

# Sciences industrielles

CPGE 2<sup>nd</sup> année



Performances  
des systèmes asservis



## Sommaire

<b>1</b>	<b>Systèmes commandés, systèmes asservis et perturbations</b>	<b>3</b>
1.1	Schéma-bloc d'une grandeur asservie perturbée	3
1.2	FTBO et FTBF	4
<b>2</b>	<b>Stabilité des systèmes</b>	<b>5</b>
2.1	Conditions de stabilité – critère algébrique	5
	Condition nécessaire et suffisante de stabilité	5
2.2	Réduction de l'ordre d'un modèle	6
	Condition nécessaire de stabilité	6
2.3	Conditions de stabilité – critère graphique	6
	Point critique	6
	Critère du revers dans le plan de Black – hors programme	7
2.4	Marge de phase et marge de gain des systèmes asservis	7
<b>3</b>	<b>Rapidité des systèmes</b>	<b>8</b>
3.1	Détermination graphique du temps de réponse à 5%	8
3.2	Temps de réponse d'un 1 <sup>er</sup> ordre	9
3.3	Temps de réponse d'un 2 <sup>nd</sup> ordre	9
<b>4</b>	<b>Précision des systèmes asservis</b>	<b>10</b>
4.1	Erreur statique d'un système non perturbé	10
4.2	Erreur statique due à la perturbation	11
<b>5</b>	<b>Améliorer les performances en corrigeant la commande</b>	<b>11</b>
5.1	Correcteur proportionnel P	12
5.2	Correcteur intégral I	13
5.3	Correcteur proportionnel intégral PI	13
5.4	Correcteur à retard de phase (ou correcteur PI réel)	14
5.5	Correcteur dérivé D et proportionnel dérivé PD	15
5.6	Correcteur à avance de phase (ou correcteur PD réel)	16
5.7	Correcteur proportionnel intégral dérivé PID	16
5.8	Bilan des performances des correcteurs	17
	<b>QUESTIONS DE COURS</b>	<b>18</b>

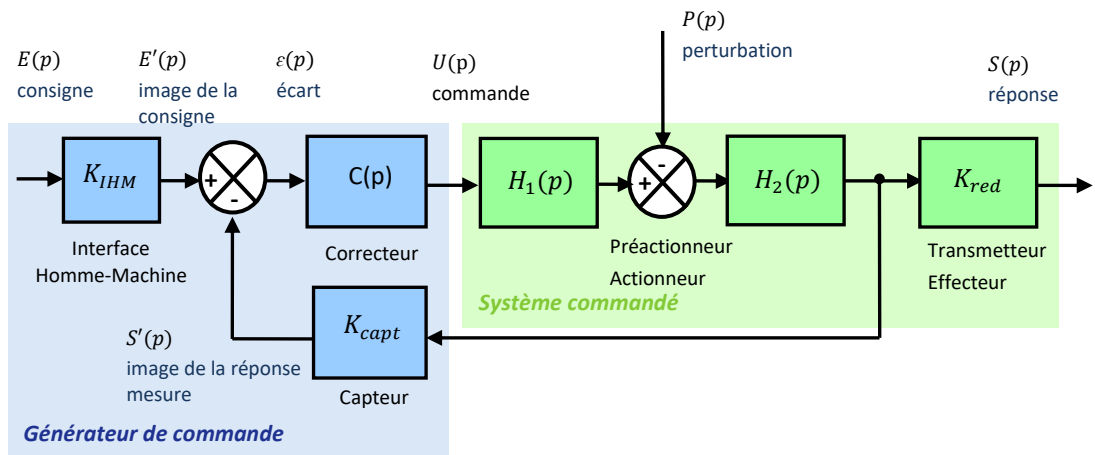
(1) La robustesse caractérise l'insensibilité du système aux perturbations extérieures.

Le souhait de l'ingénieur est d'avoir un système stable, rapide, précis et robuste<sup>(1)</sup>.  
 Asservir un système permet d'en améliorer les performances globales. Un système, instable en tant que système commandé, peut devenir stable une fois asservi. A l'inverse, il faut être attentif à ne pas rendre un système instable, ce qui entraînerait sa destruction.  
 On s'intéresse dans ce cours aux SLCI.

# 1 Systèmes commandés, systèmes asservis et perturbations

## 1.1 Schéma-bloc d'une grandeur asservie perturbée

La schéma bloc d'un système asservi perturbé est de la structure suivante :



Ce système possède 2 entrées et 1 sortie.

