TD05 PERFORMANCES DES SYSTEMES ASSERVIS - CORRECTION

Stabilité des systèmes

Exercice 1 : STABILITE DES SYSTEMES ELEMENTAIRES

Question 1 : *Système du premier ordre défini par la fonction de transfert*

Un système du premier ordre est toujours stable car sa constante de temps τ est strictement positive.

Question 2 : *Système du deuxième ordre défini par la fonction de transfert*

Pour qu'un système du second ordre soit stable, il est nécessaire et suffisant que son coefficient d'amortissement ξ soit strictement positif.

(démonstrations avec le Critère de Routh hors programme)

Exercice 2 : FTBO ET FTBF

Question 1 : $F_0(p) = K$

Remarque : nous prendrons comme notation, F(p) pour les FTBO et H(p) pour les FTBF.

$$H_0(p) = \frac{K}{1+K}$$

Question 2 : $F_1(p) = \frac{K}{1+ap}$

$$H_1(p) = \frac{\frac{K}{1+ap}}{1+\frac{K}{1+ap}} = \frac{K}{1+ap+K} = \frac{\frac{K}{1+K}}{1+\frac{a}{1+K}p}$$

Question 3 : $F_2(p) = \frac{K}{1+ap+bp^2}$

$$H_2(p) = \frac{\frac{K}{1+ap+bp^2}}{1+\frac{K}{1+ap+bp^2}} = \frac{K}{1+ap+bp^2+K} = \frac{\frac{K}{1+K}}{1+\frac{a}{(1+K)}p+\frac{b}{(1+K)}p^2}$$

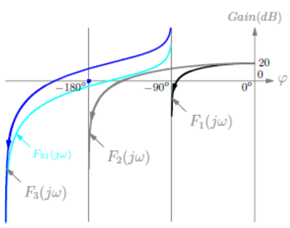
Question 4 : $F_3(p) = \frac{1}{p}\frac{K}{1+ap+bp^2}$

$$H_2(p) = \frac{\frac{1}{p}\frac{K}{1+ap+bp^2}}{1+\frac{1}{p}\frac{K}{1+ap+bp^2}} = \frac{K}{p(1+ap+bp^2)+K} = \frac{1}{1+\frac{1}{K}p+\frac{a}{K}p^2+\frac{b}{K}p^3}$$

Question 5 : $F_4(p) = \frac{K}{1+ap+bp^2+cp^3}$

$$H_2(p) = \frac{\frac{K}{1+ap+bp^2+cp^3}}{1+\frac{K}{1+ap+bp^2+cp^3}} = \frac{K}{1+ap+bp^2+cp^3+K} = \frac{\frac{K}{1+K}}{1+\frac{a}{(1+K)}p+\frac{b}{(1+K)}p^2+\frac{c}{(1+K)}p^3}$$

Question 6 : *Illustrer ces 3 résultats dans le plan de Black,* $G_{dB}(\omega) = f\big(\varphi(\omega)\big)$.



Exercice 3 : **COPIE D'ELEVE**

Question 1 : *Trouver l'erreur suivante :*

$$H_{FTBO}(p) = \frac{K_{FTBO}}{1+\tau_{FTBO}p}$$

$$H_{FTBF}(p) = \frac{\frac{K_{FTBO}}{1+\tau_{FTBO}p}}{1+\frac{K_{FTBO}}{1+\tau_{FTBO}p}} = \frac{K_{FTBO}}{1+\tau_{FTBO}p+K_{FTBO}} = \frac{\frac{K_{FTBO}}{1+K_{FTBO}}}{1+\frac{\tau_{FTBO}}{1+K_{FTBO}}p} = \frac{K_{FTBF}}{1+\tau_{FTBF}p}$$

D'après le tableau de l'écart statique, la FTBO est de classe 0 et est soumis à un échelon, donc :

$$e_{r\infty} = \frac{E_0}{1+K_{FTBO}}$$

D'autre part, on a :

$$e_{r\infty} = E_0 - s_\infty = E_0(1-K_{FTBF}) = E_0\left(1-\frac{K_{FTBO}}{1+K_{FTBO}}\right) = \frac{E_0}{1+K_{FTBO}}$$

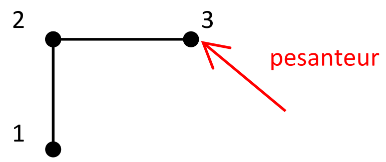
Remarque : attention $K_{FTBO} \neq K_{FTBF}$

Exercice 4 : **STABILITE D'UN PENDULE**

Question 1 : *Déterminer l'équation différentielle liant les deux paramètres cinématiques.*

Remarque : le PFD appliqué au pendule 3 donne 6 équations scalaires : 5 équations scalaire de la liaison pivot ; 1 équation de mouvement.
On recherche seulement l'équation de mouvement, on choisit d'écrire l'équation du moment dynamique au point A en projection sur $\vec{z}_1$.

On isole le pendule 3.



On fait le BAME :

- $\mathcal{F}(ter \to 3) = \vec{M}_{ter\to 3} = {}_G\begin{Bmatrix} -mg\,\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} -mg\,\vec{y}_1 \\ -mgR\sin\theta\,\vec{z}_1 \end{Bmatrix}$
- $\mathcal{F}(2 \to 3) = \vec{M}_{2\to 3} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{2\to 3}\vec{x}_1+Y_{2\to 3}\vec{y}_1+Z_{2\to 3}\vec{z}_1 \\ L_{2\to 3}\vec{y}_1+M_{2\to 3}\vec{y}_1-\mu\dot{\theta}\vec{z}_1 \end{Bmatrix}$

$$\vec{M}_{ter\to 3}(A) = \vec{M}_{ter\to 3}(G) + \overrightarrow{AG}\wedge -mg\,\vec{y}_1 = -R\vec{y}_3 \wedge -mg\,\vec{y}_1 = -R\vec{y}_3 \wedge -mg\,\vec{y}_1 = -mgR\sin\theta\,\vec{z}_1$$

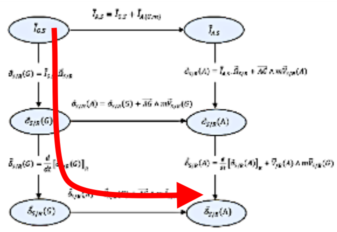
$$\vec{V}_{3/1}(G) = \vec{V}_{3/1}(A) + \overrightarrow{GA}\wedge\vec{\Omega}_{3/1} = \dot{x}\vec{x}_1 + R\vec{y}_3\wedge\dot{\theta}\vec{z}_1 = \dot{x}\vec{x}_1 + R\dot{\theta}\vec{x}_3$$

$$\vec{A}_{3/1}(G) = \frac{d\left[\vec{V}_{3/1}(G)\right]_{/1}}{dt} = \frac{d\left[\dot{x}\vec{x}_1 + R\dot{\theta}\vec{x}_3\right]_{/1}}{dt} = \ddot{x}\vec{x}_1 + R\ddot{\theta}\vec{x}_3 + R\dot{\theta}^2\vec{y}_3$$

Départ : $I_{G,3}$

Arrivée : $\vec{\delta}_{3/1}(A)$

Chemin : Il n'y a pas de point fixe et $\vec{\sigma}_{3/1}(G) = \vec{0}$.



Le solide 3 est modélisé par une masse ponctuelle donc la matrice $I_{G,3}$ est nulle.

$\vec{\sigma}_{3/1}(G) = \vec{0}$ car c'est une masse ponctuelle.

$\vec{\delta}_{3/1}(G) = \vec{0}$

$$\vec{\delta}_{3/1}(A) = \vec{\delta}_{3/1}(G) + \overrightarrow{AG}\wedge m\vec{A}_{3/1}(G) = -R\vec{y}_3 \wedge m\left(\ddot{x}\vec{x}_1 + R\ddot{\theta}\vec{x}_3 + R\dot{\theta}^2\vec{y}_3\right) = mR\ddot{x}\cos\theta\,\vec{z}_1 + mR^2\ddot{\theta}\vec{z}_1$$

$$\mathcal{D}(3/1) = \vec{\delta}_{3/1} = \begin{Bmatrix} m\vec{A}_{3/1}(G) \\ \vec{\delta}_{3/1}(A) \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} m\ddot{x}\vec{x}_1 + mR\ddot{\theta}\vec{x}_3 + mR\dot{\theta}^2\vec{y}_3 \\ mR\ddot{x}\cos\theta\,\vec{z}_1 + mR^2\ddot{\theta}\vec{z}_1 \end{Bmatrix}$$

On applique le théorème du moment dynamique en A en projection selon $\vec{z}_1$.

$$\vec{M}_{\bar{3}\to 3}.\vec{z}_1 = \vec{\delta}_{3/1}(A).\vec{z}_1$$

$$\Rightarrow -mgR\sin\theta - \mu\dot{\theta} = mR\ddot{x}\cos\theta + mR^2\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow mR\ddot{x}(t) = -mR^2\frac{\ddot{\theta}(t)}{\cos\theta(t)} - \mu\frac{\dot{\theta}(t)}{\cos\theta(t)} - mgR\tan\theta(t)$$

Question 2 : *Vérifier que les positions $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ correspondent à des positions d'équilibre du pendule par rapport au coulisseau.*

En régime permanent, lorsque l'on maintient au cours du temps le pendule à l'équilibre, $\dot{\theta}(t) = 0$ et $\ddot{\theta}(t) = 0$.

$$mR\ddot{x}(t) = -mgR\tan\theta(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) = -g\tan\theta(t)$$

Pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$:

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) = 0 \Rightarrow x(t) = v_0 t + x_0$$

Le mouvement 3/2 est nul. Le mouvement 2/1 est uniforme (vitesse constante).

Pour θ quelconque :

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) = -g \tan\theta(t) = a_0 = constante$$

Le mouvement 2/1 est uniformément varié (accélération constante).

Question 3 : *Pour chacune de ces deux positions d'équilibre :*

- linéariser l'équation différentielle du mouvement au voisinage de la position d'équilibre ;
- transposer l'équation linéarisée dans le domaine symbolique en utilisant la transformée de Laplace;
- écrire la fonction de transfert liant $\Theta(p)$ à $X(p)$;
- conclure quant à la stabilité du système d'entrée $x(t)$ et de sortie $\theta(t)$.

