \rightarrow 1}(A) \end{Bmatrix} \odot \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{1/R} \\ \vec{v}_{1/R}(A) \end{Bmatrix} = \vec{M}_{2 \rightarrow 1} \odot \vec{v}_{1/R} \end{aligned}$$

On appelle **puissance** de l'action mécanique 2 → 1 dans le mouvement 1/R la quantité scalaire obtenue par comoment du torseur associé à l'action mécanique 2 → 1 et du torseur cinématique associé au mouvement  $S_1/R_Z$

$$P_{2 \rightarrow 1/R} = \vec{M}_{2 \rightarrow 1} \odot \vec{v}_{1/R} \quad (4)$$

On parle de **puissance galiléenne** lorsque le mouvement est exprimé par rapport à  $R_g$ .

(4) Si  $P_{2 \rightarrow 1} > 0$ , on parle d'action motrice, sinon d'action résistante.

$$P(2 \rightarrow 1/R) = \mathcal{F}(2 \rightarrow 1) \odot \mathcal{U}(1/R)$$

### 6.2 Puissance des interefforts

Soit 2 solides indéformables  $S_1$  et  $S_2$ .

On appelle **puissance des interefforts** la puissance de l'action mécanique d'un solide 1 sur un solide 2 dans leur mouvement relatif 2/1.

$$P_{1 \leftrightarrow 2} = \vec{M}_{1 \rightarrow 2} \odot \vec{v}_{2/1} = \vec{M}_{2 \rightarrow 1} \odot \vec{v}_{1/2} \quad (5)$$

Elle ne dépend pas du repère.

$$\begin{aligned} (5) P(1 \leftrightarrow 2) &= \mathcal{F}(1 \rightarrow 2) \odot \mathcal{U}(2/1) \\ &= \mathcal{F}(2 \rightarrow 1) \odot \mathcal{U}(1/2) \end{aligned}$$

### 6.3 Rendement

On définit le rendement d'un système comme étant  $\eta = \left| \frac{P_s}{P_e} \right|$ .

La puissance dissipée est donc de  $P_{cal} = (\eta - 1)P_e < 0$

## 6.4 Puissance des interefforts de liaison

Si la puissance dissipée au niveau d'une liaison est nulle alors

$$P_{1 \leftrightarrow 2} = 0 \Leftrightarrow \vec{M}_{1 \rightarrow 2} \odot \vec{V}_{1/R} = 0 \quad (1)$$

Si une **liaison** est **parfaite** alors le mouvement est sans pertes  $P_{1 \leftrightarrow 2} = 0$ .

Si on néglige le frottement dans un contact par glissement, on a un modèle de liaison parfaite.

Si on néglige la résistance au roulement dans un contact par roulement, on a un modèle de liaison parfaite.

## 7 Théorème de la puissance cinétique

Le TPC<sup>(2)</sup> permet de déterminer l'équation du mouvement. Elle est déduite du PFD, ce n'est pas une équation supplémentaire.

Il est pertinent d'utiliser le TPC lorsque l'on étudie un système ayant une seule mobilité utile.

Contrairement au PFD, une action mécanique qui ne travaille pas ne peut pas être déterminé avec le TPC.

### 7.1 1 solide

Pour un solide indéformable unique S, la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique galiléenne est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures qui lui sont appliquées.

$$\frac{dE_{cS/R_g}}{dt} = P_{\vec{S} \rightarrow S/R_g} = \vec{M}_{\vec{S} \rightarrow S} \odot \vec{V}_{S/R_g} \quad (3)$$

#### Démonstration

Soit un solide indéformable S en mouvement dans un référentiel galiléen.

$$\begin{aligned} \vec{M}_{\vec{S} \rightarrow S} &= \vec{\delta}_{S/R_g} \\ \Rightarrow \vec{M}_{\vec{S} \rightarrow S} \odot \vec{V}_{S/R_g} &= \vec{\delta}_{S/R_g} \odot \vec{V}_{S/R_g} \end{aligned}$$