On souhaite rendre le système insensible aux perturbations. Pour cela, la commande doit être indépendante de l'utilisateur pour qu'elle puisse s'adapter aux variations de sortie dues aux perturbations.

Un **système asservi** est un système capable d'élaborer de manière **autonome** sa grandeur de **commande** à partir d'une valeur de **consigne** et d'une **mesure** de la réponse avec un **capteur**.

Une **grandeur de sortie** d'une activité d'un système est **asservie** si :

- il y a une **boucle de retour** avec un **capteur** ;
- un **correcteur** améliore les performances ;

Un système asservi est nécessairement bouclé, mais la **réciproque n'est pas vraie**.

On parle de système **suiveur** ou de poursuite lorsque l'entrée varie.  
 On parle de système **régulé**<sup>(2)</sup> lorsque l'entrée est constante.

On appelle **perturbation**, toute cause susceptible de modifier la sortie **indépendamment du signal de commande**.  
 Une perturbation est une entrée non fournie par l'utilisateur.

$$\varepsilon(p) = E'(p) - S'(p) = K_{IHM} E(p) - \frac{K_{capt}}{K_{red}} S(p)$$

On veut que si  $E(p) = S(p)$  alors  $\varepsilon(p) = 0$ , donc :

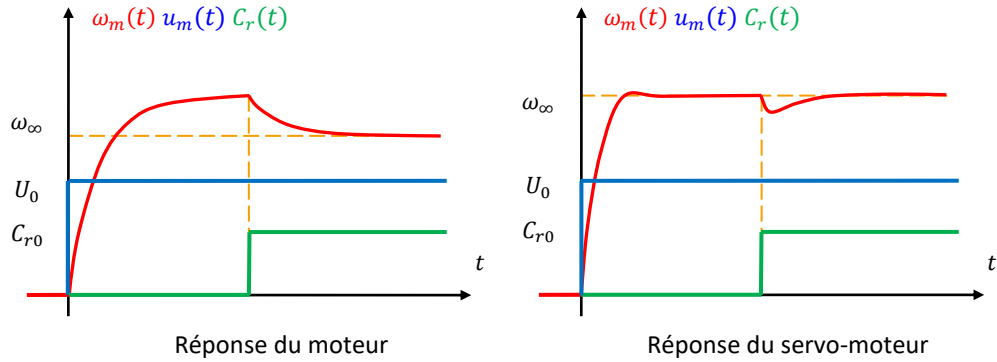
$$K_{IHM} = \frac{K_{capt}}{K_{red}}$$

On peut alors se ramener à un retour unitaire.

(2) Régulateur de vitesse, régulateur de chauffage...

**Exemple : réponse d'un MCC perturbé à un échelon de tension**

Prenons deux entrées positives.

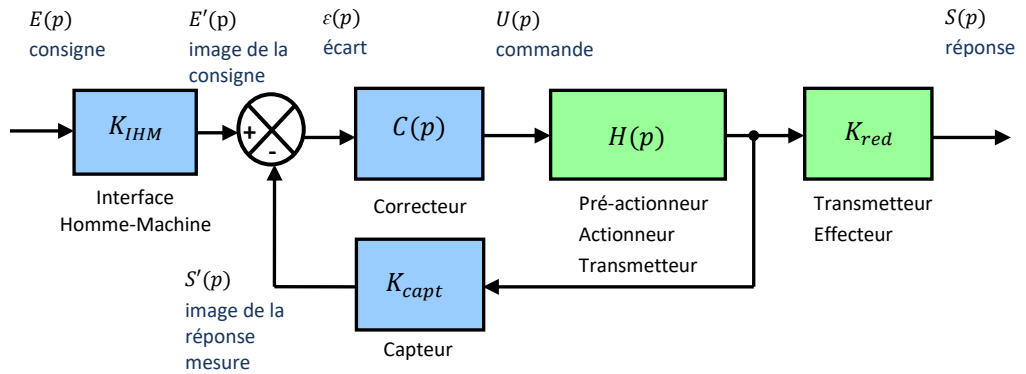


La perturbation réduit la vitesse de rotation du moteur.