On linéarise les coefficients de l'équation à l'ordre 1 autour de la position $\theta = 0$:

$$\begin{cases} \cos\theta(t) \approx 1 \\ \sin\theta(t) \approx \theta \end{cases}$$

On a donc

$$mR\ddot{x}(t) = -mR^2\ddot{\theta}(t) - \mu\dot{\theta}(t) - mgR\theta(t)$$

On suppose les CI nulles. Dans le domaine de Laplace :

$$\Rightarrow mRp^2X(p) = -mR^2p^2\Theta(p) - \mu p\Theta(p) - mgR\Theta(p)$$

$$\Rightarrow F_0(p) = \frac{\Theta(p)}{X(p)} = \frac{-mRp^2}{mR^2p^2 + \mu p + mgR}$$

Remarque : c'est hors programme, mais les coefficients sont tous strictement positifs, donc le système est stable.

La position $\theta = 0$ est un équilibre stable.

On linéarise les coefficients de l'équation à l'ordre 1 autour de la position $\theta = \pi$:

$$\begin{cases} \cos\theta(t) \approx -1 \\ \sin\theta(t) \approx -\theta + \pi \end{cases}$$

Remarque : $\sin\theta(t) \approx -(\theta + \pi)$, c'est une droite de pente -1 translaté de π.

Les CI ne sont pas nulles. On fait le changement de variable suivant $\theta_\pi(t) = \theta(t) - \pi$.

On a donc

$$mR\ddot{x}(t) = -mR^2\ddot{\theta}_\pi(t) - \mu\dot{\theta}_\pi(t) - mgR\theta_\pi(t)$$

Dans le domaine de Laplace :

$$\Rightarrow mRp^2X(p) = mR^2p^2\Theta_\pi(p) + \mu p\Theta_\pi(p) - mgR\Theta_\pi(p)$$

$$\Rightarrow F_\pi(p) = \frac{\Theta_\pi(p)}{X(p)} = \frac{-mRp^2}{mR^2p^2 + \mu p - mgR}$$

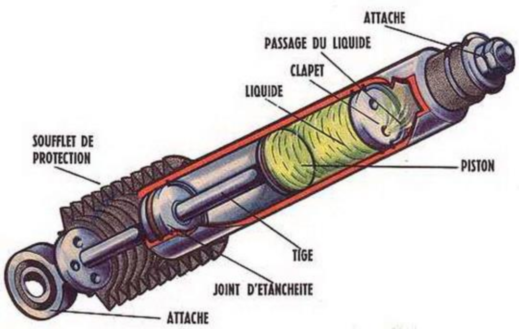
Remarque : c'est hors programme, mais les coefficients ne sont pas tous positifs, donc le système est instable.

La position $\theta = \pi$ est un équilibre instable.

Exercice 5 : **SUSPENSION DE MOTO**

Question 1 : *Expliquer en une phrase le fonctionnement d'un amortisseur et d'un joint de cardan.*

Un amortisseur est un système mécanique destiné à diminuer la violence d'un choc. C'est un système dissipateur d'énergie. La force que l'on exerce sur l'amortisseur est proportionnelle à la vitesse de celui-ci.



Remarque : https://sciencesindustrielles.com/glossary/amortisseur

Un joint de Cardan est un accouplement mécanique, c'est-à-dire qu'il transmet un mouvement de rotation entre deux arbres. Il présente le défaut d'être hétérocinétique, ce qui signifie que la vitesse de rotation des deux arbres autour de leurs axes respectifs n'est pas la même à tout instant. Pour pallier ce défaut, on utilise les joints de Cardan par deux :

Remarque : https://sciencesindustrielles.com/glossary/joint-de-cardan

Question 2 : *Donner l'entrée et la sortie du système.*

En entrée, on considère l'altitude du sol.
En sortie, on considère l'altitude du siège.

Question 3 : *Donner l'ordre du système, justifier technologiquement cet ordre.*

Une masse oscillante, donc le système est d'ordre 2.

Question 4 : *En suivant une démarche rigoureuse, appliquer le théorème de la résultante statique (TRS) à la masse dans la configuration 2, au repos. Montrer que la position d'équilibre est* $z_{eq} = a + l_0 - \frac{mg}{k}$.

On isole le solide 2 de masse m lorsque le système est à l'équilibre et que le sol est plat.
On écrit l'inventaire des actions mécaniques extérieures au système isolé :

- l'action de l'amortisseur $\overrightarrow{F_a} = -c\big(\dot{z}_A(t) - \dot{z}_B(t)\big)\,\vec{z}$;
- l'action du ressort $\overrightarrow{F_r} = -k(z_A(t) - z_B(t) - l_0)\,\vec{z}$;
- l'action de la glissière parfaite $\vec{R}(1 \to 2)$ avec $\vec{R}(1 \to 2)\ .\vec{z} = 0$;
- l'action de la pesanteur $\vec{P} = -mg\,\vec{z}$.

On applique le TRS (théorème de la résultante statique) selon $\vec{z}$ à la masse isolée.

$$\Rightarrow 0 = F_a + F_r + P$$
$$\Rightarrow 0 = -k(z_A(t) - z_B(t) - l_0) - mg$$
$$\Rightarrow 0 = -k\big(z_{eq} - a - l_0\big) - mg$$
$$\Rightarrow z_{eq} = a + l_0 - \frac{mg}{k}$$

Question 5 : *En suivant une démarche rigoureuse, appliquer le théorème de la résultante dynamique (TRD) à la masse dans la configuration 3, lorsque le système n'est pas à l'équilibre. Après simplification, montrer que l'on a la relation :*

$$m\,\ddot{z}(t) + c\,\dot{z}(t) + k\,z(t) = h\,\dot{z}_O(t) + k\,z_O(t)$$

On isole le solide 2 de masse m lorsque le système n'est pas à l'équilibre et que le sol est sinusoïdal.
On applique le TRD (théorème de la résultante dynamique) selon $\vec{z}$ à la masse isolée.

$$m\,a_z = F_a + F_r + P$$
$$m\frac{d^2}{dt^2}\big(z(t) + z_{eq}\big) = -c\big(\dot{z}_A(t) - \dot{z}_B(t)\big) - k(z_A(t) - z_B(t) - l_0) - mg$$
$$m\frac{d^2}{dt^2}\big(z(t) + z_{eq}\big) = -c\frac{d}{dt}\big(z(t) + z_{eq} - z_O(t) - a\big) - k\big(z(t) + z_{eq} - z_O(t) - a - l_0\big) - mg$$
$$m\ddot{z}(t) = -c\big(\dot{z}(t) - \dot{z}_O(t)\big) - k\left(z(t) + a + l_0 - \frac{mg}{k} - z_O(t) - a - l_0\right) - mg$$
$$m\ddot{z}(t) = -c\big(\dot{z}(t) - \dot{z}_O(t)\big) - k\big(z(t) - z_O(t)\big)$$
$$\frac{m}{k}\,\ddot{z}(t) + \frac{c}{k}\,\dot{z}(t) + z(t) = \frac{c}{k}\,\dot{z}_O(t) + z_O(t)$$

Question 6 : *On suppose les conditions initiales nulles, écrire la fonction de transfert de la suspension* $\frac{Z(p)}{Z_O(p)}$ *sous forme canonique.*

Dans le domaine de Laplace, avec les conditions initiales nulles :

$$\Longrightarrow \frac{Z(p)}{Z_O(p)} = \frac{1+\frac{c}{k}p}{1+\frac{c}{k}p+\frac{m}{k}p^2}$$

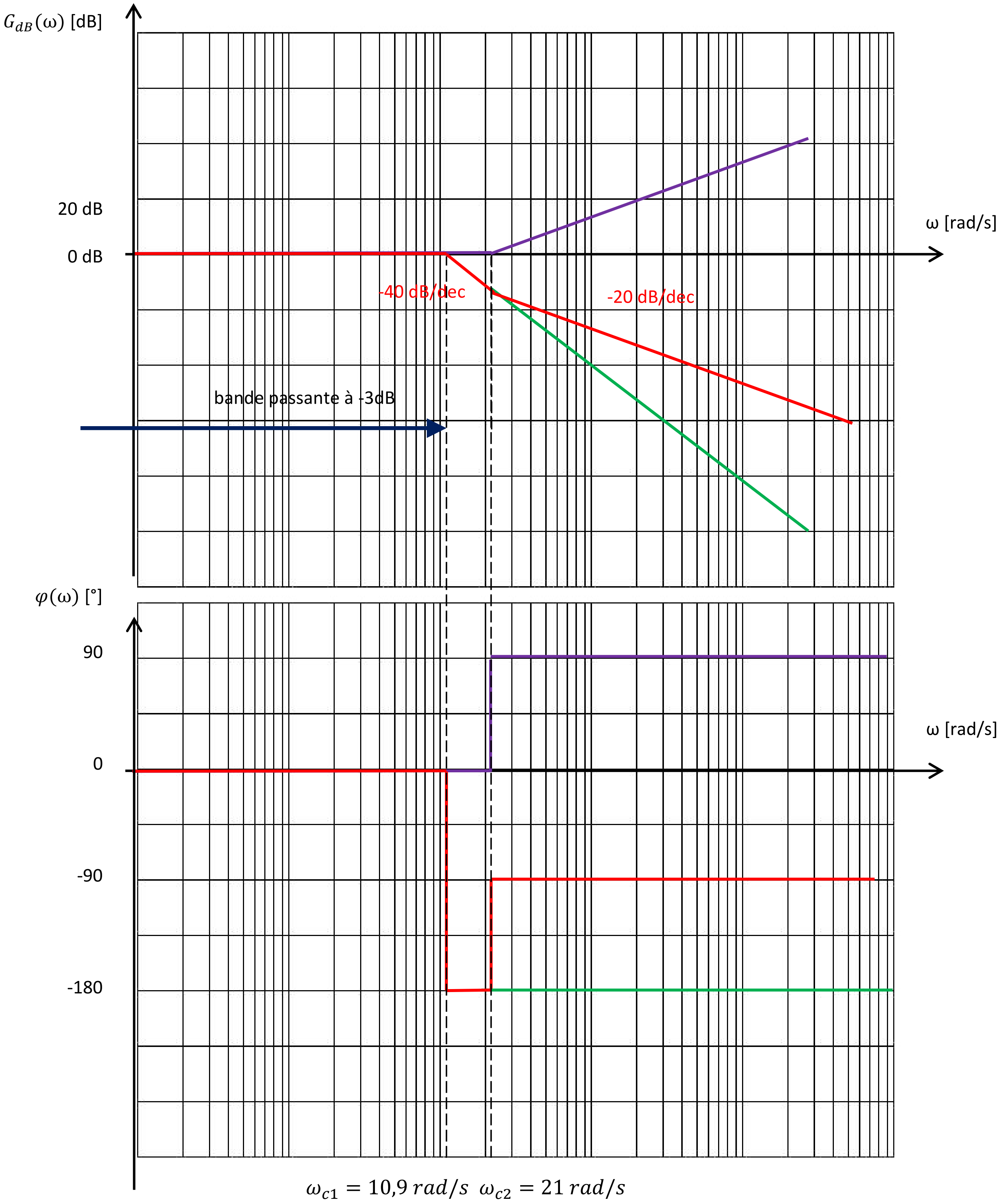
Question 7 : *Déterminer les paramètres caractéristiques K, z, ω_0 et τ de cette fonction de transfert.*

