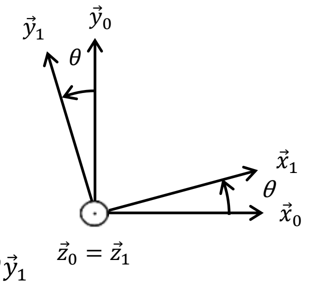
TD01 CINEMATIQUE
CORRECTION

Exercice 1 : CARROUSEL



Question 1 : *Ecrire le vecteur position du point A.*

$$\overrightarrow{OA} = R\vec{x}_1$$

Remarque : il ne faut pas projeter dans B_0.

Question 2 : *Déterminer la vitesse $\vec{V}(A, 1/0)$. Vérifier l'homogénéité des résultats.*

Méthode 1 : Dérivation vectorielle

$$\vec{V}_{1/0}(A) = \frac{d[\overrightarrow{OA}]_{/0}}{dt} = \frac{d[R\vec{x}_1]_{/0}}{dt} = \frac{d[R\vec{x}_1]_{/1}}{dt} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge R\vec{x}_1 = \dot{\theta}\vec{z}_1 \wedge R\vec{x}_1 = R\dot{\theta}\vec{y}_1$$

Remarque : on commence par écrire la définition, puis on remplace, on souligne ce qui varie.

Remarque : on vérifie l'homogénéité $[m/s]$.

Remarque : $\overrightarrow{OA} \perp \vec{V}_{1/0}(A)$ car R est constant.

Méthode 2 : Composition des mouvements

Remarque : Relation de Varignon pour les rotations, dérivation vectorielle pour les translations. Ici, on n'a pas plusieurs solides donc pas de compositions des mouvements.

$$\vec{V}_{1/0}(A) = \vec{V}_{1/0}(O) + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = -R\vec{x}_1 \wedge \dot{\theta}\vec{z}_1 = R\dot{\theta}\vec{y}_1$$

Question 3 : *Déterminer l'accélération $\vec{A}(A, 1/0)$. Vérifier l'homogénéité des résultats. Dessiner les 3 vecteurs positions, vitesse et accélération en vue de dessus en couleur.*

$$\vec{A}_{1/0}(A) = \frac{d\left[\vec{V}_{1/0}(P)\right]_{/0}}{dt} = \frac{d\left[R\dot{\theta}\vec{y}_1\right]_{/0}}{dt} = R\ddot{\theta}\vec{y}_1 + R\dot{\theta}\frac{d[\vec{y}_1]_{/0}}{dt}$$

$$\frac{d[\vec{y}_1]_0}{dt} = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}\vec{y}_1$$

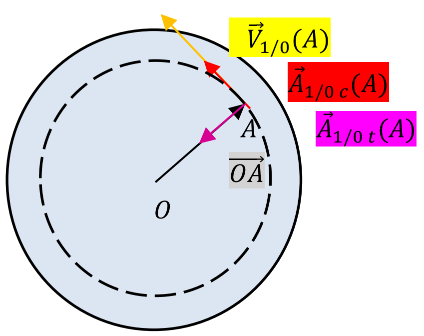
$$\vec{A}_{1/0}(A) = -R\dot{\theta}^2\vec{x}_1 + R\ddot{\theta}\vec{y}_1$$

Remarque : on souligne ce qui varie, on a ici la dérivée d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$.

Remarque : pour l'accélération, on calcule les dérivés des vecteurs séparément, sinon le calcul en ligne est trop long.

Remarque : on vérifie l'homogénéité $[m/s^2]$.

Remarque : $-R\dot{\theta}^2\vec{x}_1$ est l'accélération centripète (dirigée vers le centre), $R\ddot{\theta}\vec{y}_1$ est l'accélération tangentielle (tangentielle à la trajectoire).



Remarque : la vitesse est toujours tangente à la trajectoire.

Question 4 : *Que devient l'accélération $\vec{A}(A, 1/0)$?*

$\dot{\theta} = \omega = \text{constante}$.

$$\vec{A}_{1/0}(A) = -R\dot{\theta}^2\vec{x}_1$$

Et on a alors $\vec{A}_{1/0}(A) \perp \vec{V}_{1/0}(A)$ car $\|\vec{V}_{1/0}(A)\| = \ constante$

Question 5 : *Que peut-on dire des directions d'un vecteur de norme constante et de sa dérivée ?*

Un vecteur de norme constante est ⊥ à sa dérivée, car il ne peut pas s'accroître, il ne peut que tourner.

Remarque : $\overrightarrow{OA} \perp \vec{V}_{1/0}(A)$ car R est constant.

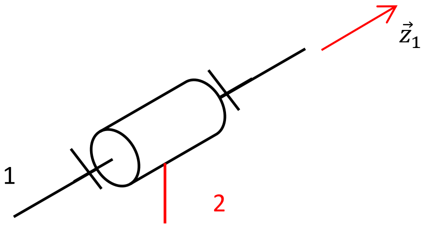
Question 6 : *Ecrire les éléments de réduction du torseur* $\mathcal{V}(1/0)$ *en O puis en A. Comment passe-t-on de l'un à l'autre ?*

$$\mathcal{V}(1/0) = \vec{V}_{1/0} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{1/0} \\ \vec{V}_{1/0}(A) \end{cases} = {}_O \begin{cases} \dot{\theta}\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{cases} = {}_A \begin{cases} \dot{\theta}\vec{z}_1 \\ R\dot{\theta}\vec{y}_1 \end{cases}$$

$$\vec{V}_{1/0}(A) = \vec{V}_{1/0}(O) + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = \vec{0} - R\vec{x}_1 \wedge \dot{\theta}\vec{z}_1 = R\dot{\theta}\vec{y}_1$$

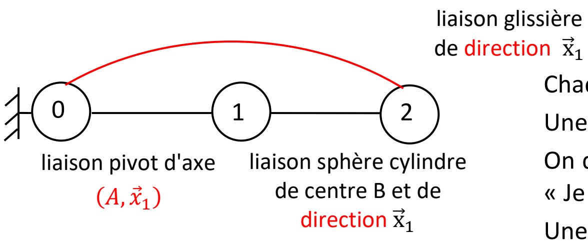
Exercice 2 : **COPIE D'ELEVE**

Question 1 : *Corriger les 3 erreurs suivantes :*

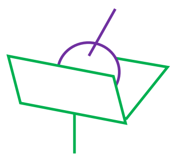


Pas de flèche au bout d'un trait en pointillé.
On met un trait latéral pour le solide 2.
1 et 2 ne sont pas de part et d'autre.

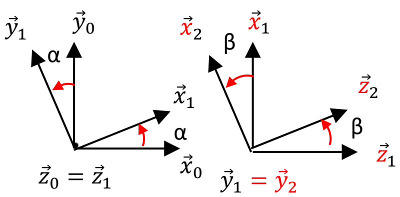
Question 2 : *Corriger les 4 erreurs suivantes :*



Chaque solide n'est représenté qu'une seule fois.
Une glissière appartient à la famille des liaisons à direction.
On dit « Je vais à la gare. » ou « je vais à la gare de Lyon » mais pas « Je vais à la gare de. » donc on ne dit pas « liaison pivot d'axe »
Une liaison cylindre plan est défini par une direction, par exemple, si on imagine une boule dans 2 plans en V, les plans ne définissent pas d'axe. Un cylindre n'est pas forcément de révolution. Un parallélépipède est un cylindre à base rectangulaire.