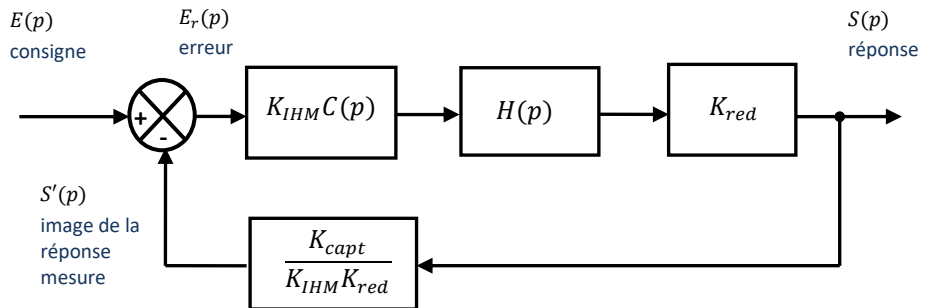
La correction réduit l'influence de la perturbation.

**1.2 FTBO et FTBF**

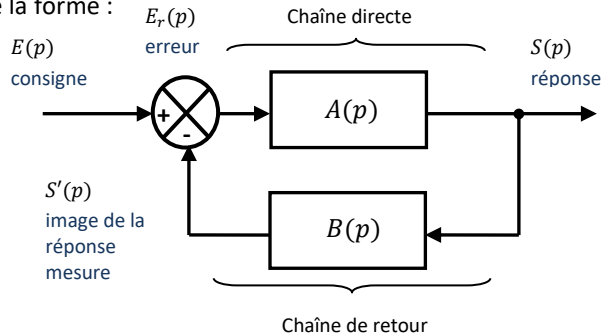
On considère un système asservi non perturbé à une entrée dans le cas générale.



On peut faire la transformation suivante :



Le schéma est donc de la forme :



Lorsque l'on fait des transformations de schéma bloc, on s'éloigne de la réalité technologique du système. Cependant, avec cette écriture, l'écart est égal à l'erreur. Plus l'écart est petit, plus le système est précis.

(1) On note parfois  $F(p)$  pour la FTBO et  $H(p)$  pour la FTBF.

Un système asservi est constitué de deux chaînes :

- la **chaîne directe**, entre le comparateur et le point de prélèvement du capteur, qui assure les fonctions de commande et de puissance ;
- la **chaîne de retour**, entre le point de prélèvement du capteur et le comparateur, qui assure la fonction de mesure de la réponse.

Si  $R(p) = 1$ , on parle de retour unitaire.

On définit la **fonction de transfert en boucle ouverte**<sup>(1)</sup> par :

$$FTBO(p) = \frac{S'(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{S'(p)}{E(p)} = A(p)B(p)$$

Et la **fonction de transfert en boucle fermée** par :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1+A(p)B(p)}$$

La FTBO est de la forme :

$$FTBO(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{1 + a_1 p + \dots + a_{n-\alpha} p^{n-\alpha}}$$

K : gain statique  
 $\alpha$  : classe  $\geq 0$   
 n : ordre

On appelle **zéros**, les **racines du numérateur  $N(p)$**  de la fonction de transfert.  
 On appelle **pôles**, les **racines du dénominateur  $D(p)$**  de la fonction de transfert.

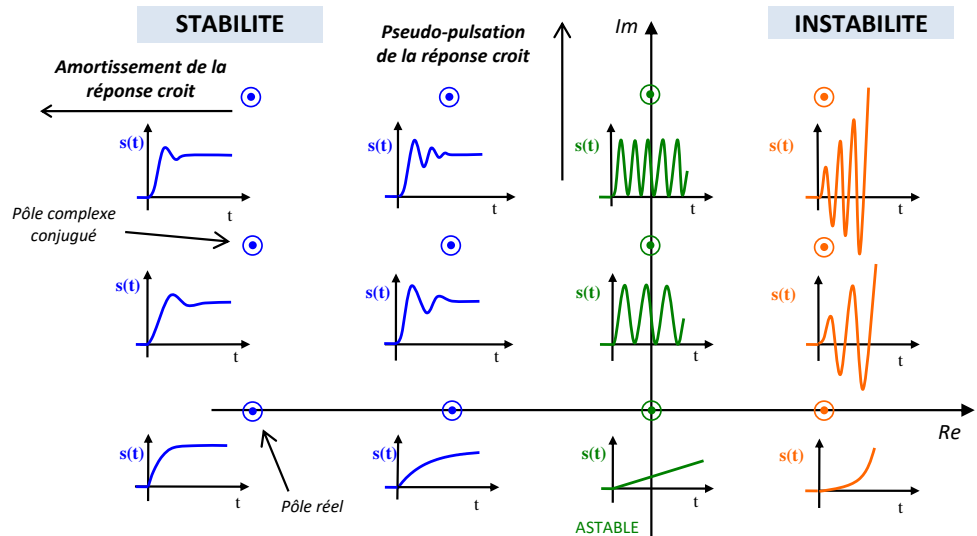
## 2 Stabilité des systèmes

### 2.1 Conditions de stabilité – critère algébrique

#### Condition nécessaire et suffisante de stabilité

- Un modèle peut donc posséder :
- des pôles réels  $p = a$  ;
  - des pôles complexes conjugués  $p = c \pm j d$ .