On identifie cette fonction de transfert avec $\frac{Z(p)}{Z_O(p)} = \frac{1+\tau p}{1+\frac{2\zeta}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0{}^2}p^2}$

$$\begin{cases} K = 1 \\ \tau = \dfrac{2\zeta}{\omega_0} = \dfrac{c}{k} \\ \dfrac{1}{\omega_0{}^2} = \dfrac{m}{k} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} K = 1 \\ \zeta = \dfrac{1}{2}\dfrac{c}{k}\sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} K = 1 \\ \zeta = \dfrac{1}{2}\dfrac{c}{k}\sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{cases}$$

Question 8 : *Calculer les pulsations de cassures. Et tracer sur le document réponse le diagramme de Bode asymptotique avec les valeurs numériques données.*

Les pulsations de cassures sont donc $\omega_{c1} = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{35700}{300}} = 10{,}9\ rad/s$ et $\omega_{c2} = \frac{1}{\tau} = \frac{k}{c} = \frac{35700}{1700} = 21\ rad/s$



Question 9 : *Indiquer à quel type de filtre correspond le système.*

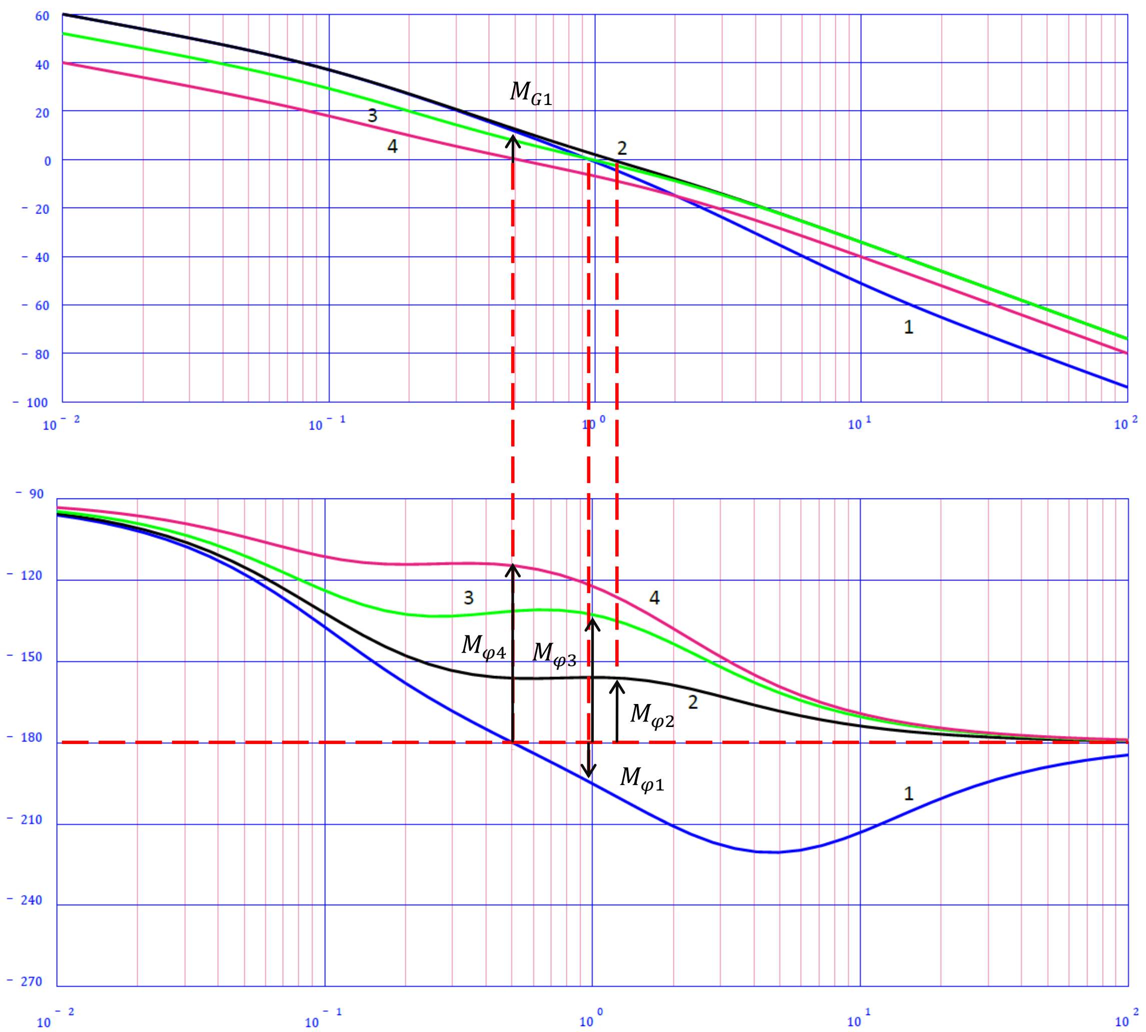
Le système est un filtre passe bas.

Question 10 : *Déterminer la bande passante à -3dB.*

La bande passante à -3dB est d'environ $[0\ rad/s,\ 13\ rad/s]$

Exercice 6 : **MARGES DE STABILITE**

Question 1 : *Déterminer les marges de phases et les marges de gains des courbes suivantes.*

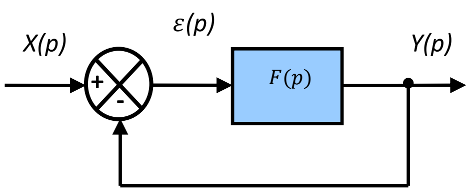


Cas	1	2	3	4
Stable	Non	Oui	Oui	Oui
Marge de phase	$-10°$	$25°$	$45°$	$70°$
Marge de gain	-10 dB	Non définie (+∞)	Non définie (+∞)	Non définie (+∞)

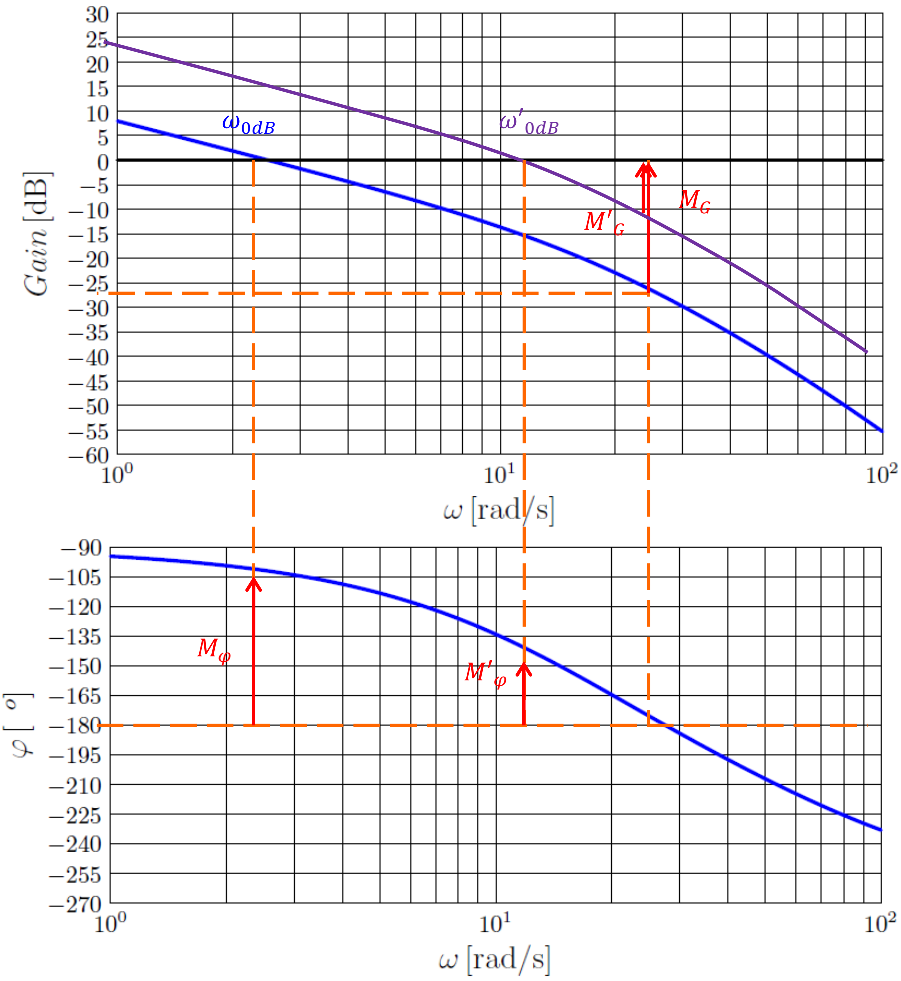
Remarque : $M_{\varphi 1}$ est une mono-flèche vers le bas et est négative. Le système est stable si les marges sont positives, astable si elles sont nulles, et instable si elles sont négatives.

Exercice 7 : **MARGES DE STABILITE**

Question 1 : *Tracer le schéma-bloc du système asservi.*



Question 2 : *Déterminer les marges de phase et de gain du système, puis conclure quant à sa stabilité.*



On lit graphiquement $\varphi(\omega_{0dB}) = -102°$

$$M_\varphi = \varphi(\omega_{0dB}) + 180° = -102° + 180° = 78°$$

$$M_G = 0 - G_{dB}(\omega_{-180°}) = 0 - 20\log|H_{FTBO}(j\omega_{-180°})| = 28\ dB$$

Les marges sont positives, le système est donc stable.