Question 3 : *Corriger les 14 erreurs suivantes :*

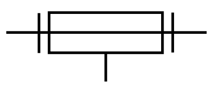
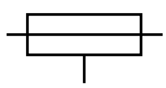
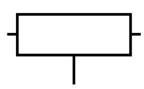


$\vec{x}_1 = \cos\alpha\,\vec{x}_0 + \sin\alpha\,\vec{y}_0$ $\qquad$ $\vec{x}_0 = \cos\alpha\,\vec{x}_1 - \sin\alpha\,\vec{y}_1$

$\vec{y}_1 = -\sin\alpha\,\vec{x}_0 + \cos\alpha\,\vec{y}_0$ $\qquad$ $\vec{y}_0 = \sin\alpha\,\vec{x}_1 + \cos\alpha\,\vec{y}_1$

$\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 = \dot{\alpha}\,\vec{z}_1$ $\qquad$ $\vec{\Omega}(2/1) = \dot{\beta}\cancel{(t)}\,\vec{y}_1 = \dot{\beta}\vec{y}_2$

Question 4 : *Nommer les liaisons suivantes :*

Pivot	Pivot glissant	Glissière
1R	1R1T	1T

Remarque : quand une rotation est autorisée, on voit l'axe.
Remarque : quand une translation est autorisée, on n'a pas d'arrêts axiaux.

Question 5 : *Corriger les 8 erreurs suivantes :*

$\vec{a}(A,1/0) = -R\dot{\theta}^2\,\vec{x}_1 + R\ddot{\theta}\,\vec{y}_1$

$\vec{V}(B,3/0) = \dot{\lambda}\,\vec{x}_2 + (\lambda\dot{\alpha}\cos(\beta) + a\dot{\alpha})\vec{y}_2 - \lambda\dot{\beta}\,\vec{z}_2$

$\vec{A}(B,3/0) = -\lambda\dot{\alpha}^2\cos(\beta)\vec{x}_1 - a\dot{\alpha}^2\,\vec{x}_1 + \ddot{\lambda}\,\vec{x}_2 - \lambda\dot{\beta}^2\vec{x}_2 + \dot{\lambda}\dot{\alpha}\cos(\beta)\,\vec{y}_2 + 2\lambda\ddot{\alpha}\cos(\beta)\vec{y}_2 - 2\lambda\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin(\beta)\vec{y}_2 + a\ddot{\alpha}\,\vec{y}_2 - 2\dot{\lambda}\dot{\beta}\,\vec{z}_2 - \lambda\dot{\beta}\,\vec{z}_2$

Remarque : on factorise, et il apparaît un 2 de l'accélération de Coriolis.

$\vec{\Gamma}(A,1/0) = -R\dot{\theta}^2\,\vec{x}_1 + R\ddot{\theta}\,\vec{y}_1$

Remarque : on ne factorise pas des vecteurs différents pour plus de clarté.

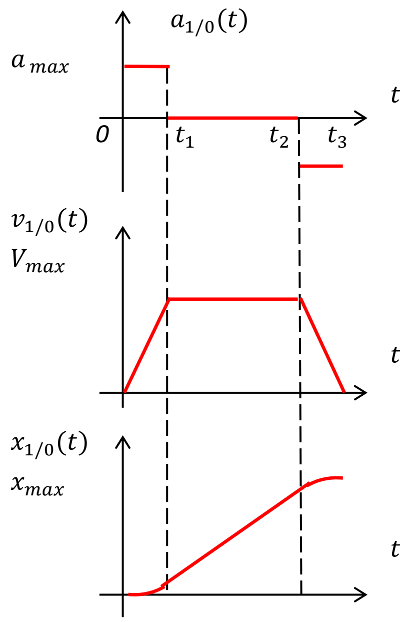
Exercice 3 : **TRAPEZE DE VITESSE**

On s'intéresse au mouvement de translation d'un chariot, commandé par un trapèze de vitesse. On note V_{max} la vitesse max, x_{max} le déplacement max et t_1 t_2 t_3 les instants des 3 phases.

Question 1 : *Tracer les 3 graphiques $a_{1/0}(t), v_{1/0}(t), x_{1/0}(t)$.*

Remarque : on trace ces 3 graphiques en dessous les uns des autres car ils ont une abscisse commune.

Remarque : dans le cas général, a_{max} n'est pas forcément égal à a_{min}.



Question 2 : *Déterminer la distance totale parcourue x_{max}.*

$$x_{max} = \underbrace{\frac{1}{2}V_{max}(t_3 - t_2)}_{triangle} + \underbrace{V_{max}(t_2 - t_1)}_{rectangle} + \underbrace{\frac{1}{2}V_{max}t_1}_{triangle}$$

$$= \frac{1}{2}V_{max}(t_3 + t_2 - t_1)$$

Remarque :

La vitesse est l'aire sous la courbe de l'accélération.

La distance parcourue est l'aire sous la courbe de la vitesse.

L'accélération est la pente de la vitesse.

La vitesse est la pente de la distance parcourue, mais c'est inexploitable.

Question 3 : *Déterminer les lois du mouvement en complétant le tableau suivant :*

	$0 \leq t \leq t_1$:	$t_1 \leq t \leq t_2$	$t_2 \leq t \leq t_3$
$a_{1/0}(t)$	$\frac{V_{max}}{t_1}$	0	$-\frac{V_{max}}{t_3 - t_2}$
$v_{1/0}(t)$	$\frac{V_{max}}{t_1}t$	V_{max}	$-\frac{V_{max}}{t_3 - t_2}(t - t_2) + V_{max}$
$x_{1/0}(t)$	$\frac{1}{2}\frac{V_{max}}{t_1}t^2$	$V_{max}(t - t_1) + x_{1/0}(t_1)$	$-\frac{1}{2}\frac{V_{max}}{t_3 - t_2}(t - t_2)^2 + V_{max}(t - t_2) + x_{1/0}(t_2)$

avec $x_{1/0}(t_1) = \frac{1}{2}\frac{V_{max}}{t_1}{t_1}^2 = \frac{1}{2}V_{max}t_1$ *et* $x_{1/0}(t_2) = V_{max}(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}V_{max}t_1$

Remarque : Il y a plusieurs écritures possibles, par exemple :

$$x_{1/0}(t) = -\frac{1}{2}\frac{V_{max}}{t_3 - t_2}(t - t_3)^2 + x_{1/0}(t_3), \text{ avec } x_{1/0}(t_3) = V_{max}\left(\frac{t_1}{2} + t_2 - t_1 + \frac{t_3 - t_2}{2}\right)$$

Remarque : l'énoncée a choisi V_{max} mais on aurait pu tout exprimer en fonction de a_{max}, qui est égal à $\frac{V_{max}}{t_1}$.

Remarque : On a fait un exercice pour un mouvement de translation $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$. On peut facilement transposer les notations et écrire un tableau pour un mouvement de rotation avec $\theta(t)$, $\omega(t)$, $\dot{\omega}(t)$.

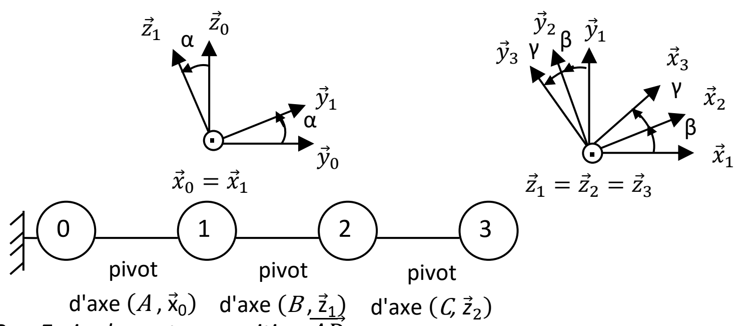
Exercice 4 : **OEING-BELL V22 OSPREY**

PARTIE I - VOL STATIONNAIRE EN MODE « HELICOPTERE »

Question 1 : *Colorier les solides 1, 2 et 3 sur le schéma cinématique de la FIGURE 5.*

Question 2 : *Réaliser, en utilisant les mêmes couleurs, les figures de changement de base ainsi que le graphe des liaisons.*