Pour mieux comprendre l'**influence des pôles** de la fonction de transfert d'un système, l'**allure de la réponse à une entrée en échelon** a été représentée selon la position de ces pôles **dans le plan complexe** :



La stabilité d'un système ne dépend que des pôles de la fonction de transfert.

Un système est **stable** au sens EBSB si les **pôles** de sa fonction de transfert sont tous à **partie réelle strictement négative**.

Les **pôles réels ne génèrent pas d'oscillation** alors que les **pôles complexes conjugués font apparaître des oscillations**.

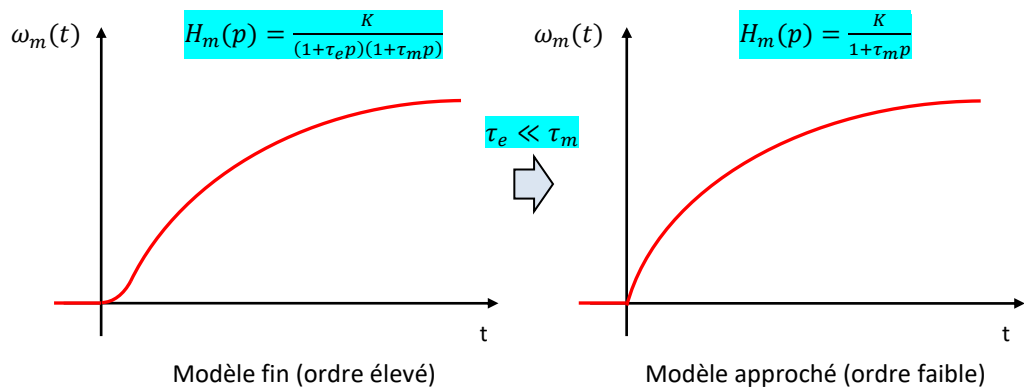
On appelle **pôle dominant** le pôle qui a une contribution significative par rapport aux autres sur la réponse.

## 2.2 Réduction de l'ordre d'un modèle

Plus on **modélise finement** un système réel, plus sa fonction de transfert est d'un **ordre élevé**. En parallèle, on constate que son comportement dynamique reste très voisin de système de fonction de transfert d'ordre inférieur. Si les différences comportementales sont faibles, il peut être intéressant, de substituer au modèle complexe un modèle simplifié, dont l'étude est plus économique.

S'ils sont suffisamment **éloignés des pôles dominants**, les pôles à partie réelle négative peuvent être **négligés**.

**Exemple : MCC**



### Condition nécessaire de stabilité

Prenons une fonction de transfert quelconque, d'un **système asservi ou non**.

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}$$

Concernant le dénominateur de cette fonction de transfert, appelé **polynôme caractéristique**, si un des coefficients  $a_i$  n'est pas **strictement positif**, alors il y a au moins une racine à partie réelle positive ou nulle.

Pour qu'un système soit **stable** au sens EBSB il est nécessaire<sup>(1)</sup> que les **coefficients  $a_i$  de son dénominateur** soient tous **strictement positifs**.

La présence d'un coefficient négatif ou nul au dénominateur suffit pour affirmer l'instabilité du système.

## 2.3 Conditions de stabilité – critère graphique

On considère un système asservi, sa FTBF est de la forme :

$$FTBF(p) = \frac{D(p)}{1 + D(p)R(p)} = \frac{D(p)}{1 + FTBO(p)}$$

Pour déterminer si le système est stable, on s'intéresse aux pôles.

### Point critique

$$1 + FTBO(p) = 0 \Rightarrow FTBO(p) = -1$$

Etudier les pôles de divergence, les racines du dénominateur, revient à étudier quand la FTBO<sup>(2)</sup> s'approche du point critique  $-1$ .

Si le dénominateur s'approche de 0, la FTBF devient très grande. Ce point critique correspond donc à un lieu d'instabilité que l'on doit éviter pour garantir la stabilité du système.