Question 3 : *Déterminer la valeur de K permettant d'obtenir une marge de gain* $M_G = 12\ dB$.

On cherche K tel que $M_G = 12\ dB$.

$$M_G = -G_{dB}(\omega_{-180°}) = 0 - 20\ log|K\ H_{FTBO}(j\omega_{-180°})| = -20\ log|K| + 28 = 12\ dB$$

$$\Rightarrow 20\ log|K| = 16\ dB$$

$$\Rightarrow K = 10^{\frac{16}{20}} = 6{,}3$$

Question 4 : *Déterminer la nouvelle marge de phase du système et conclure quant à sa stabilité.*

On lit graphiquement $\varphi(\omega_{0dB}) = -143°$

$$M_\varphi = \varphi(\omega_{0dB}) + 180° = -143° + 180° = 37°$$

Les marges sont positives, donc le système est encore stable.

La nouvelle marge de phase est plus faible, le système est plus rapide mais plus oscillant.

On prend usuellement une marge de phase de 45° pour optimiser le fonctionnement du système, ce qui augmenterait la marge de gain.

Question 5 : *En précisant la méthode permettant de le calculer, déterminer l'écart statique* ε_s *du système corrigé pour une entrée indicielle.*

D'après le tableau des écarts statiques d'un système non perturbé du cours, pour une entrée en échelon et un système de classe 1 (car asymptote en 0 rad/s de $-20dB/dec$), $\varepsilon_s = 0$.

Remarque :

Erreur statique $e_{r\infty}$		$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Impulsion	$E(p) = 1$	0	0	0
Echelon	$E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0
Rampe	$E(p) = \frac{V_0}{p^2}$	∞	$\frac{V_0}{K}$	0
Parabole	$E(p) = \frac{a_0}{p^3}$	∞	∞	$\frac{a_0}{K}$
Pour un système de FTBO de classe α et de gain statique K				

Sinon, il faut le redémontrer avec le théorème de la valeur finale.

$$\varepsilon_S = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0^+} \varepsilon(p) = \lim_{p\to 0^+} \varepsilon(p) = \lim_{p\to 0^+} p\frac{1}{1+KF(p)}\frac{1}{p} = 0$$

Exercice 8 : **AXE DE ROBOT**

Question 1 : *Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte, notée $B(p)$, de cette commande d'axe.*

$$B(p) = C(p)\frac{K_C\frac{k}{RJp+k^2}}{1+K_C\frac{k}{RJp+k^2}G_T}\lambda\frac{1}{p}K_\alpha = C(p)\frac{1}{p}\frac{K_Ck\,\lambda K_\alpha}{RJp+k^2+K_CkG_T} = C(p)\frac{1}{p}\frac{\frac{K_Ck\,\lambda K_\alpha}{k^2+K_CkG_T}}{\frac{RJ}{k^2+K_CkG_T}p+1}$$

Question 2 : *Conclure sur la possibilité de pouvoir respecter les critères imposés par le cahier des charges en termes de précision avec un correcteur proportionnel.*

Erreur statique $e_{r\infty}$		$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Impulsion	$E(p) = 1$	0	0	0
Echelon	$E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0
Rampe	$E(p) = \frac{V_0}{p^2}$	∞	$\frac{V_0}{K}$	0
Parabole	$E(p) = \frac{a_0}{p^3}$	∞	∞	$\frac{a_0}{K}$
Pour un système de FTBO de classe α et de gain statique K				

On prend $C(p) = K_p$.

Selon le cours, l'entrée et la sortie ne sont pas de même nature, on ne peut donc pas parler de la performance de précision. Cependant, nous allons étudier la valeur finale du flux d'écart, celui après le soustracteur.

La FTBO est de classe 1, l'erreur statique relative est $e_{r\infty\%} = 0\%$, l'erreur de traînage relative est é $e_{r\infty\%} = \frac{1}{K_{FTBO}}\ \%$.

Il faut donc :

$$\Rightarrow \frac{1}{K_{FTBO}} < 0{,}01$$
$$\Rightarrow \frac{1}{K_p\frac{K_Ck\,\lambda K_\alpha}{k^2+K_CkG_T}} < 0{,}01$$
$$\Rightarrow \frac{k^2+K_CkG_T}{0{,}01K_Ck\,\lambda K_\alpha} < K_p$$

Le correcteur proportionnel permet de satisfaire les exigences de précision.

Exercice 9 : **ASSERVISSEMENT EN VITESSE**

Question 1 : *Déterminer l'erreur statique et l'erreur statique relative en régime permanent.*

On lit graphiquement :

$$e_{r\infty} = \omega_{c0} - \omega_\infty = 8 - 10 = -2\ rad/s$$
$$e_{r\infty\%} = \left|\frac{e_{r\infty}}{\omega_{c0}}\right| = \left|\frac{-2}{10}\right| = 20\%$$

Question 2 : *A partir de la réponse, déterminer le gain de la FTBO.*

Erreur statique $e_{r\infty}$		$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Impulsion	$E(p) = 1$	0	0	0
Echelon	$E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0
Rampe	$E(p) = \frac{V_0}{p^2}$	∞	$\frac{V_0}{K}$	0
Parabole	$E(p) = \frac{a_0}{p^3}$	∞	∞	$\frac{a_0}{K}$
Pour un système de FTBO de classe α et de gain statique K				

D'après le schéma-bloc, $H_{FTBO}(p)$ est de classe 0 car tous les blocs sont de classe 0.

Pour un échelon, l'erreur statique relative est donc :

$$e_{r\infty\%} = \frac{1}{1+K_{FTBO}} = 20\%$$
$$\Rightarrow K_{FTBO} = \frac{1}{0{,}2} - 1 = 4$$

Question 3 : *On souhaite une erreur statique relative inférieure à 1 % ; quelle valeur doit-on donner au gain du correcteur ? Quel problème peut poser la valeur du gain ainsi déterminée ?*

On veut :

$$e_{r\infty\%} = \frac{1}{1 + K_{FTBO}} < 0{,}01$$
$$\Rightarrow 1 + K_{FTBO} > 100$$
$$\Rightarrow K_{FTBO} > 99$$

Le gain du correcteur doit passer de 4 à 99, donc être multiplié par $\frac{99}{4}$. La tension en sortie d'amplificateur sera donc très importante.

Une tension importante pose plusieurs problèmes :

- endommagement du matériel électrique, notamment du moteur ;
- difficulté de transport de tension élevé.

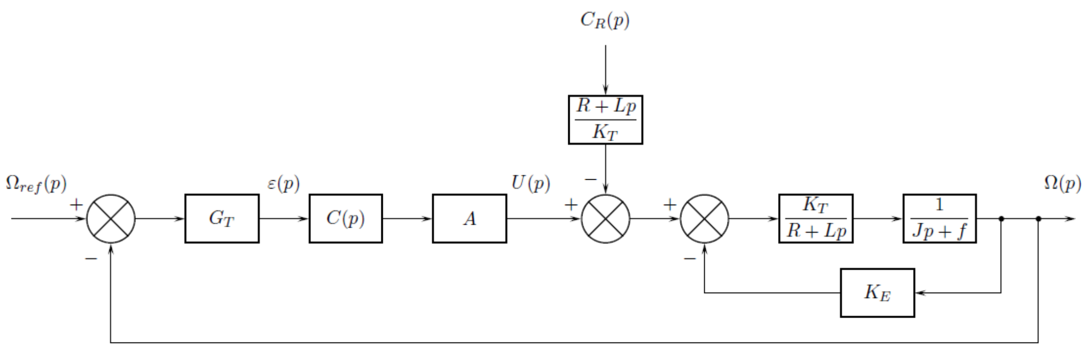
Un correcteur trop important peut :

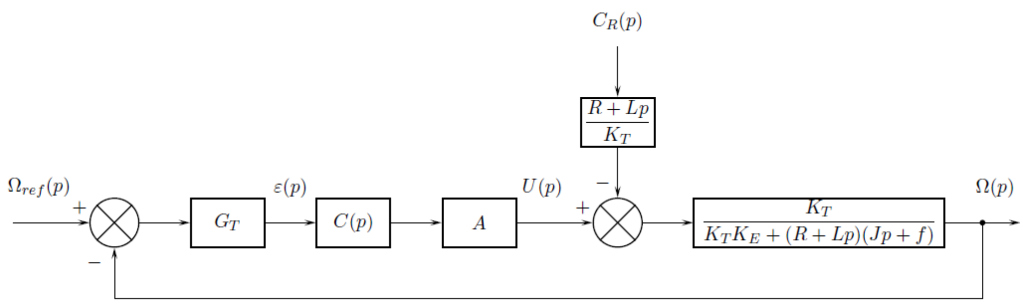
- rendre instable le système ;
- rendre plus lent le système.

Question 4 : *La perturbation provoque-t-elle une erreur supplémentaire en régime permanent ? donner sa valeur.*

La classe des deux fonctions de transfert est de 0. Donc pour une entrée en échelon, la perturbation va introduire une erreur supplémentaire.

Erreur statique $e_{r\infty}$		$\alpha_1 = 0$		$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 = 2$
Impulsion	$P(p) = 1$	0		0	0
Echelon	$P(p) = \frac{E_0}{p}$	$\alpha_2 = 0$ $\frac{K_2E_0}{1+K_1K_2}$	$\alpha_2 \geq 1$ $\frac{E_0}{K_1}$	0	0
Rampe	$P(p) = \frac{V_0}{p^2}$	∞		$\frac{V_0}{K_1}$	0
Parabole	$P(p) = \frac{a_0}{p^3}$	∞		∞	$\frac{a_0}{K_1}$
Pour un système de FTBO de classe $\alpha_1 + \alpha_2$ et α_1 la classe de la fonction de transfert avant la perturbation					





On prend $\Omega_{ref}(p) = 0$ et $C(p) = K$:

$$\left.\frac{\Omega(p)}{C_R(p)}\right|_{\Omega_{ref}(p)=0} = -\frac{R+Lp}{K_T}\frac{\frac{K_T}{(R+Lp)(f+Jp)+K_EK_T}}{1+G_TKA\frac{K_T}{(R+Lp)(f+Jp)+K_EK_T}} = -\frac{R+Lp}{K_T}\frac{K_T}{(R+Lp)(f+Jp)+K_EK_T+G_TKAK_T}$$
$$= -\frac{R+Lp}{(R+Lp)(f+Jp)+K_EK_T+G_TKAK_T}$$

La limite existe et est finie, d'après le théorème de la valeur finale :

$$\omega_\infty = lim_{t\to+\infty}\omega(t) = lim_{p\to0^+}\, p\big(H_1(p)\Omega_{ref}(p) + H_2(p)C_R(p)\big) = lim_{p\to0^+}\, p\left(H_1(p)\frac{\Omega_{ref0}}{p} - \frac{R}{Rf+K_EK_T+G_TKAK_T}\frac{C_{R0}}{p}\right)$$
$$= lim_{p\to0^+} H_1(p)\Omega_{ref0} - \frac{R}{Rf+K_EK_T+G_TKAK_T}C_{R0}$$

Question 5 : *Quelle proposition peut-on faire pour améliorer la précision de cet asservissement de vitesse ?*

En plaçant un intégrateur en amont de la perturbation, on augmentera la classe à $\alpha_1 = 1$ et on rendra le système précis pour une consigne en échelon.