$\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha}\,\vec{x}_0 = \dot{\alpha}\,\vec{x}_1$ $\qquad$ $\vec{\Omega}(2/1) = \dot{\beta}\,\vec{z}_1 = \dot{\beta}\,\vec{z}_2 = \dot{\beta}\,\vec{z}_3$ $\qquad$ $\vec{\Omega}(3/2) = \dot{\gamma}\,\vec{z}_1 = \dot{\gamma}\,\vec{z}_2 = \dot{\gamma}\,\vec{z}_3$



Question 3 : *Ecrire le vecteur position $\overrightarrow{AD}$.*

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = L_1\vec{z}_1 + L_2\vec{x}_2 + L_3\vec{x}_3$$

Question 4 : *Exprimer sous sa forme la plus réduite, la vitesse du point D dans le mouvement de 3/0 notée $\vec{V}(D,3/0)$.*

$$\vec{V}(D,3/0) = \frac{d\left[\overrightarrow{AD}\right]_{/0}}{dt} = \frac{d[(L_1\vec{z}_1 + L_2\vec{x}_2 + L_3\vec{x}_3)]_{/0}}{dt} = L_1\frac{d[\vec{z}_1]_{/0}}{dt} + L_2\frac{d[\vec{x}_2]_{/0}}{dt} + L_3\frac{d[\vec{x}_3]_{/0}}{dt}$$

$$\frac{d[\vec{z}_1]_{/0}}{dt} = \vec{\Omega}(1/0)\wedge\vec{z}_1 = \dot{\alpha}\,\vec{x}_1\wedge\vec{z}_1 = -\dot{\alpha}\,\vec{y}_1$$

$$\frac{d[\vec{x}_2]_{/0}}{dt} = \vec{\Omega}(2/0)\wedge\vec{x}_2 = \left(\dot{\beta}\,\vec{z}_2 + \dot{\alpha}\,\vec{x}_1\right)\wedge\vec{x}_2 = \dot{\beta}\,\vec{y}_2 + \dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{z}_1$$

$$\frac{d[\vec{x}_3]_{/0}}{dt} = \vec{\Omega}(3/0)\wedge\vec{x}_3 = \left(\dot{\gamma}\,\vec{z}_3 + \dot{\beta}\,\vec{z}_3 + \dot{\alpha}\,\vec{x}_1\right)\wedge\vec{x}_3 = \left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right)\vec{y}_3 + \dot{\alpha}\sin(\gamma+\beta)\vec{z}_1$$

$$\vec{V}(D,3/0) = L_1(-\dot{\alpha}\,\vec{y}_1) + L_2\left(\dot{\beta}\,\vec{y}_2 + \dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{z}_1\right) + L_3\left(\left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right)\vec{y}_3 + \dot{\alpha}\sin(\beta+\gamma)\vec{z}_1\right)$$

$$\Rightarrow \vec{V}(D,3/0) = -\dot{\alpha}L_1\,\vec{y}_1 + (L_2\dot{\alpha}\sin\beta + L_3\dot{\alpha}\sin(\beta+\gamma))\vec{z}_1 + L_2\,\dot{\beta}\,\vec{y}_2 + L_3\left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right)\vec{y}_3$$

PARTIE II - PASSAGE EN MODE « AVION »

Question 5 : *Que peut-on dire des bases B_2 et B_3? Ecrire $\vec{\Omega}(1/0)$, $\vec{\Omega}(2/1)$ et $\vec{\Omega}(3/2)$. Simplifier $\vec{V}(D,3/0)$ et montrer qu'elle s'écrit :*

$$\vec{V}(D,3/0) = -\dot{\alpha}L_1\,\vec{y}_1 + (L_2+L_3)\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{z}_1 + (L_2+L_3)\,\dot{\beta}\,\vec{y}_2$$

<u>Hypothèse :</u> $\gamma = 0$ et $\dot{\gamma} = 0$ donc

$$\mathrm{B}_2 = \mathrm{B}_3$$
$$\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha}\,\vec{x}_0 = \dot{\alpha}\,\vec{x}_1$$
$$\vec{\Omega}(2/1) = \dot{\beta}\,\vec{z}_1 = \dot{\beta}\,\vec{z}_2 = \dot{\beta}\,\vec{z}_3$$
$$\vec{\Omega}(3/2) = \vec{0}$$

On a donc $\vec{y}_2 = \vec{y}_3$

$$\vec{V}(D,3/0) = -\dot{\alpha}L_1\,\vec{y}_1 + (L_2\dot{\alpha}\sin\beta + L_3\dot{\alpha}\sin(\beta+0))\vec{z}_1 + L_2\,\dot{\beta}\,\vec{y}_2 + L_3\left(\dot{\beta}+0\right)\vec{y}_2$$

$$\Rightarrow \vec{V}(D,3/0) = -\dot{\alpha}L_1\,\vec{y}_1 + (L_2+L_3)\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{z}_1 + (L_2+L_3)\,\dot{\beta}\,\vec{y}_2$$

Question 6 : *Ecrire l'accélération du point D dans le mouvement de 3/0 notée $\vec{a}(D,3/0)$.*

$$\vec{a}(D,3/0) = \frac{d\left[\vec{V}(D,3/0)\right]_{/0}}{dt} = \frac{d\left[-\dot{\alpha}L_1\,\vec{y}_1 + (L_2+L_3)\dot{\alpha}\sin(\beta)\vec{z}_1 + (L_2+L_3)\,\dot{\beta}\,\vec{y}_2\right]_{/0}}{dt}$$

<u>Hypothèse :</u> $\dot{\alpha} = constante$ et $\dot{\beta} = constante$

$$\vec{a}(D,3/0) = -\dot{\alpha}L_1\frac{d\left[\vec{y}_1\right]_{/0}}{dt} + (L_2+L_3)\dot{\alpha}\,\dot{\beta}\cos\beta\,\vec{z}_1 + \left((L_2+L_3)\dot{\alpha}\sin\beta\right)\frac{d[\vec{z}_1]_{/0}}{dt} + (L_2+L_3)\,\dot{\beta}\frac{d\left[\vec{y}_2\right]_{/0}}{dt}$$

$$\frac{d\left[\vec{y}_1\right]_{/0}}{dt} = \vec{\Omega}(1/0)\wedge\vec{y}_1 = \dot{\alpha}\,\vec{x}_1\wedge\vec{y}_1 = \dot{\alpha}\,\vec{z}_1$$

$$\frac{d[\vec{z}_1]_{/0}}{dt} = \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{z}_1 = \dot{\alpha}\,\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_1 = -\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1$$

$$\frac{d[\vec{y}_2]_{/0}}{dt} = \vec{\Omega}(2/0) \wedge \vec{y}_2 = (\dot{\beta}\,\vec{z}_2 + \dot{\alpha}\,\vec{x}_1) \wedge \vec{y}_2 = -\,\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)\vec{z}_1 = -\,\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_1$$

$$\vec{a}(D,3/0) = -(L_2 + L_3)\dot{\alpha}^2\,sin\,\beta\,\vec{y}_1 - L_1\,\dot{\alpha}^2\,\vec{z}_1 + 2(L_2 + L_3)\dot{\alpha}\dot{\beta}\,cos\,\beta\,\vec{z}_1 - (L_2 + L_3)\,\dot{\beta}^2\,\vec{x}_2$$

PARTIE III - VOL STATIONNAIRE EN MODE « AVION »

Question 7 : *Donner les vitesses angulaire $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ et la vitesse V_{vent} en unité SI.*

On utilise la formule $\omega = \frac{2\pi}{60}\,N$ avec ω en rad/s et N en tr/min

$$\dot{\alpha} = \frac{2\pi}{60}\,1 \approx 0{,}1\text{rad/s} \qquad \dot{\beta} = \frac{2\pi}{60}\,412 \approx 43{,}1\,rad/s \qquad V_{vent} = 50\,\frac{1000}{3600} \approx 13{,}9\,m/s$$