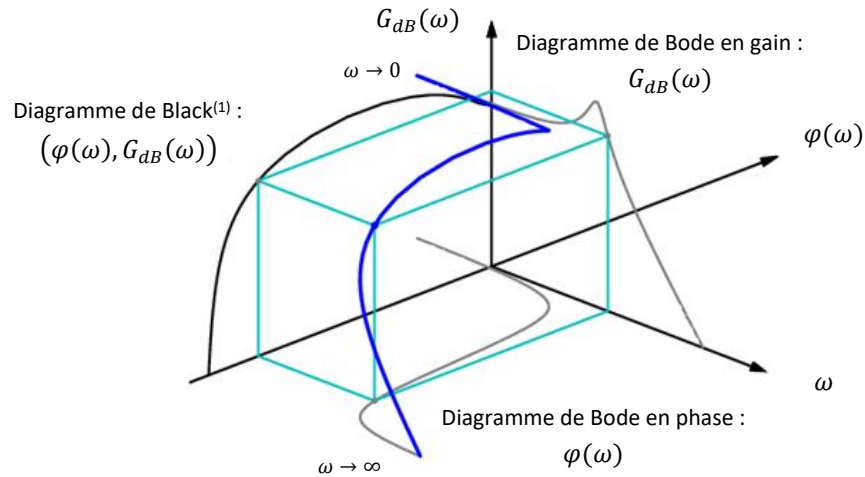
On appelle **point critique** le nombre  $-1$  dans l'espace des complexes, il s'agit du point de coordonnées  $(-180^\circ, 0dB)$  dans le plan de Black.

(1) Nécessaire ne veut pas dire suffisant.

(2) On obtient donc des informations sur la stabilité de la FTBF à partir de l'étude de la FTBO !

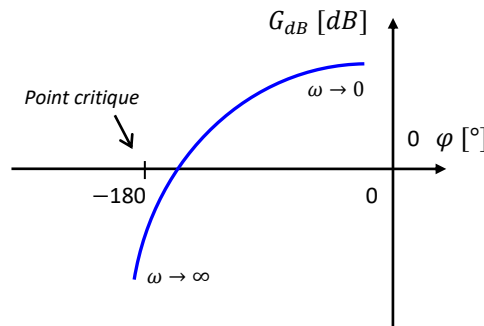
(1) Le diagramme de Black est hors programme.

On appelle lieu de transfert le lieu des points de coordonnées  $(\omega, \varphi(\omega), G_{dB}(\omega))$ . On peut le tracer :

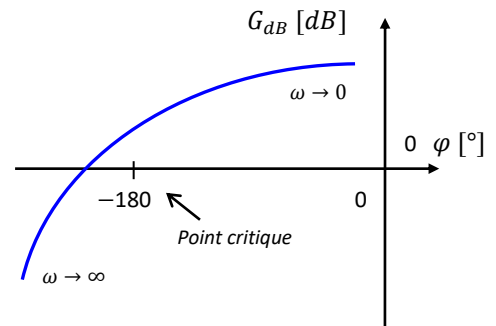


**Critère du revers dans le plan de Black – hors programme**

Un système asservi, dont la FTBO n’admet que des pôles à partie réelle négative ou nulle, est stable en boucle fermée si et seulement si le lieu de Black de sa FTBO parcouru dans le sens des **pulsations croissantes** laisse le point critique sur sa **droite**.



Système stable en FTBF



Système instable en FTBF

Un système stable en FTBO peut devenir instable en FTBF.

D’autre part, on constate qu’une augmentation du gain de la FTBO la rapproche du point critique et donc de l’instabilité.

**2.4 Marge de phase et marge de gain des systèmes asservis**

Un système est asservi pour que son fonctionnement soit conforme à des attentes définies dans un cahier des charges. Celui-ci demande souvent de rester éloigné du point critique.

Les systèmes sont rarement invariants, ils présentent du vieillissement (usures...) ainsi que des non-linéarités comme des saturations, des retards, du pompage, des frottements... Un système stable peut s’altérer au fil du temps et devenir instable.

D’autre part, un système stable mais trop oscillant n’est pas souhaitable.

On prévoit donc des marges de sécurité par rapport à ses états non désirables. La FTBO doit rester éloigné du point critique  $-1$ .