Erreur statique $e_{r\infty}$		$\alpha_1 = 0$		$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 = 2$
Impulsion	$P(p) = 1$	0		0	0
Echelon	$P(p) = \frac{E_0}{p}$	$\alpha_2 = 0$ $\frac{K_2 E_0}{1 + K_1 K_2}$	$\alpha_2 \geq 1$ $\frac{E_0}{K_1}$	0	0
Rampe	$P(p) = \frac{V_0}{p^2}$	∞		$\frac{V_0}{K_1}$	0
Parabole	$P(p) = \frac{a_0}{p^3}$	∞		∞	$\frac{a_0}{K_1}$
Pour un système de FTBO de classe $\alpha_1 + \alpha_2$ et α_1 la classe de la fonction de transfert avant la perturbation					

Exercice 10 : **COMMANDE DE GOUVERNE**

Question 1 : *Déterminer les fonctions de transfert $G(p)$ et $W(p)$ telles que le schéma proposé puisse se mettre sous la forme de la figure 3.*

D'après la figure 3 :

$$X(p) = G(p)(Q(p) - W(p)F_A(p))$$

D'après la figure 2 :

On prend $F_A(p) = 0$.

$$\left.\frac{X(p)}{Q(p)}\right|_{F_A(p)=0} = \frac{\frac{2B}{V_0 p} S \frac{1}{p(mp+\mu)}}{1 + \frac{2B}{V_0 p} S \frac{1}{p(mp+\mu)} Sp} = \frac{2BS}{V_0 p^2 (mp+\mu) + 2BS^2 p} = \underbrace{\frac{2BS}{p(mV_0 p^2 + \mu V_0 p + 2BS^2)}}_{G(p)}$$

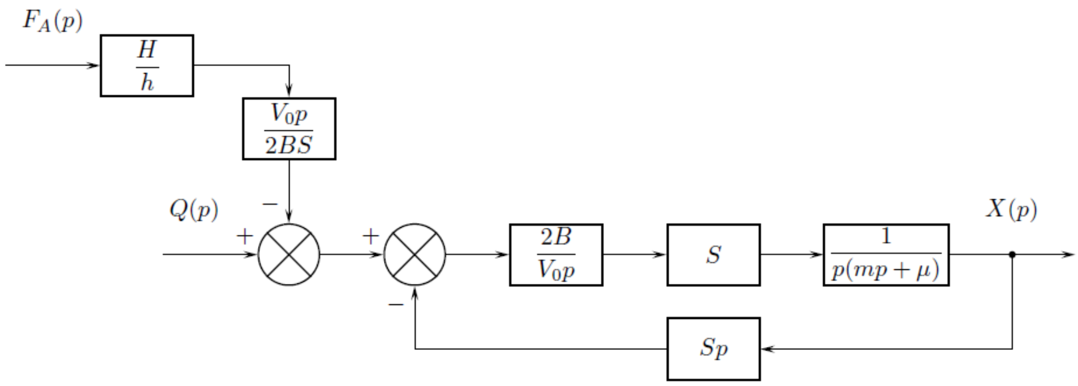
On prend $Q(p) = 0$.

$$\left.\frac{X(p)}{F_A(p)}\right|_{Q(p)=0} = -\frac{H}{h} \frac{\frac{1}{p(mp+\mu)}}{1 + \frac{2B}{V_0 p} S \frac{1}{p(mp+\mu)} Sp} = \underbrace{-\frac{H}{h} \frac{V_0 p}{p(mV_0 p^2 + \mu V_0 p + 2BS^2)}}_{-G(p)W(p)}$$

Par identification :

$$\begin{cases} G(p) = \frac{2BS}{p(mV_0 p^2 + \mu V_0 p + 2BS^2)} \\ W(p) = \frac{H}{h} \frac{V_0 p}{2BS} \end{cases}$$

Remarque : avec une transformation de schéma-bloc, on peut trouver plus rapidement ce résultat.



Question 2 : *Quel nom donner au bloc contenant $A(p)$ et quelle fonction de transfert faut-il y poser ? Justifier la réponse.*

A(p) est un bloc d'adaptation entre la consigne et la carte électronique. Il s'appelle Interface Homme/Machine, ou transducteur.

$$\varepsilon(p) = A(p)X_c(p) - K_M X(p)$$

On veut que si $X_c(p) = X(p)$ alors $\varepsilon(p) = 0$. Donc $A(p) = K_M$.

Question 3 : *Montrer qu'en régime permanent, le signal de sortie n'est pas affecté par une perturbation en échelon de force d'amplitude F_0.*

Les 2 FTBO sont de classe 1. Donc pour une entrée en échelon, le système sera précis, il n'est pas affecté par une perturbation.

Remarque : attention, on parle bien des FTBO, c'est-à-dire du produit des blocs, pas des FTBF. On pourrait retrouver ce résultat avec le théorème de la valeur finale.

Erreur statique $e_{r\infty}$		$\alpha_1 = 0$		$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 = 2$
Impulsion	$P(p) = 1$	*0*		*0*	*0*
Echelon	$P(p) = \frac{E_0}{p}$	$\alpha_2 = 0$ $\frac{K_2E_0}{1+K_1K_2}$	$\alpha_2 \geq 1$ $\frac{E_0}{K_1}$	0	0
Rampe	$P(p) = \frac{V_0}{p^2}$	∞		$\frac{V_0}{K_1}$	0
Parabole	$P(p) = \frac{a_0}{p^3}$	∞		∞	$\frac{a_0}{K_1}$
Pour un système de FTBO de classe $\alpha_1 + \alpha_2$ et α_1 la classe de la fonction de transfert avant la perturbation					

Question 4 : *Quelle expression doit prendre le gain de boucle afin de satisfaire aux exigences du cahier des charges concernant la précision ?*

Le CdCF demande un système précis pour une consigne en échelon.

$$\left.\frac{X(p)}{X_c(p)}\right|_{Q(p)=0} = \frac{K_MCK\dfrac{2BS}{p(mV_0p^2+\mu V_0p+2BS^2)}}{1+K_MCK\dfrac{2BS}{p(mV_0p^2+\mu V_0p+2BS^2)}} = \frac{K_MCK2BS}{p(mV_0p^2+\mu V_0p+2BS^2)+K_MCK2BS}$$
$$= \frac{1}{\dfrac{mV_0}{K_MCK2BS}p^3+\dfrac{\mu V_0}{K_MCK2BS}p^2+\dfrac{S}{K_MCK}p+1}$$

$e_{r\infty} = x_{c\infty} - x_\infty = (1-K)x_{c\infty} = 0\ mm$ donc le système est précis.

Le CdCF demande un écart de trainage de 2mm pour une rampe de pente 0,1 mm/s.

La FTBO est de classe 1, donc pour une consigne en rampe l'écart statique est :

$$e_{r\infty} = \frac{V_0}{K_{FTBO}} = \frac{0{,}1}{1} = 0{,}1\ mm/s < 0{,}2mm/s$$

Donc le CdCF est respecté pour les 2 exigences.

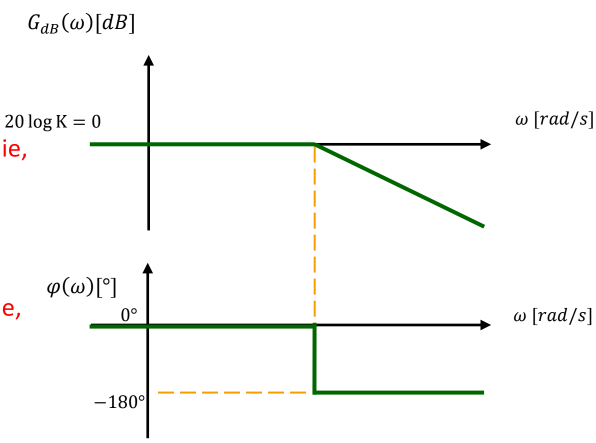
Erreur statique $e_{r\infty}$		$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Impulsion	$E(p) = 1$	0	0	0
Echelon	$E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0
Rampe	$E(p) = \frac{V_0}{p^2}$	∞	$\frac{V_0}{K}$	0
Parabole	$E(p) = \frac{a_0}{p^3}$	∞	∞	$\frac{a_0}{K}$
Pour un système de FTBO de classe α et de gain statique K				

Exercice 11 : **ASSERVISSEMENT EN VITESSE ANGULAIRE D'UN MOTEUR ELECTRIQUE**

Question 1 : *Déterminer les marges du système non corrigé.*

On prend $A = 1$ et $C(p) = 1$.

$$H_{FTBO}(p) = \frac{1}{(1+0{,}08p)(1+0{,}002p)}$$



$K_{FTBO} = 1$

donc $\forall\omega > 0, G_{dB}(\omega) < 0\ dB$

Remarque : mathématiquement la marge de phase n'est pas définie, mais on va noter :

donc $M_\varphi = 180°$

$\forall\omega > 0, \varphi(\omega) > -180\ °$

Remarque : mathématiquement la marge de gain n'est pas définie, mais on va noter :

donc $M_G = +\infty > 45\ °$

Remarque : on ne peut donc pas les tracer.