Question 8 : *Exprimer la vitesse $\vec{V}(D,3/air)$ en projection sur la direction $\vec{y}_2$ pour déterminer la vitesse relative de la pale 3 par rapport à l'air, appelée « VENT RELATIF ». Vous utiliserez une composition des vitesses.*

On écrit la composition des mouvements : $\vec{V}(D,3/air) = \vec{V}(D,3/0) + \vec{V}(D,0/air) = \vec{V}(D,3/0) - \vec{V}(D,air/0)$

$$\vec{V}(D,3/air).\vec{y}_2 = \left(\vec{V}(D,3/0) - \vec{V}(D,air/0)\right).\vec{y}_2 = -\dot{\alpha}L_1\,\vec{y}_1.\vec{y}_2 + \left((L_2 + L_3)\dot{\alpha}\sin(\beta)\right)\vec{z}_1.\vec{y}_2 + (L_2 + L_3)\,\dot{\beta}\,\vec{y}_2.\vec{y}_2 - V_{vent}\,\vec{y}_0.\vec{y}_2$$
$$= -\dot{\alpha}L_1\,\cos\beta + (L_2 + L_3)\,\dot{\beta} - V_{vent}\,\cos\beta\cos\alpha$$

$$\vec{y}_1.\vec{y}_2 = \cos\beta \qquad \vec{z}_1.\vec{y}_2 = 0 \qquad \vec{y}_2.\vec{y}_2 = 1 \qquad \vec{y}_0.\vec{y}_2 = \vec{y}_0.(-sin\,\beta\,\vec{x}_1 + cos\,\beta\,\vec{y}_1) = \cos\beta\cos\alpha$$

$$\Longrightarrow \vec{V}(D,3/air).\vec{y}_2 = -\dot{\alpha}L_1\,\cos\beta + (L_2 + L_3)\,\dot{\beta} - V_{vent}\,\cos\beta\cos\alpha$$

Question 9 : *Faire l'application numérique pour les 3 pales et compléter le tableau suivant. Quelle pale a la vitesse relative la plus élevée et donc la portance la plus grande ?*

$$\vec{V}(D,3/air).\vec{y}_2 = -0{,}1.3{,}5.\cos\beta_i + (0{,}8 + 5).43{,}1 - 13{,}9.\cos\beta_i\,.\cos 45°$$

On a donc :

	Pale 1	Pale 2	Pale 3
Position angulaire de la pale β_i	20°	140°	260°
Vitesse relative en bout de $pale_i/air$	240,4 m/s	257,8 m/s	251,7 m/s

La pale 2 a donc la vitesse relative la plus élevée.

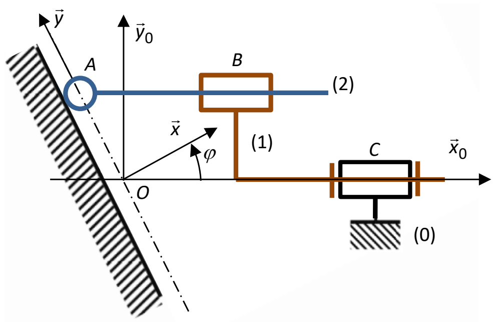
On remarque qu'en mode « avion » les 3 pales ont la même vitesse, c'est-à-dire pour $\alpha = 0°$ et $\dot{\alpha} = 0\,rad/s$.

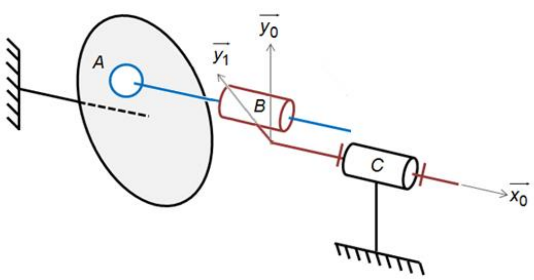
Question 10 : *Le critère 1.2.1 du cahier des charges est-il respecté ?*

Le critère 1.2.1 du CdCF indique que la vitesse en bout de pale doit rester inférieure à la vitesse du son qui est de 340 m/s. Pour les 3 pales, les vitesses de l'extrémité qui sont de 240,4 m/s ; 257,8 m/s et 251,7 m/s sont bien inférieur à 340 m/s. Donc le critère du CdCF est respecté.

Exercice 5 : **POMPE HYDRAULIQUE A PISTONS AXIAUX ET A DEBIT VARIABLE**

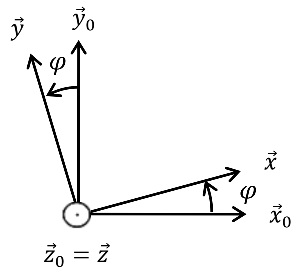
Question 1 : *Repasser en couleur les différents solides sur le schéma cinématique. Indiquer les distances b, c, R et λ.*

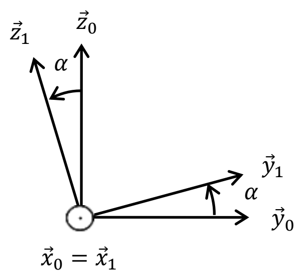


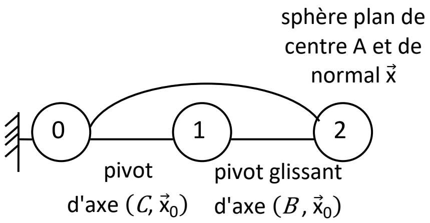


Question 2 : *Réaliser le graphe des liaisons et les figures de changement de base associées aux angles α et φ. Puis identifier les paramètres de mouvement d'entrées, de sortie, et intermédiaires. Préciser le nombre de mobilités (c'est-à-dire le nombre mouvements indépendants).*

$$\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha}\,\vec{x}_0 = \dot{\alpha}\,\vec{x}_1 \qquad \vec{\Omega}(2/1) = \dot{\beta}\,\vec{z}_1 = \dot{\beta}\,\vec{z}_2 = \dot{\beta}\,\vec{z}_3$$







Paramètres d'entrée : α, ϕ

Paramètre de sortie : λ

Paramètres intermédiaires : y, z

Remarque : un paramètre intermédiaire est un paramètre du mouvement qui n'apparait pas dans la loi entrée sortie.

Il y a 2 mobilités utiles, α (ou λ) et ϕ mobilité interne, la rotation propre du piston de 2/1.

Remarque : ce vocabulaire usuel n'est pas bien choisi car interne s'oppose à externe et utile s'oppose à inutile. Une mobilité est dite utile si elle participe de la loi entrée sortie.

Question 3 : *Ecrire une fermeture géométrique.*

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow c\,\vec{x}_0 - b\,\vec{x}_0 + R\,\vec{y}_1 + \lambda\,\vec{x}_0 - y\,\vec{y} - z\,\vec{z} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow (\lambda - b + c)\,\vec{x}_0 + R\,\vec{y}_1 - y\,\vec{y} - z\,\vec{z} = \vec{0}$$

Question 4 : *Déterminer la loi entrée-sortie en position du mécanisme $\lambda = f(\alpha, \varphi)$ en projetant dans le plan $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$.*

On projette la fermeture géométrique dans $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$:

Remarque : ici, on n'a pas l'hypothèse de problème plan, on projette donc dans les 3 directions de la base. Il se trouve que l'équation selon $\vec{z}_0$ nous sera inutile.

$$\begin{cases} (\lambda - b + c)\,\vec{x}_0.\vec{x}_0 + R\,\vec{y}_1.\vec{x}_0 - y\,\vec{y}.\vec{x}_0 - z\,\vec{z}.\vec{x}_0 = 0 \\ (\lambda - b + c)\,\vec{x}_0.\vec{y}_0 + R\,\vec{y}_1.\vec{y}_0 - y\,\vec{y}.\vec{y}_0 - z\,\vec{z}.\vec{y}_0 = 0 \\ (\lambda - b + c)\,\vec{x}_0.\vec{z}_0 + R\,\vec{y}_1.\vec{z}_0 - y\,\vec{y}.\vec{z}_0 - z\,\vec{z}.\vec{z}_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - b + c - y\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ R\cos\alpha - y\cos\varphi = 0 \\ R\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda - b + c + y\sin\varphi = 0 \\ R\cos\alpha - y\cos\varphi = 0 \\ R\sin\alpha - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\sin\varphi = -\lambda + b - c \\ y\cos\varphi = R\cos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{-\lambda + b - c}{R\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \lambda = -R\tan\varphi\cos\alpha + b - c$$