On appelle **marge de phase** d'un système asservi la distance entre le point critique et le point de sa FTBO pour lequel le gain vaut 0 dB.

$$M_\varphi = \varphi(\omega_{0dB}) + 180^\circ = \arg(H_{FTBO}(j\omega_{0dB})) + 180^\circ$$

avec  $\omega_{0dB}$  tel que  $G_{dB}(\omega_{0dB}) = 20 \log|H_{FTBO}(j\omega_{0dB})| = 0 \text{ dB}$

On appelle **marge de gain** d'un système asservi la distance entre le point de sa FTBO pour lequel la phase vaut  $-180^\circ$  et le point critique.

$$M_G = -G_{dB}(\omega_{-180^\circ}) = -20 \log|H_{FTBO}(j\omega_{-180^\circ})|$$

avec  $\omega_{-180^\circ}$  tel que  $\varphi(\omega_{-180^\circ}) = \arg(H_{FTBO}(j\omega_{-180^\circ})) = -180^\circ$

En général, le CdCF stipule :  $M_\varphi \geq 45^\circ$  à  $60^\circ$  et  $M_G \geq 8$  à  $12 \text{ dB}$

Diagramme de Black

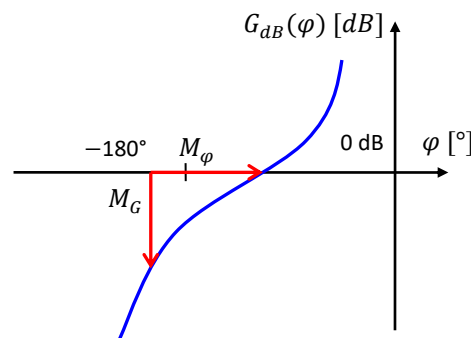
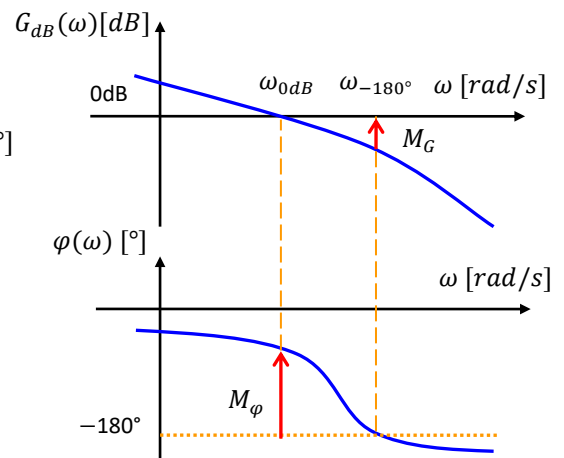


Diagramme de Bode



Les systèmes du 1<sup>er</sup> ou du 2<sup>nd</sup> ordre sont donc **toujours stable**. On a une **marge de gain infinie** et une **marge de phase positive**.

$$M_\varphi \geq 0^\circ \text{ et } M_G = +\infty$$

On doit obligatoirement avoir  $\omega_{-180^\circ} > \omega_{0dB}$  sinon  $M_G$  n'est pas définie. La marge de phase doit donc être déterminé en première.

#### Méthodologie

Pour déterminer  $M_\varphi$  :

- Rechercher graphiquement la pulsation  $\omega_{0dB}$  ;
- Pour la pulsation  $\omega_{0dB}$  déterminer  $M_\varphi$  .

Pour déterminer  $M_G$  :

- Rechercher graphiquement la pulsation  $\omega_{-180^\circ}$  ;
- Pour la pulsation  $\omega_{-180^\circ}$  déterminer  $M_G$ .

## 3 Rapidité des systèmes

La rapidité d'un système est associée au temps pour passer d'un état stable à un autre.

### 3.1 Détermination graphique du temps de réponse à 5%

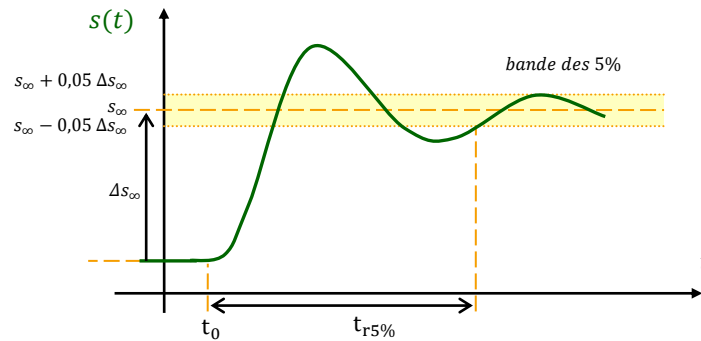
A condition que le système soit stable, pour une entrée en échelon, la rapidité est généralement caractérisée par le temps de réponse à 5%.



Le temps de réponse à 5% est la **durée** mise par la **réponse** pour rentrer dans la bande des 5% et ne **plus en sortir**.