Question 2 : *Déterminer l'erreur en régime permanent du système non corrigé pour une consigne en échelon d'amplitude ω_{c0}.*

La FTBO est de classe 0, donc pour une consigne en échelon l'écart statique est :

$$e_{r\infty} = \frac{\omega_{c0}}{1+K_{FTBO}} = \frac{\omega_{c0}}{1+1} = \frac{\omega_{c0}}{2} > 0\ rad/s$$

Erreur statique $e_{r\infty}$		$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Impulsion	$E(p) = 1$	0	0	0
Echelon	$E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0
Rampe	$E(p) = \frac{V_0}{p^2}$	∞	$\frac{V_0}{K}$	0
Parabole	$E(p) = \frac{a_0}{p^3}$	∞	∞	$\frac{a_0}{K}$
Pour un système de FTBO de classe α et de gain statique K				

Question 3 : *Conclure.*

Le critère de stabilité est respecté mais pas le critère de précision, on va donc devoir utiliser un correcteur.

Question 4 : *Quelle est la nature de ce correcteur ? Que peut-on attendre comme amélioration sur le système ?*

Ce correcteur est un correcteur proportionnel intégral, il va permettre d'augmenter la classe de la FTBO et donc de rendre le système précis pour une consigne en échelon. Il faut cependant vérifier qu'il ne rend pas le système instable car on aura une FTBO d'ordre 3.

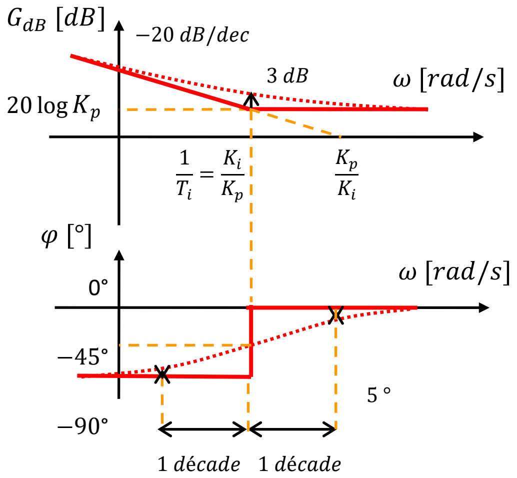
Erreur statique $e_{r\infty}$		$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Impulsion	$E(p) = 1$	0	0	0
Echelon	$E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0
Rampe	$E(p) = \frac{V_0}{p^2}$	∞	$\frac{V_0}{K}$	0
Parabole	$E(p) = \frac{a_0}{p^3}$	∞	∞	$\frac{a_0}{K}$
Pour un système de FTBO de classe α et de gain statique K				

Question 5 : *Tracer le diagramme de Bode asymptotique de ce correcteur pour $K_p > 1$. Indiquer les caractéristiques :*

- *pentes des asymptotes ;*
- *expressions de la pulsation, du gain en dB et de la phase au point de cassure.*

Compléter avec l'allure des courbes réelles.

$$C(p) = \frac{K_p}{T_i p}(1 + T_i p) \quad \text{avec } T_i = \frac{K_p}{K_i}$$



Remarque : on rappelle que, pour un ordre 1, à une décade de la pulsation de cassure la phase réelle est encore décalée de 5 °. On ne s'en sert pas en général, sauf si on veut régler finement un correcteur.

Question 6 : *Déterminer graphiquement puis analytiquement les paramètres $K_p > 1$ et $K_i > 1$ du correcteur par la méthode du placement fréquentiel.*

Remarque : avec cette méthode, le correcteur est dimensionné tel que l'influence de la correction intégrale s'arrête une décade avant la pulsation pour laquelle le gain de la FTBO du système corrigé vaut 0 dB.

Méthode 1 : Réglage grossier

Remarque : Etape 1 : on choisit le coefficient K_p pour obtenir la marge de phase désirée avec la correction proportionnelle seule.

Méthode graphique

Remarque : méthode la plus courante au concours.

On veut $M_\varphi = 45°$.

On lit graphiquement (voir Bode ci-dessous) :

$$\omega_{0dB} \approx 520\ rad/s$$

On doit translater la courbe de :

$$20\log K_p \approx +35dB \Rightarrow K_p \approx 10^{\frac{35}{20}} \approx 56{,}2$$

Méthode analytique

On cherche ω_{0dB} :

$$arg(H_{FTBO}(j\omega_{0dB})) = -135° \Rightarrow \omega_{0dB} \approx 524\ rad/s$$

$$\text{solve}\left(\text{angle}\left(\frac{1}{(1+0.08\cdot i\cdot x)\cdot(1+0.002\cdot i\cdot x)}\right) = -135\cdot\frac{2\cdot\pi}{360}, x\right) \quad x=524.418$$

On cherche K_p :

$$|H_{FTBO\ cor}(j\omega_{0dB})| = 1 \Rightarrow \left|\frac{K_p}{(1+0{,}08j\omega_{0dB})(1+0{,}002j\omega_{0dB})}\right| = 1$$

$$\Rightarrow K_p \approx 60{,}8$$

$$\text{solve}\left(\left|\frac{x}{(1+0.08\cdot i\cdot 524.41)\cdot(1+0.002\cdot i\cdot 524.41)}\right| = 1, x\right) \quad x=-60.813 \text{ or } x=60.813$$

Remarque : Etape 2 : on place l'effet intégral, mais il ne doit pas, ou peu, modifier le réglage précédent.

On cherche K_i :

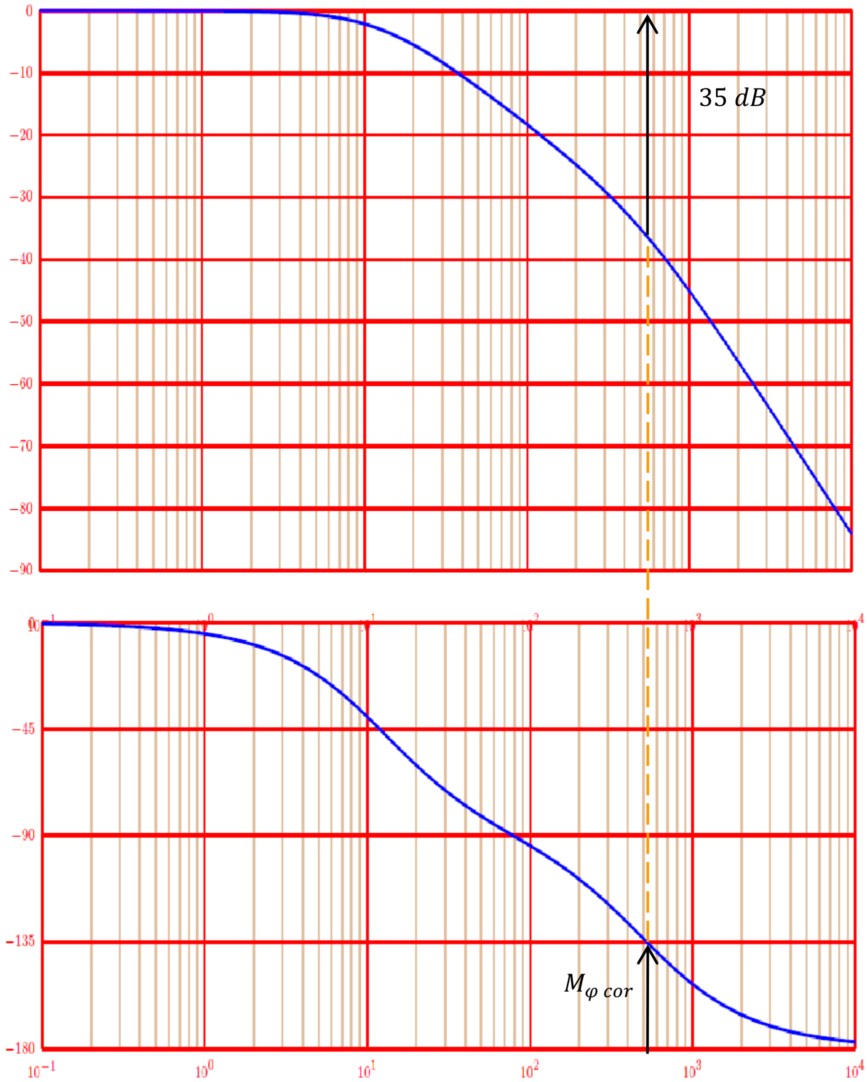
On prend $\frac{1}{T_i} = \frac{\omega_{0dB}}{10} \Rightarrow T_i = \frac{10}{\omega_{0dB}}$

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} = \frac{K_p\omega_{0dB}}{10} \approx \frac{56{,}2.520}{10} \approx 2920$$

On cherche K_i :

On prend $\frac{1}{T_i} = \frac{\omega_{0dB}}{10} \Rightarrow T_i = \frac{10}{\omega_{0dB}}$

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} = \frac{K_p\omega_{0dB}}{10} \approx \frac{60{,}8.524}{10} \approx 3185$$



Méthode 2 : Réglage fin

Remarque : on peut anticiper le déphasage de $-5°$ que crée la mise en place de l'effet intégral du correcteur au niveau de la pulsation ω_{0dB} du système corrigé uniquement avec l'effet proportionnel du correcteur.

Pour cela, il suffit, lors de la première étape du réglage, de choisir une valeur de K_p de façon à obtenir la marge de phase désirée $+5°$.

Méthode graphique

On veut $M_\varphi = 50°$.

On lit graphiquement :

$$\omega_{0dB} \approx 430\ rad/s$$

On doit translater la courbe de :

$$20 \log K_p \approx +33\ dB \Rightarrow K_p \approx 10^{\frac{33}{20}} \approx 44{,}7$$

On cherche K_i :

On prend $\frac{1}{T_i} = \frac{\omega_{0dB}}{10} \Rightarrow T_i = \frac{10}{\omega_{0dB}}$

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} = \frac{K_p \omega_{0dB}}{10} \approx \frac{44{,}7.430}{10} \approx 1920$$

Méthode analytique

On cherche ω_{0dB} :

$$arg(H_{FTBO}(j\omega_{0dB})) = -130° \Rightarrow \omega_{0dB} \approx 444\ rad/s$$

On cherche K_p :

$$|H_{FTBO\ cor}(j\omega_{0dB})| = 1 \Rightarrow \left|\frac{K_p}{(1+0{,}08j\omega_{0dB})(1+0{,}002j\omega_{0dB})}\right| = 1$$

$$\Rightarrow K_p \approx 47{,}1$$

On cherche K_i :

On prend $\frac{1}{T_i} = \frac{\omega_{0dB}}{10} \Rightarrow T_i = \frac{10}{\omega_{0dB}}$

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} = \frac{K_p \omega_{0dB}}{10} \approx \frac{47{,}1.444}{10} \approx 2090$$

Question 7 : *Déterminer les paramètres $K_p > 1$ et $K_i > 1$ du correcteur par la méthode de la compensation du pôle dominant.*

Remarque : la méthode de réglage par compensation du pôle dominant consiste à choisir le coefficient T_i de façon à compenser (éliminer) le pôle dominant de la FTBO. Ceci permet de repousser ω_{0dB}. Ainsi on améliore la rapidité par rapport au modèle non corrigé. Dans notre cas, on cherche à compenser le pôle $-\frac{1}{0,08}$ de la FTBO.