Question 5 : *Montrer que la vitesse du piston par rapport au barillet s'écrit $\dot{\lambda} = R\dot{\alpha}\tan\varphi\sin\alpha$.*

$$V_{2/1}(A) = \dot{\lambda} = \frac{d\big(-R\tan\varphi\cos(\alpha(t)) + b - c\big)}{dt} = R\dot{\alpha}\tan\varphi\sin\alpha$$

Question 6 : *Donner l'expression, en fonction des paramètres de mouvement, des torseurs cinématiques de chacune des liaisons.*

$$\mathcal{V}(1/0) = \vec{V}_{1/0} = {}_{C}\begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{V}(2/1) = \vec{V}_{2/1} = {}_{\forall P}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{\lambda}\vec{x}_0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{V}(2/0) = \vec{V}_{2/0} = {}_{A}\begin{Bmatrix} \omega_{x,2/0}\vec{x} + \omega_{y,2/0}\vec{y} + \omega_{z,2/0}\vec{z} \\ v_{x,A,2/0}\vec{x} + v_{y,A,2/0}\vec{y} \end{Bmatrix}$$

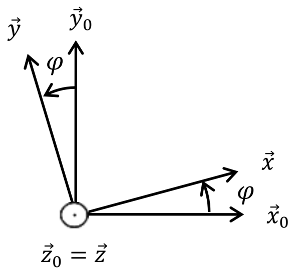
Question 7 : *Ecrire une fermeture cinématique.*

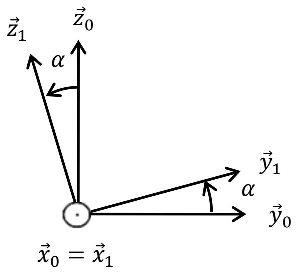
On écrit une fermeture cinématique :

$$\mathcal{V}(2/0) = \mathcal{V}(2/1) + \mathcal{V}(1/0)$$

Question 8 : *Déterminer l'équation scalaire à écrire afin d'obtenir, par fermeture cinématique, la loi entrée-sortie en vitesse. En déduire cette loi entrée-sortie en vitesse.*

$$\underbrace{\vec{V}_{2/0}(A).\vec{x}}_{0} = \vec{V}_{2/1}(A).\vec{x} + \vec{V}_{1/0}(A).\vec{x}$$





$$\underbrace{\vec{V}_{2/0}(A).\vec{x}}_{0} = \vec{V}_{2/1}(A).\vec{x} + \vec{V}_{1/0}(A).\vec{x}$$

$$\vec{V}_{2/1}(A).\vec{x} = \dot{\lambda}\ \vec{x}_0.\vec{x} = \dot{\lambda} \cos\varphi$$

$$\vec{V}_{1/0}(A).\vec{x} = \left(\vec{V}_{1/0}(C) + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}\right).\vec{x} = \left((-\lambda\vec{x}_0 - b\vec{x}_0 - r\vec{y}_1) \wedge \dot{\alpha}\ \vec{x}_0\right).\vec{x} = r\dot{\alpha}\ \vec{z}_1.\vec{x} = r\dot{\alpha}\ \vec{z}_1.(\cos\varphi\ \ \vec{x}_0 + \sin\varphi\,\vec{y}_0)$$

$$= r\dot{\alpha} \sin\varphi \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -r\dot{\alpha} \sin\varphi \sin\alpha$$

$$\Rightarrow 0 = \dot{\lambda} \cos\varphi - r\dot{\alpha} \sin\varphi \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \dot{\lambda} = r\dot{\alpha} \tan\varphi \sin\alpha$$

Question 9 : *Donner la relation entre le débit instantané Q en sortie de la pompe (pour un seul piston), la surface S de la section du piston et $\dot{\lambda}$.*

$$Q = S\dot{\lambda}$$

Remarque : avec Q le débit volume en $[m^3/s]$, S la section utile du piston en $[m^2]$, V la vitesse du piston en $[m/s]$

Question 10 : *En déduire le débit instantané $Q_{1piston}$ refoulé par le piston en fonction de S, R, $\dot{\alpha}$, α et φ. On distinguera les deux phases $\alpha = [0°, 180°]$ et $\alpha = [180°, 360°]$.*

Si $\alpha = [0°, 180°]$, le piston rentre dans le barillet. La pompe est en phase de refoulement et

$$Q_{1piston} = S\ \dot{\lambda} = SR\ \dot{\alpha} \tan\varphi \sin\alpha$$

Si $\alpha = [180°, 360°]$, le piston sort du barillet. La pompe est en phase d'aspiration et

$$Q_{1piston} = 0\ m^3/s$$

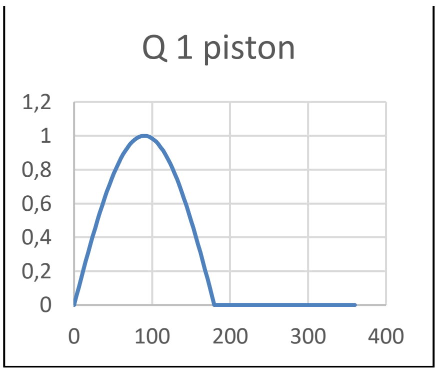
Remarque : Il y a des clapets anti-retour. https://sciencesindustrielles.com/glossary/clapet-anti-retour

Question 11 : *Indiquer la façon dont il faut faire évoluer l'inclinaison du plateau pour diminuer le débit de la pompe.*

Si φ diminue, alors $\tan\varphi$ diminue, donc Q diminue. Si $\varphi = 0°$ alors $Q = 0\ m^3/s$

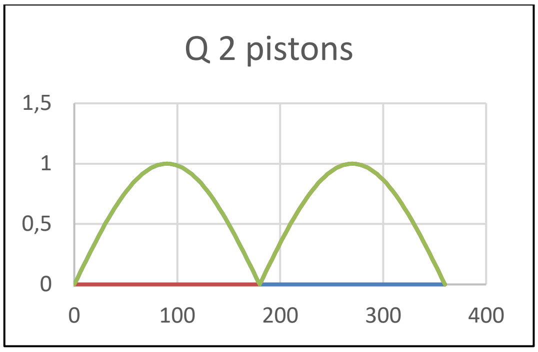
Question 12 : *Tracer l'allure de $Q_{1piston}(\alpha)$.*

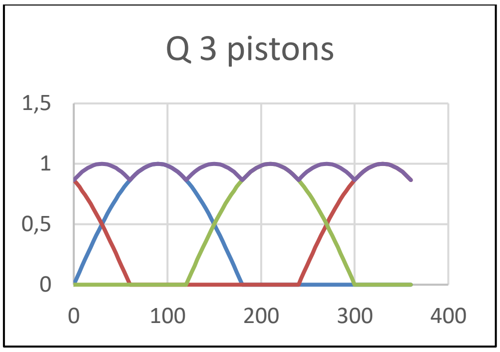
On se place en régime permanent et on a $\dot{\alpha} = constante$. Pour un piston on a donc un sinus tronqué.