On définit la **bande des 5%** par l'intervalle :  
 $[s_{\infty} - 0,05 \Delta s_{\infty}, s_{\infty} + 0,05 \Delta s_{\infty}]$

La valeur 5% est une valeur arbitraire, on aurait pu choisir une autre valeur.  
 On pourrait aussi utiliser d'autres critères, par exemple le **temps de montée** qui est le temps que met la réponse à atteindre pour la première fois sa valeur finale.



### 3.2 Temps de réponse d'un 1<sup>er</sup> ordre

Le temps de réponse d'un **premier ordre** est toujours de  $t_{r5\%} = 3\tau$

Démonstration :  $s(t) = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right) u(t-t_0) + s(0)$   
 $s(3\tau) = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{3\tau}{\tau}}\right) + s(0) = 0,95KE_0 + s(0)$

### 3.3 Temps de réponse d'un 2<sup>nd</sup> ordre

Le temps de réponse à 5% d'un **second ordre** dépend du facteur d'amortissement  $z$  et de la pulsation propre  $\omega_0$ . On le détermine donc avec un abaque.

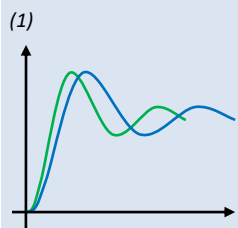
(1) Le temps de réponse réduit n'est pas un temps !  
 Tout comme  $D_{1\%}$  n'est pas une distance.

En première approximation, on aurait  $t_{r5\%} \approx \frac{3}{\omega_{0dB}}$  avec  $\omega_{0dB}$  la pulsation de coupure de la FTBO.

Le **temps de réponse réduit**<sup>(1)</sup> défini par  $t_{rr} = t_{r5\%} \omega_0$  ne dépend que du coefficient d'amortissement  $z$  du système étudié. **Il est sans unité.**

Deux valeurs sont à connaître :

- lorsque  $z = 0,69$ ,  $t_{r5\%} \omega_0 \approx 3 \Rightarrow t_{r5\%} \approx \frac{3}{\omega_0}$
- lorsque  $z = 1$ ,  $t_{r5\%} \omega_0 \approx 5 \Rightarrow t_{r5\%} \approx \frac{5}{\omega_0}$

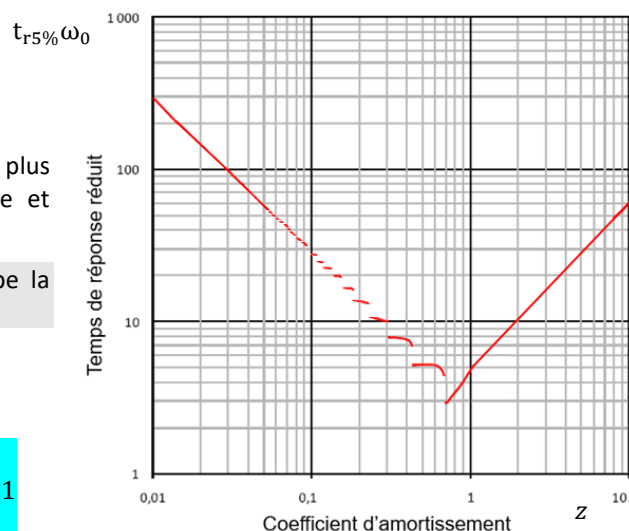


À un facteur d'amortissement correspond un temps de réponse réduit.  
 Par conséquent, pour un même  $z$ , plus  $\omega_0$  augmente, plus  $t_{r5\%}$  diminue et donc plus le modèle est rapide<sup>(1)</sup>.

Déterminer l'abscisse de la courbe la plus rapide :

$$z = \sqrt{\frac{\ln^2 D_{k\%}}{\pi^2 + \ln^2 D_{k\%}}}$$

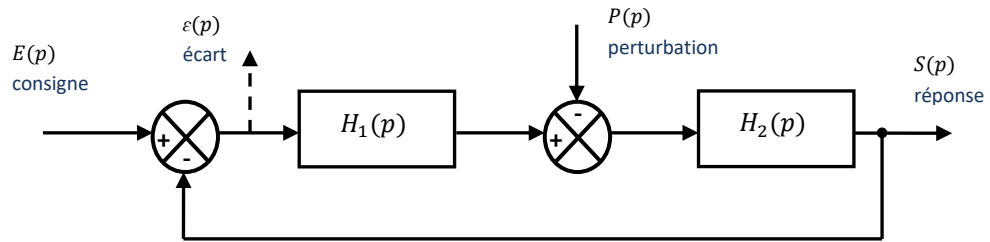
$$z = \sqrt{\frac{\ln^2 0,05}{\pi^2 + \ln^2 0,05}} \approx 0.6901$$



## 4 Précision des systèmes asservis

(1) Si le système ne peut pas se mettre sous forme d'un schéma à retour unitaire, se demander quelle est l'erreur statique entre des grandeurs dont les échelles ne sont pas du même ordre de grandeur n'a aucun intérêt !