Soit A un point quelconque et P un point courant.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{M}_{\vec{S} \rightarrow S} \odot \vec{V}_{S/R_g} &= A \left\{ \int_S \vec{A}_{S/R_g}(P) dm \right. \odot A \left. \left\{ \vec{\Omega}_{S/R_g} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \int_S \overline{AP} \wedge \vec{A}_{S/R_g}(P) dm \right\} \right. \\ &= \vec{V}_{S/R_g}(A) \cdot \int_S \vec{A}_{S/R_g}(P) dm + \vec{\Omega}_{S/R_g} \cdot \int_S \overline{AP} \wedge \vec{A}_{S/R_g}(P) dm \end{aligned}$$

$$\text{Or } \vec{V}_{S/R_g}(A) = \vec{V}_{S/R_g}(P) + \overline{AP} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_g}$$

$$= \vec{V}_{S/R_g}(P) \cdot \int_S \vec{A}_{S/R_g}(P) dm + \overline{AP} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_g} \cdot \int_S \vec{A}_{S/R_g}(P) dm + \vec{\Omega}_{S/R_g} \cdot \int_S \overline{AP} \wedge \vec{A}_{S/R_g}(P) dm$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale, on peut écrire le produit mixte :

$$\begin{aligned} &= \vec{V}_{S/R_g}(P) \cdot \int_S \vec{A}_{S/R_g}(P) dm + \int_S \overline{AP} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_g} \cdot \vec{A}_{S/R_g}(P) dm + \int_S \overline{AP} \wedge \vec{A}_{S/R_g}(P) \cdot \vec{\Omega}_{S/R_g} dm \\ &= \vec{V}_{S/R_g}(P) \cdot \int_S \vec{A}_{S/R_g}(P) dm - \int_S \overline{AP} \wedge \vec{A}_{S/R_g}(P) \cdot \vec{\Omega}_{S/R_g} dm + \int_S \overline{AP} \wedge \vec{A}_{S/R_g}(P) \cdot \vec{\Omega}_{S/R_g} dm \\ &= \int_S \vec{V}_{S/R_g}(P) \cdot \vec{A}_{S/R_g}(P) dm \end{aligned}$$

(1) Les torseurs des actions mécaniques transmissibles et cinématiques d'une liaison parfaite ont une forme duale.

$$P(1 \leftrightarrow 2) =$$

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) \odot \mathcal{V}(2/1) = \mathcal{C}$$

## 7

(2) Parfois abusivement appelé Théorème de l'Energie Cinétique (TEC).

(3) Parfois abusivement appelé Théorème de l'Energie Cinétique (TEC).  
 $P(\vec{S} \rightarrow S/R_g)$   
 $= \mathcal{F}(\vec{S} \rightarrow S) \odot \mathcal{V}(S/R_g)$

$$\begin{aligned}
 &= \int_S \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \vec{V}_{S/R_g}(P)^2 \right) dm \\
 &= \frac{d}{dt} \int_S \left( \frac{1}{2} \vec{V}_{S/R_g}(P)^2 \right) dm \\
 &= \frac{dE_{cS/R_g}}{dt}
 \end{aligned}$$

On en déduit l'expression du théorème de l'énergie cinétique dans le cas d'un solide indéformable.

$$\Rightarrow \vec{M}_{\bar{S} \rightarrow S} \odot \vec{V}_{S/R_g} = \frac{dE_{cS/R_g}}{dt}$$

La dérivée de l'énergie cinétique est le comoment du champ des moments et du champ des vitesses.

## 7.2 2 solides

Pour un système matériel  $\Sigma$  formé de 2 solides indéformables 1 et 2, la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique galiléenne est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à ce système et de la puissance des interefforts entre 1 et 2.

$$\frac{dE_{c\Sigma/R_g}}{dt} = P_{\bar{S} \rightarrow \Sigma/R_g} + P_{1 \leftrightarrow 2}$$

### Démonstration

Soit  $\Sigma$  un système matériel formé de 2 solides indéformables 1 et 2, avec  $\Sigma = 1 \cup 2$  et  $1 \cap 2 = \emptyset$ .

$$\frac{dE_{c\Sigma/R_g}}{dt} = \frac{dE_{c1/R_g}}{dt} + \frac{dE_{c2/R_g}}{dt}$$

En appliquant le TPC à chaque solide :

$$\begin{aligned}
 \frac{dE_{c1/R_g}}{dt} &= P_{\bar{1} \rightarrow 1/R_g} = P_{\bar{2} \rightarrow 1/R_g} + P_{2 \rightarrow 1/R_g} \\
 \frac{dE_{c2/R_g}}{dt} &= P_{\bar{2} \rightarrow 2/R_g} = P_{\bar{1} \rightarrow 2/R_g} + P_{1 \rightarrow 2/R_g}
 \end{aligned}$$

En sommant

$$\frac{dE_{c\Sigma/R_g}}{dt} = P_{\bar{2} \rightarrow 1/R_g} + P_{\bar{1} \rightarrow 2/R_g} + P_{2 \rightarrow 1/R_g} + P_{1 \rightarrow 2/R_g} = P_{\bar{S} \rightarrow \Sigma/R_g} + P_{1 \leftrightarrow 2}$$