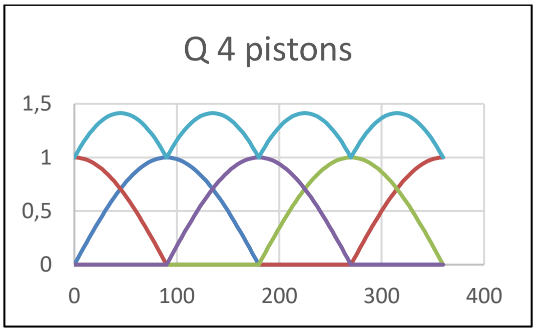


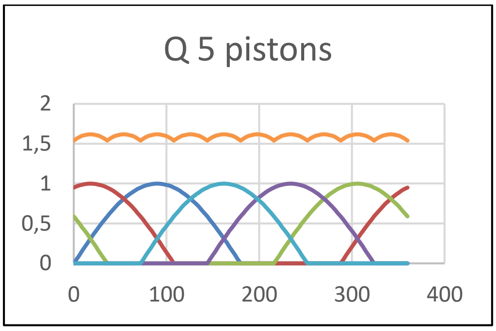
Question 13 : *Sachant que la pompe à piston axiaux possède 6 pistons, tracer l'allure du débit totale $Q_{total}(\alpha)$.*

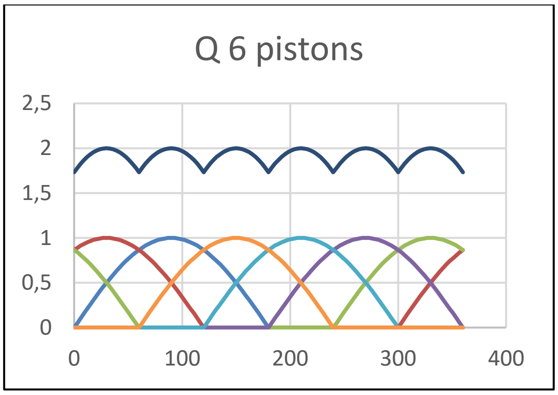
Pour 6 pistons on a une somme de sinus chacun déphasé de $\frac{2\pi}{6}$.





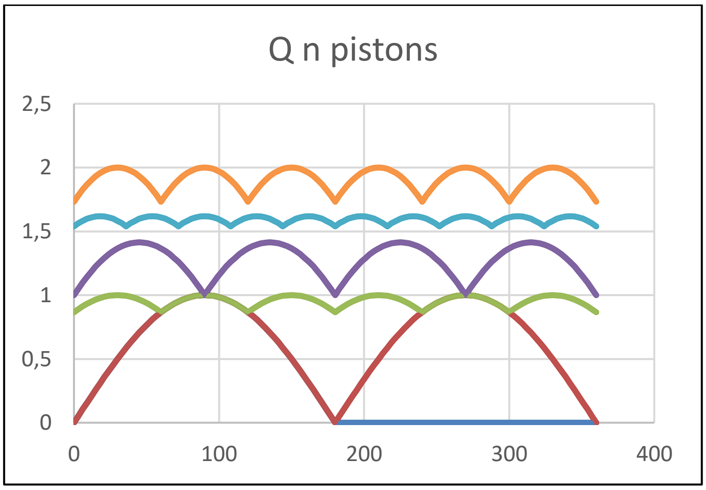






Remarque : sur Excel : =MAX(SIN(2*PI()*(α+360/n)/360);0)
https://sciencesindustrielles.com/Progressions/MPSIPCSI/CIN%20TD03%20Pistons%20pairs%20et%20impairs.xlsx

Question 14 : *Le débit est-il plus irrégulier avec un nombre de piston pair ou impair ? Justifier votre réponse par des courbes.*



Le débit instantané est *plus régulier* lorsque l'on a un nombre impair de pistons.

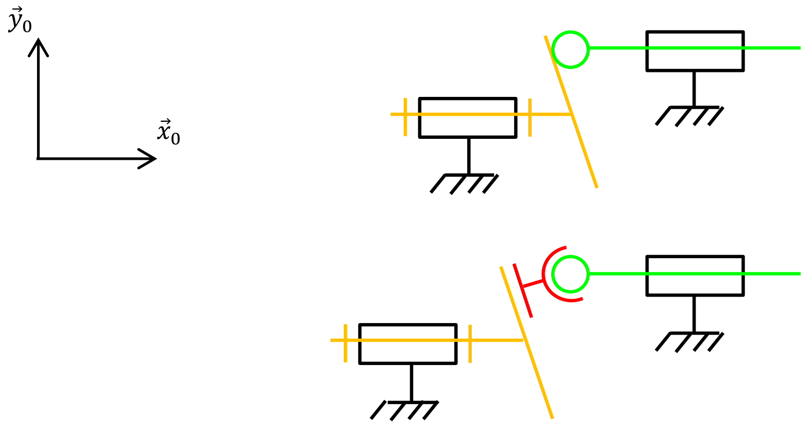
Question 15 : *Donner la période pour un nombre de piston pair ou impair.*

On constate une différence de comportement entre les nombres pairs et impairs de pistons :

Le débit instantané est périodique de période $\frac{2\pi}{n}$ lorsque n est pair, de période $\frac{\pi}{n}$ lorsque n est impair.

Question 16 : *En analysant le contact entre le piston 2 et le plateau 0, expliquer la présence de plots et donner la liaison équivalente.*

Les 2 schémas suivants sont équivalents :



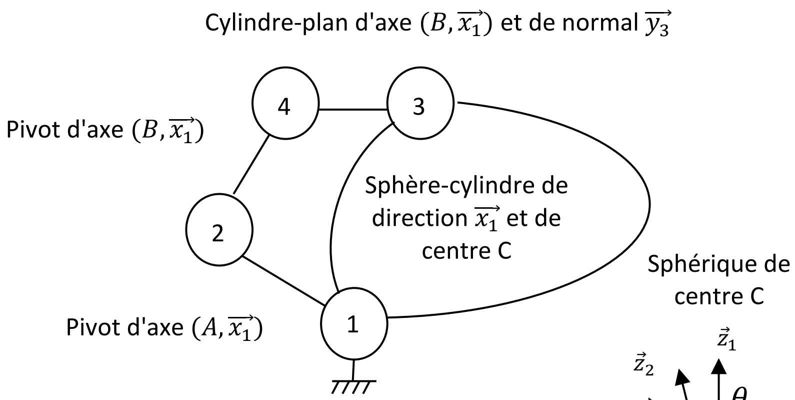
Cette conception permet d'augmenter la surface de contact, et donc de diminuer la pression. Ainsi la surface subit moins d'usure, il n'y a pas de matage (déformation plastique localisée).

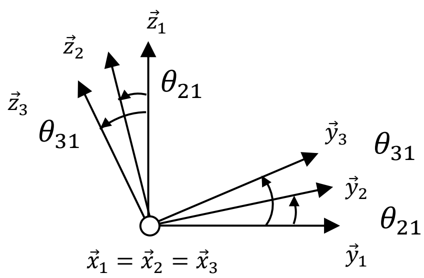
Il est moins onéreux de changer un plot qu'un piston.

On peut utiliser des matériaux avec un faible coefficient de frottement.

Exercice 6 : **BARRIERE SYMPACT**

Question 1 :





Remarque : attention θ_{31} est négatif sur le schéma cinématique.