Méthode 3 : Compensation de pôle dominant

Remarque : Etape 1 : on détermine T_i.

On prend $T_i = 0,08\ s$.

On a donc :

$$H_{FTBO\ cor}(p) = C(p)AH(p) = \frac{K_p(1+T_ip)}{T_ip}\frac{1}{(1+0,08p)(1+0,002p)} = \frac{K_p}{T_ip}\frac{1}{1+0,002p}$$

Remarque : Etape 2 : on déterminer K_p à partir de la marge de phase imposée.

On veut $M_\varphi = 45°$.

On cherche ω_{0dB} :

$$arg(H_{FTBO\ cor}(j\omega_{0dB})) = -135° \Rightarrow \omega_{0dB} \approx 500\ rad/s$$

$$\text{solve}\left(\text{angle}\left(\frac{1}{0.08\cdot i\cdot x}\cdot\frac{1}{1+0.002\cdot i\cdot x}\right)=-135\cdot\frac{2\cdot\pi}{360},x\right) \quad x=500.$$

On cherche K_p :

$$|H_{FTBO\ cor}(j\omega_{0dB})| = 1 \Rightarrow \left|\frac{K_p}{0,08j\omega_{0dB}(1+0,002j\omega_{0dB})}\right| = 1 \Rightarrow K_p \approx 56,5$$

On cherche K_i :

On prend $K_i = \frac{K_p}{T_i} \approx \frac{56,8}{0,08} \approx 710$

Question 8 : *Quel est le meilleur réglage.*

	Réglage grossier	Réglage fin	Compensation de pôle
Stabilité	$M_\varphi = 40°$	$M_\varphi = 45°$	$M_\varphi = 45°$
Rapidité	$\omega_{0dB} \approx 524\ rad/s$	$\omega_{0dB} \approx 444\ rad/s$	$\omega_{0dB} \approx 500\ rad/s$
Précision	$e_{r\infty} = 0\ rad/s$	$e_{r\infty} = 0\ rad/s$	$e_{r\infty} = 0\ rad/s$

Le réglage grossier ne respecte pas le critère de stabilité.

Le réglage par compensation de pôle est plus rapide que le réglage fin, car une large bande passante caractérise un système rapide.

Exercice 12 : **REGLAGE D'UN CORRECTEUR PI**

Question 1 : *Déterminer la FTBF dans les deux cas, mettre sous forme canonique puis exprimer les paramètres caractéristiques des fonctions de transfert.*

Pour $T_i = 0,5\ s$:

$$H(p) = \frac{\frac{K_p}{0,5p}\frac{1}{1+5p}}{1+\frac{K_p}{0,5p}\frac{1}{1+5p}} = \frac{K_p}{0,5p(1+5p)+K_p} = \frac{1}{1+\frac{0,5}{K_p}p+\frac{2,5}{K_p}p^2}$$

On identifie avec un second ordre de la forme $\frac{1}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0{}^2}p^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ \frac{2z}{\omega_0} = \frac{0,5}{K_p} \\ \frac{1}{\omega_0{}^2} = \frac{2,5}{K_p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ z = \frac{1}{2}\frac{0,5}{K_p}\sqrt{\frac{K_p}{2,5}} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{K_p}{2,5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ z = \frac{0,25}{\sqrt{2,5K_p}} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{K_p}{2,5}} \end{cases}$$

Pour $T_i = 5\ s$:

$$H(p) = \frac{\frac{K_p}{5p}\frac{1}{1+0,5p}}{1+\frac{K_p}{5p}\frac{1}{1+0,5p}} = \frac{K_p}{5p(1+0,5p)+K_p} = \frac{1}{1+\frac{5}{K_p}p+\frac{2,5}{K_p}p^2}$$

De même :

$$\Rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ \dfrac{2z}{\omega_0} = \dfrac{5}{K_p} \\ \dfrac{1}{{\omega_0}^2} = \dfrac{2,5}{K_p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ z = \dfrac{1}{2}\dfrac{5}{K_p}\sqrt{\dfrac{K_p}{2,5}} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_p}{2,5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ z = \dfrac{2,5}{\sqrt{2,5K_p}} = \sqrt{\dfrac{2,5}{K_p}} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_p}{2,5}} \end{cases}$$

Question 2 : *Déterminer K_p pour chacun des cas.*

On fixe $z = 0,5$.
Pour $T_i = 0,5\ s$:

$$z = \frac{0,25}{\sqrt{2,5K_p}}$$
$$\Rightarrow z^2 = \frac{0,25^2}{2,5K_p}$$
$$\Rightarrow K_p = \frac{0,25^2}{2,5z^2} = \frac{0,25^2}{2,5.\,0,5^2} = 0,1$$

Pour $T_i = 5\ s$:

$$z = \sqrt{\frac{2,5}{K_p}}$$
$$\Rightarrow K_p = \frac{2,5}{z^2} = \frac{2,5}{0,5^2} = \frac{2,5}{0,5^2} = 10$$

Question 3 : *Déterminer alors la largeur de la bande passante à -3dB pour chacun des cas.*

La fonction est un filtre passe bas, donc $G(\omega_{-3dB}) = 0,7G_{dB}(0) = 0,7$
Remarque : ou bien $G_{dB}(\omega_{-3dB}) = G_{dB}(0) - 3dB$
Pour $T_i = 0,5\ s$:

$$|H(j\omega_{-3dB})| = \left|\frac{1}{1 + \frac{5}{0,1}j\omega_{-3dB} - \frac{2,5}{0,1}{\omega_{-3dB}}^2}\right| = 0,7$$

$$\text{solve}\left(\left|\frac{1}{1+\frac{0.5}{0.1}\cdot i\cdot x-\frac{2.5}{0.1}\cdot x^2}\right|=0.7,x\right)$$
$$x=-0.255823 \text{ or } x=0.255823$$

$$\Rightarrow \omega_{-3dB} = 0,26\ rad/s$$

Pour $T_i = 5\ s$:

$$|H(j\omega_{-3dB})| = \left|\frac{1}{1 + \frac{5}{10}j\omega_{-3dB} - \frac{2,5}{10}{\omega_{-3dB}}^2}\right| = 0,7$$

$$\text{solve}\left(\left|\frac{1}{1+\frac{5}{10}\cdot i\cdot x-\frac{2.5}{10}\cdot x^2}\right|=0.7,x\right)$$
$$x=-2.55823 \text{ or } x=2.55823$$

$$\Rightarrow \omega_{-3dB} = 2,56\ rad/s$$

Question 4 : *Conclure.*

	$T_i = 0,5\ s$	$T_i = 5\ s$
Stabilité	Même z	
Précision	Système précis car correcteur intégral	
Rapidité	$t_{r5\%} = 27\ s$	$t_{r5\%} = 3\ s$
	$\omega_{-3dB} = 0,26\ rad/s$	$\omega_{-3dB} = 2,56\ rad/s$

On choisit donc le réglage $T_i = 5\ s$ car c'est le plus rapide.

Question 5 : *Déterminer K_p pour chacun des cas.*

La fonction est un filtre passe bas, donc $G(\omega_{-3dB}) = 0{,}7 G_{dB}(0) = 0{,}7$

On fixe $\omega_{-3dB} = 1$.

Pour $T_i = 0{,}5\ s$:

$$|H(j\omega_{-3dB})| = \left|\frac{1}{1 + \frac{0{,}5}{K_p} j1 - \frac{2{,}5}{K_p} 1^2}\right| = 0{,}7$$

$$\text{solve}\left(\left|\frac{1}{1+\frac{0.5}{x}\cdot i-\frac{2.5}{x}}\right| = 0.7, x\right)$$

$$x=-5.86816 \text{ or } x=1.06424$$

$$\Rightarrow K_p = 1{,}06$$

Pour $T_i = 5\ s$:

$$|H(j\omega_{-3dB})| = \left|\frac{1}{1 + \frac{5}{10} j1 - \frac{2{,}5}{10} 1^2}\right| = 0{,}7$$

$$\text{solve}\left(\left|\frac{1}{1+\frac{5}{x}\cdot i-\frac{2.5}{x}}\right| = 0.7, x\right)$$

$$x=-8.38476 \text{ or } x=3.58084$$

$$\Rightarrow K_p = 3{,}58$$

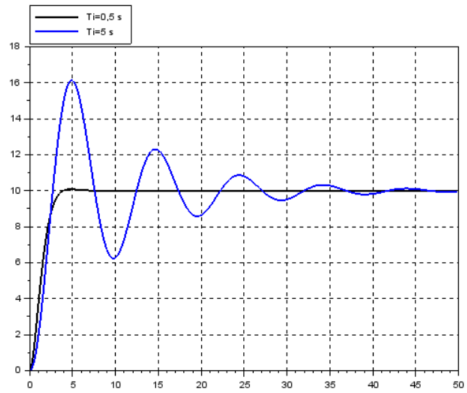
Question 6 : *Déterminer alors le coefficient d'amortissement pour chacun des cas.*

Pour $T_i = 0{,}5\ s$:

$$z = \frac{0{,}25}{\sqrt{2{,}5 K_p}} = \frac{0{,}25}{\sqrt{2{,}5.0{,}15}} = 0{,}15$$

⇒Pour $T_i = 5\ s$:

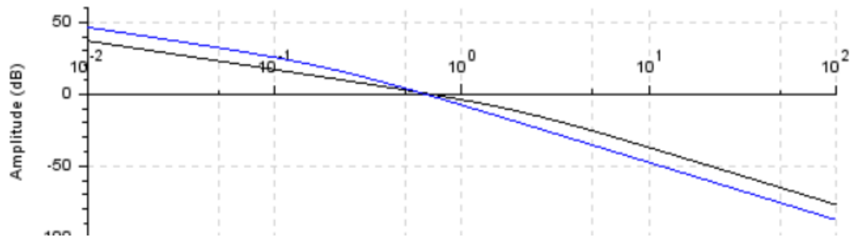
$$z = \sqrt{\frac{2{,}5}{K_p}} = \sqrt{\frac{2{,}5}{3{,}58}} = 0{,}83$$



Question 7 : *Conclure.*

	$T_i = 0{,}5\ s$	$T_i = 5\ s$
Stabilité	$z = 0{,}15$	$z = 0{,}83$
Précision	Système précis car correcteur intégral	
Rapidité	$\omega_{-3dB} = 1\ rad/s$	

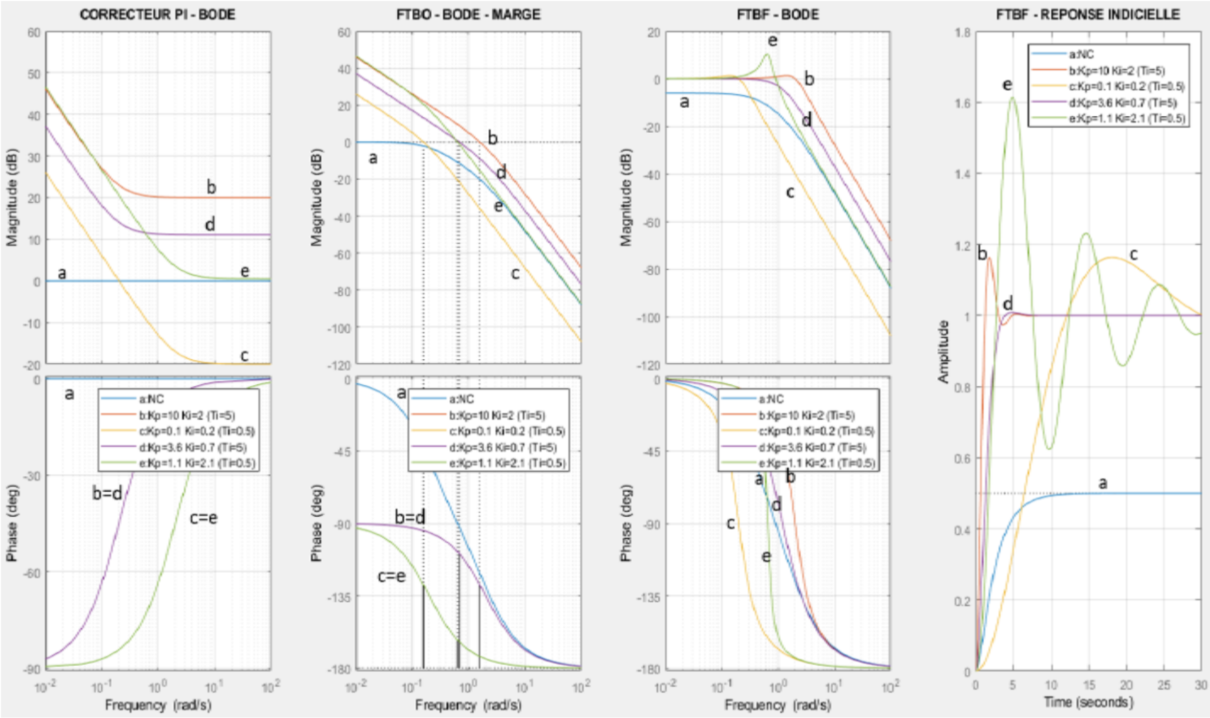
On choisit $T_i = 5\ s$ car le système est moins oscillatoire.



Conclure sur le réglage du correcteur PI.

Pour une méthode de compensation de pôle dominant :

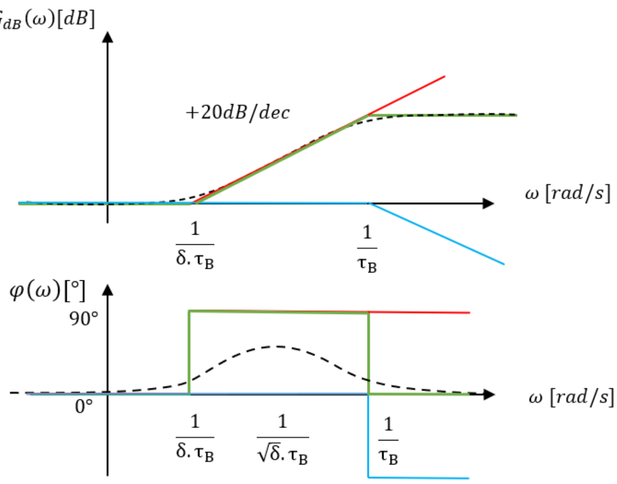
- On commence par régler la précision du système.
- Ensuite on choisit la constante de temps la plus élevé pour améliorer la rapidité (que l'on soit à stabilité constante ou à bande passante constante).



Exercice 13 : **CORRECTEUR A AVANCE DE PHASE DU ROBOVOLC**

Question 1 : *Tracer le diagramme de Bode asymptotique de la fonction* $H(p) = \frac{\delta.\tau_B.p+1}{\tau_B.p+1}$ *avec* $\delta > 1$

On trace le diagramme de Bode asymptotique : $\mathrm{H(p)} = \frac{\mathrm{T_{pi}.p+1}}{\tau_B.p+1} = \frac{\delta.\tau_B.p+1}{\tau_B.p+1}$



Remarque : Pour cette correction, nous tracerons aussi le diagramme réel.

Cette fonction de transfert réalise une avance de phase.

Question 2 : *Quel est l'intérêt de ce correcteur à avance de phase ?*

Il fait une action dérivée sur une plage de fréquence. Le correcteur à avance de phase ajoute de la phase. Il augmente la stabilité mais introduit des vibrations et du bruit. Il améliore la rapidité.

Question 3 : *En utilisant une moyenne logarithmique entre* $\frac{1}{\delta.\tau_B}$ *et* $\frac{1}{\tau_B}$ *montrer que la valeur maximale de la phase à lieu pour* $\omega_{maxi} = \frac{1}{\sqrt{\delta}.\tau_B}$.

ω_{maxi} correspond à la moyenne logarithmique entre $\frac{1}{\delta.\tau_B}$ et $\frac{1}{\tau_B}$.

$$\log \omega_{\text{maxi}} = \frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{\delta.\tau_B} + \log\frac{1}{\tau_B}\right) = \log\left(\sqrt{\frac{1}{\delta.\tau_B}.\frac{1}{\tau_B}}\right) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}.\tau_B}\right)$$

$$\Rightarrow \omega_{\text{maxi}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}.\tau_B}$$

Question 4 : *Déterminer δ tel que $\varphi(\omega_{maxi}) = 45°$*

On cherche δ tel que :

$$\varphi(\omega_{\text{maxi}}) = 45° \Rightarrow arg\left(\frac{\delta.\tau_B.j\omega_{\text{maxi}} + 1}{\tau_B.j\omega_{\text{maxi}} + 1}\right) = 45° \Rightarrow arg\left(\frac{\delta.\tau_B.j\frac{1}{\sqrt{\delta}.\tau_B} + 1}{\tau_B.j\frac{1}{\sqrt{\delta}.\tau_B} + 1}\right) = 45° \Rightarrow arg\left(\frac{j\sqrt{\delta} + 1}{j\frac{1}{\sqrt{\delta}} + 1}\right) = 45°$$

$$\Rightarrow \arctan(\sqrt{\delta}) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right) = 45° \Rightarrow \delta \approx 5{,}83$$

<u>Remarque :</u> A la calculette :

$$\text{solve}\left(\tan^{-1}(\sqrt{x}) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\pi}{4}, x\right) \quad x=5.82843$$

On étudie l'asservissement d'une MSAP, on donne la fonction suivante :

$$\text{FTBO}_{\text{corr}\Omega}(p) = K_{pi}.\frac{\delta.\tau_B.p + 1}{\delta.\tau_B.p}.\frac{B}{p.(1 + \tau_B.p)}$$

Avec $\delta = 5{,}83$, $B = 45\ (\text{rad/s})^2/\text{A}$, $\tau_B = 33{,}87\ \text{ms}$

Question 5 : *Déterminer K_{pi} tel que $G_{dB}(\omega_{maxi}) = 0dB$. Quel est l'intérêt ?*

On cherche K_{pi} tel que :

$$G_{dB}(\omega_{\text{maxi}}) = 0\ \text{dB} \Rightarrow 20.\log|\text{FTBO}_{\text{corr}\Omega}(j\omega_{\text{maxi}})| = 0\ \text{dB} \Rightarrow |\text{FTBO}_{\text{corr}\Omega}(j\omega_{\text{maxi}})| = 1$$

$$\Rightarrow \left|K_{pi}.\frac{T_{pi}.j\omega_{\text{maxi}} + 1}{T_{pi}.j\omega_{\text{maxi}}}.\frac{B}{j\omega_{\text{maxi}}.(1 + \tau_B.j\omega_{\text{maxi}})}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \left|K_{pi}.\frac{\delta.\tau_B.j\frac{1}{\sqrt{\delta}.\tau_B} + 1}{\delta.\tau_B.j\frac{1}{\sqrt{\delta}.\tau_B}}.\frac{B}{j\frac{1}{\sqrt{\delta}.\tau_B}.\left(1 + \tau_B.j\frac{1}{\sqrt{\delta}.\tau_B}\right)}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \left|-K_{pi}.(j\sqrt{\delta} + 1).\frac{B}{\frac{1}{\tau_B}.\left(1 + j\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)}\right| = 1 \Rightarrow K_{pi} = \frac{1}{B.\sqrt{\delta}.\tau_B} \approx 0{,}272$$

<u>Remarque :</u> A la calculette :

$$\text{solve}\left(\left|-x\cdot(i\cdot\sqrt{5.828}+1)\cdot\frac{45}{\frac{1}{0.03387}\cdot\left(1+i\cdot\frac{1}{\sqrt{5.828}}\right)}\right| = 1, x\right)$$

$x=-0.271777$ or $x=0.271777$

Ne pas ajouter de gain en ω_{maxi} permet de modifier uniquement la phase.