Car

$$P_{2 \rightarrow 1/R_g} + P_{1 \rightarrow 2/R_g} = \vec{M}_{2 \rightarrow 1} \odot \vec{V}_{1/R_g} + \vec{M}_{1 \rightarrow 2} \odot \vec{V}_{2/R_g} = \vec{M}_{2 \rightarrow 1} \odot (\vec{V}_{1/R_g} - \vec{V}_{2/R_g}) = \vec{M}_{2 \rightarrow 1} \odot \vec{V}_{1/2} = P_{1 \leftrightarrow 2}$$

## 7.3 n solides

Pour un système matériel  $\Sigma$  formé de n solides indéformables, la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique galiléenne est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à ce système et de la puissance des interefforts.

$$\frac{dE_{c\Sigma/R_g}}{dt} = \underbrace{P_{\bar{S} \rightarrow \Sigma/R_g}}_{P_{ext}} + \underbrace{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n P_{S_i \leftrightarrow S_j}}_{P_{int}} \quad (1)$$

(1) Par exemple pour  $n = 3 : P_{int} = P_{S_1 \leftrightarrow S_2} + P_{S_1 \leftrightarrow S_3} + P_{S_2 \leftrightarrow S_3}$

## ANNEXE

## Applications

$A \rightarrow f(A)$ : champ scalaire	ex : champ de pressions	$A \rightarrow P(A)$
$A \rightarrow \vec{f}(A)$ : champ vectoriel	ex : champ de vitesses	$A \rightarrow \vec{V}(A)$
$A \rightarrow \bar{f}(A)$ : champ tensoriel	ex : champ tensoriel	$A \rightarrow \bar{I}(A)$
$\vec{u} \rightarrow f(\vec{u})$ : opérateur scalaire = forme	ex : produit scalaire	
$\vec{u} \rightarrow \vec{f}(\vec{u})$ : opérateur vectoriel	ex : produit vectoriel	

## Notations

$$\overrightarrow{AP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\overrightarrow{AP} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{pmatrix} yw - vz \\ zu - wx \\ xv - uy \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\bar{I}_{A,S} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = I_{11}\vec{x} \otimes \vec{x} + I_{12}\vec{x} \otimes \vec{y} + I_{21}\vec{y} \otimes \vec{x} + I_{22}\vec{y} \otimes \vec{y} + I_{33}\vec{z} \otimes \vec{z}$$

$\otimes$  est le produit tensoriel<sup>(1)</sup>.

(1) A ne pas confondre avec le comoment  $\mathcal{O}$ .

## QUESTIONS DE COURS

- Donner les relations qui permettent de déterminer la position du centre de masse.  
 Donner la définition d'un moment d'inertie par rapport à un axe, ainsi que son unité.  
 Exprimer les différents éléments d'une matrice d'inertie.  
 Donner la notion de base principale d'inertie.  
 Donner les simplifications d'une matrice d'inertie qu'impose :  
 - un ou plusieurs plans de symétrie ;  
 - un axe de révolution ;  
 - une dimension négligeable devant les deux autres.  
 Donner le théorème d'Huygens.  
 Donner l'expression des résultantes cinétique et dynamique.  
 Donner l'expression des moments cinétique et dynamique dans les 2 cas particuliers (au centre de gravité  $G$  et en un point fixe du référentiel galiléen).  
 Donner les méthodes pour déterminer les moments cinétique et dynamique.  
 Donner l'expression du PFD.  
 Donner la méthode pour déterminer une équation différentielle de mouvement ou une loi de commande en effort.  
 Expliquer la différence entre énergie et puissance. Donner la relation mathématique qui les relie.  
 Donner l'expression du théorème de l'énergie cinétique appliqué à un ensemble de solides.  
 Quel est l'ensemble de solides à isoler pour utiliser ce théorème ?  
 Donner l'expression de l'énergie cinétique appliqué à un solide, puis à un ensemble de solides.  
 Donner les différents cas de son expression.  
 Comment détermine-t-on l'inertie équivalente ou la masse équivalente de tous les solides en mouvement ?  
 Donner l'expression de la puissance des actions mécaniques extérieures à un solide, puis à un ensemble de solides.  
 Donner l'expression de la puissance des actions mécaniques intérieures à un ensemble de solides.  
 Déterminer les puissances des actions de liaisons lors de frottements sec et fluide.  
 Donner l'expression de la puissance dissipée en fonction du rendement.  
 Qu'appelle-t-on équilibre statique et équilibre dynamique.  
 Comment équilibrer un solide en rotation autour d'un axe fixe.