Question 2 : *La liaison sphérique et la liaison sphère-cylindre en parallèles sont cinématiquement équivalent à une liaison pivot d'axe $(C,\overrightarrow{x_1})$.*

$$V(3/1) = {}_C\begin{Bmatrix}\dot{\theta}_{31}\overrightarrow{x_1} \\ \vec{0}\end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix}\dot{\theta}_{31}\overrightarrow{x_1} \\ R\dot{\theta}_{31}\overrightarrow{z_2} - d\dot{\theta}_{31}\overrightarrow{y_1}\end{Bmatrix}$$

$$\vec{V}(B,3/1) = \vec{V}(C,3/1) + \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \wedge \vec{\Omega}(3/1) = \left(-l\overrightarrow{x_2} - R\overrightarrow{y_2} - d\overrightarrow{z_1}\right) \wedge \dot{\theta}_{31}\overrightarrow{x_1} = R\dot{\theta}_{31}\overrightarrow{z_2} - d\dot{\theta}_{31}\overrightarrow{y_1}$$

$$V(3/4) = {}_B\begin{Bmatrix}\omega_{x34}\overrightarrow{x_3} + \omega_{y34}\overrightarrow{y_3} + \omega_{z34}\overrightarrow{z_3} \\ v_{xB34}\overrightarrow{x_3} + \vec{0} + v_{zB34}\overrightarrow{z_3}\end{Bmatrix}$$

$$V(4/2) = {}_B\begin{Bmatrix}\omega_{x42}\overrightarrow{x_1} \\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

$$V(2/1) = {}_A\begin{Bmatrix}\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{x_1} \\ \vec{0}\end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix}\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{x_1} \\ R\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{z_2}\end{Bmatrix}$$

$$\vec{V}(B,2/1) = \vec{V}(A,2/1) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(2/1) = \left(-l\overrightarrow{x_2} - R\overrightarrow{y_2}\right) \wedge \dot{\theta}_{21}\overrightarrow{x_2} = R\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{z_2}$$

Question 3 : $V(3/1) = V(3/4) + V(4/2) + V(2/1)$

$$
{}_{B}\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{31}\overrightarrow{x_1} \\ R\dot{\theta}_{31}\overrightarrow{z_2} - d\dot{\theta}_{31}\overrightarrow{y_1} \end{Bmatrix} = {}_{B}\begin{Bmatrix} \omega_{x34}\overrightarrow{x_3} + \omega_{y34}\overrightarrow{y_3} + \omega_{z34}\overrightarrow{z_3} \\ v_{xB34}\overrightarrow{x_3} + \vec{0} + v_{zB34}\overrightarrow{z_3} \end{Bmatrix} + {}_{B}\begin{Bmatrix} \omega_{x42}\overrightarrow{x_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + {}_{B}\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{21}\overrightarrow{x_1} \\ R\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{z_2} \end{Bmatrix}
$$

Question 4 : *On projette l'équation des vitesses de translation selon $\vec{y}_3$.*

$$R\dot{\theta}_{31}\overrightarrow{z_2}.\overrightarrow{y_3} - d\dot{\theta}_{31}\overrightarrow{y_1}.\overrightarrow{y_3} = v_{xB34}\overrightarrow{x_3}.\overrightarrow{y_3} + v_{zB34}\overrightarrow{z_3}.\overrightarrow{y_3} + R\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{z_2}.\overrightarrow{y_3}$$

$$R\dot{\theta}_{31}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_{21} - \theta_{31}\right) - d\dot{\theta}_{31}\cos(\theta_{31}) = R\dot{\theta}_{21}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_{21} - \theta_{31}\right)$$

$$R\left(\dot{\theta}_{21} - \dot{\theta}_{31}\right)\sin(\theta_{21} - \theta_{31}) - d\dot{\theta}_{31}\cos(\theta_{31}) = 0$$

La loi entrée-sortie cinématique s'écrit $R(\theta_{31} - \theta_{21})\, sin(\theta_{31} - \theta_{21}) - d\, cos(\theta_{31}) = 0$

Question 5 : $\theta_{31} = f(\theta_{21})$.

$$-R\cos(\theta_{21} - \theta_{31}) - d\sin(\theta_{31}) = 0$$

$$-R\left(\cos(\theta_{21})\cos(\theta_{31}) + \sin(\theta_{21})\sin(\theta_{31})\right) - d\sin(\theta_{31}) = 0$$

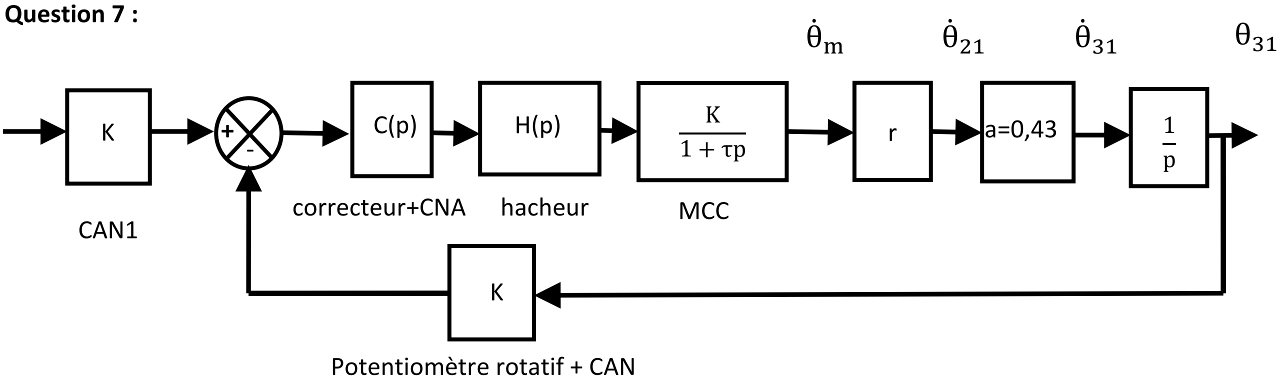
$$-R\cos(\theta_{21}) - R\sin(\theta_{21})\tan(\theta_{31}) - d\tan(\theta_{31}) = 0$$

$$R\cos(\theta_{21}) + (R\sin(\theta_{21}) + d)\tan(\theta_{31}) = 0$$

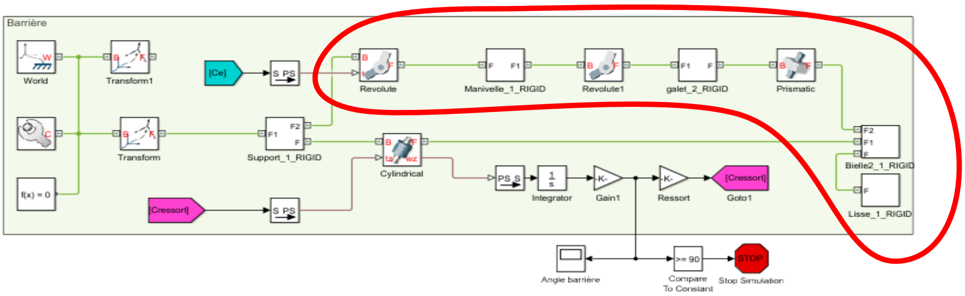
$$\theta_{31} = acrtan\left(\frac{-R\cos(\theta_{21})}{R\sin(\theta_{21}) + d}\right)$$

Question 6 : On lit graphiquement $\theta_{31} = 0{,}43\ \ \theta_{21} + 53{,}4$

Question 7 :



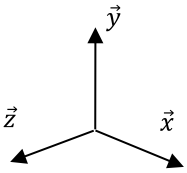
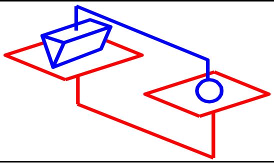
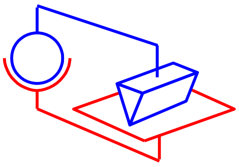
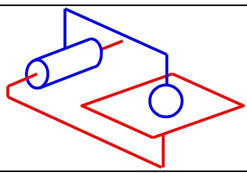
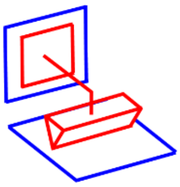
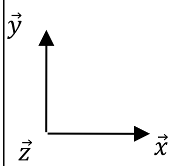
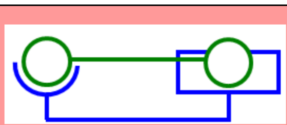
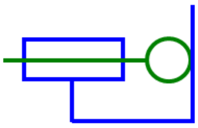
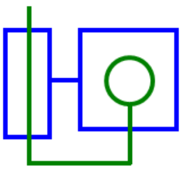
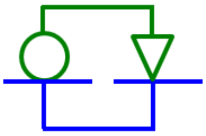
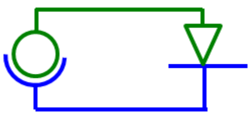
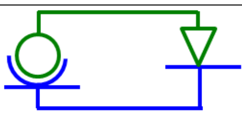
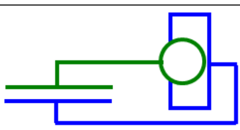
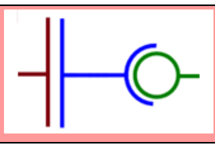
Question 8 :



Exercice 7 : **LIAISONS EQUIVALENTES**

Question 1 : *Compléter le tableau ci-dessous en indiquant le nom et les caractéristiques géométriques de la liaison située à gauche, de la liaison située à droite et de la liaison équivalente aux deux liaisons.*

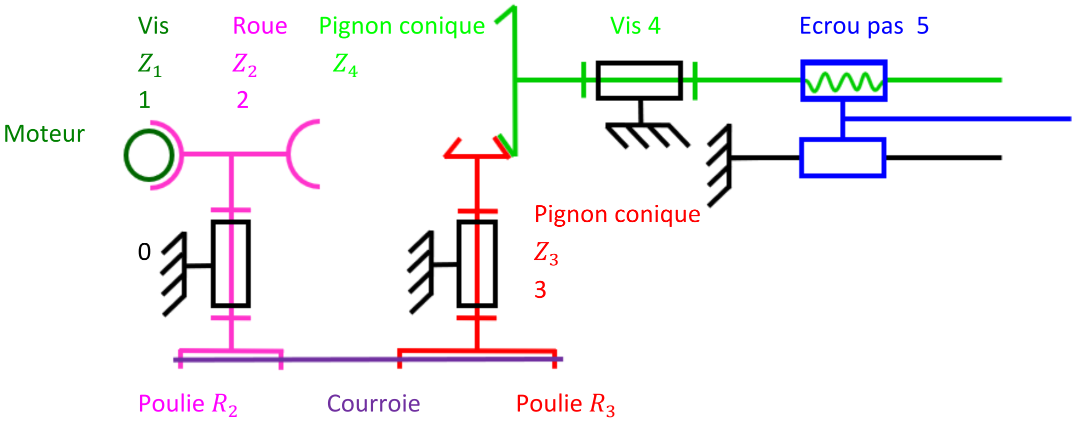
Le point caractéristique de la liaison de gauche sera nommé A et celui de la liaison de droite sera nommé B si besoin.

	Schéma	Liaison à gauche	Liaison à droite	Liaison équivalente
		Cylindre-plan d'axe $(A, \vec{z})$ de normale $\vec{y}$	Sphère-plan de centre B de normale $\vec{y}$	Plane de direction $\vec{y}$
		Sphérique de centre A	Cylindre-plan d'axe $(B, \vec{z})$ de normale $\vec{y}$	Pivot d'axe $(A, \vec{y})$
		Pivot glissant d'axe $(A, \vec{z})$	Sphère-plan de centre B de normale $\vec{y}$	Glissière de direction $\vec{z}$
		Plane de direction $\vec{x}$	Cylindre-plan d'axe $(B, \vec{z})$ de normale $\vec{y}$	Glissière de direction $\vec{z}$
		Sphérique de centre A	Sphère-cylindre de centre B de direction $\vec{x}$	Pivot d'axe $(A, \vec{x})$
		Pivot glissant d'axe $(A, \vec{x})$	Sphère-plan de centre B de normale $\vec{x}$	Pivot d'axe $(A, \vec{x})$
		Pivot glissant d'axe $(A, \vec{y})$	Sphère-plan de centre B de normale $\vec{z}$	Glissière de direction $\vec{y}$
		Sphère-plan de centre A de normale $\vec{y}$	Cylindre-plan d'axe $(B, \vec{z})$ de normale $\vec{y}$	Plane de direction $\vec{y}$
		Sphérique de centre A	Cylindre-plan d'axe $(B, \vec{z})$ de normale $\vec{y}$	Pivot d'axe $(A, \vec{y})$
		Sphère-cylindre de centre A de direction $\vec{z}$	Cylindre-plan d'axe $(B, \vec{z})$ de normale $\vec{y}$	Non définie.
		Plane de direction $\vec{y}$	Sphère-cylindre de centre B de direction $\vec{y}$	Pivot d'axe $(B, \vec{y})$
		Plane de direction $\vec{x}$	Sphérique de centre B	Sphère-plan de centre B de normale $\vec{x}$

Remarque : Les démonstrations des 2 lignes rouges sont à connaître, voir cours de cinématique.
La première ligne rouge fait référence à un montage de roulement.
La seconde ligne rouge permet de répartir mieux la pression et l'usure.
Certaines liaisons ne font pas parti des 10 liaisons usuelles. Autre exemple, une liaison qui permet 2 translations.

Exercice 8 : **TRANSMETTEURS**

Question 1 : *Paramétrer le transmetteur suivant.*



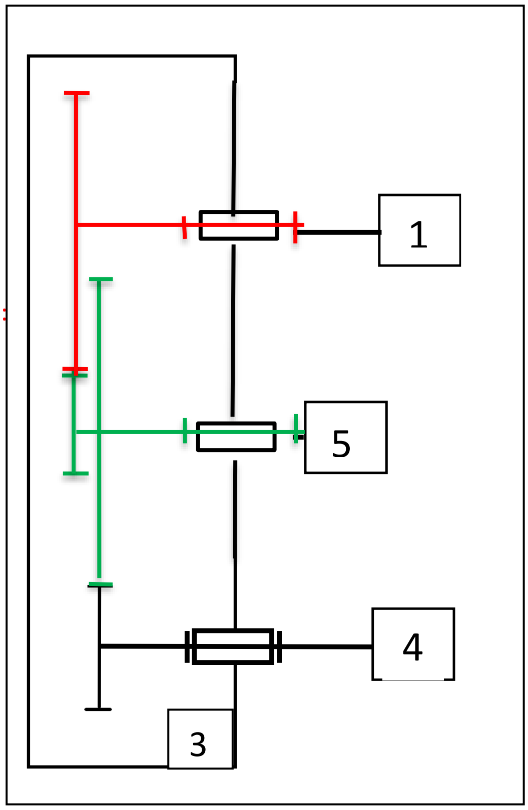
Question 2 : *Déterminer la loi entrée-sortie du transmetteur.*

$$\frac{v_{5/0}}{\omega_{1/0}} = \left|\frac{Z_1}{Z_2}\frac{R_2}{R_3}\frac{Z_3}{Z_4}\frac{\text{pas}}{2\pi}\right|$$

Remarque : Si on s'intéressait au signe, il faudrait regarder le sens du pas des filets des vis. Un filet à droite est un filet qui monte vers la droite lorsque l'on place l'axe verticalement.

Exercice 9 : **TRANSMISSION DE VOITURE RENAULT TWIZY**

(D'après Mines-Pont PSI 2017)



Question 1 : *Tracer le schéma cinématique du réducteur.*

Question 2 : *Calculer le rapport de transmission. Conclure.*

$$r = \frac{\omega_{4/3}}{\omega_{1/3}} = (-1)^n \frac{\prod Z_{menantes}}{\prod Z_{menées}} = (-1)^2 \frac{Z_1 Z_{5a}}{Z_{5b} Z_4} = \frac{17.17}{57.68} \approx 0{,}074 < 1$$

C'est un réducteur.

Remarque : attention, le sujet original avait un horrible paramétrage, avec : $\frac{1}{r} = \frac{\omega_{4/3}}{\omega_{1/3}} \approx 0{,}074$ et donc $r > 1$ bien que ce soit un réducteur.
En général, dans la documentation technique, on note $r = \frac{1}{k} = \frac{1}{i} < 1$ pour un réducteur.