On considère un **système asservi perturbé**. En choisissant bien  $K_{IHM}$  et en faisant une transformation de schéma bloc, il peut se mettre sous la forme d'un **retour unitaire**<sup>(1)</sup>.



En utilisant le théorème de superposition, on obtient :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + H_1(p)H_2(p)} E(p) + \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)} P(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p) + \frac{H_2(p)}{1 + FTBO(p)} P(p)$$

### 4.1 Erreur statique d'un système non perturbé

En utilisant le théorème de la valeur finale, calculer l'erreur statique d'un système non perturbé

$$e_{r\infty} = \varepsilon_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p)$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{1}{1 + \frac{K_{FTBO}}{p^\alpha} \frac{1 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{1 + a_1 p + \dots + a_{n-\alpha} p^{n-\alpha}}} E(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{1}{1 + \frac{K_{FTBO}}{p^\alpha}} E(p)$$

(2) Pour une entrée en échelon, on parle parfois d'erreur de position ou d'erreur indicielle pour une entrée unitaire.

Pour une entrée en rampe, on parle parfois d'erreur de traînage, d'erreur de poursuite ou d'erreur en vitesse.

(3) Attention, on parle du tableau de l'erreur statique  $e_{r\infty}$  et pas du tableau de l'erreur statique relative  $e_{r\% \infty}$ .

Erreur statique $e_{r\infty}^{(2)(3)}$		$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Impulsion	$E(p) = 1$	0	0	0
Echelon	$E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1 + K_{FTBO}}$	0	0
Rampe	$E(p) = \frac{V_0}{p^2}$	$\infty$	$\frac{V_0}{K_{FTBO}}$	0
Parabole	$E(p) = \frac{a_0}{p^3}$	$\infty$	$\infty$	$\frac{a_0}{K_{FTBO}}$

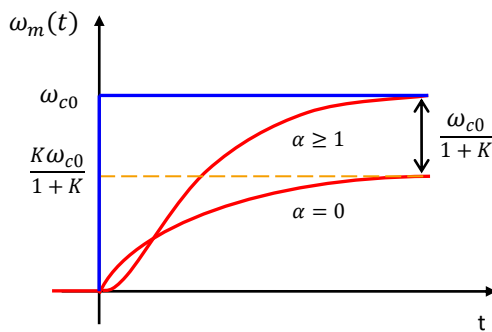
Pour un système de FTBO de classe  $\alpha$  et de gain statique  $K_{FTBO}$

L'erreur statique pour une entrée en échelon est nulle lorsque la FTBO est de classe  $\alpha \geq 1$ .

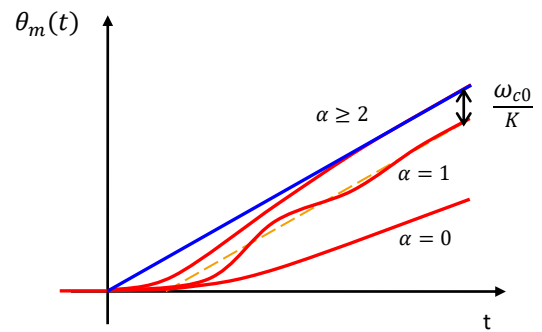
L'erreur statique pour une entrée en rampe est nulle lorsque la FTBO est de classe  $\alpha \geq 2$ .

0	0	0
$\frac{1}{1 + K_{FTBO}}$	0	0
$\infty$	$\frac{1}{K_{FTBO}}$	0
$\infty$	$\infty$	$\frac{1}{K_{FTBO}}$

#### Exemple : MCC asservi



Réponse à un échelon



Réponse à une rampe

### 4.2 Erreur statique due à la perturbation

En utilisant le théorème de la valeur finale, calculer l’erreur statique due à la perturbation.

$$e_{r\infty} = \varepsilon_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)} P(p)$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{\frac{K_2}{p^{\alpha_2}} \frac{1 + \dots}{1 + \dots}}{1 + \frac{K_1}{p^{\alpha_1}} \frac{1 + \dots}{1 + \dots} \frac{K_2}{p^{\alpha_2}} \frac{1 + \dots}{1 + \dots}} P(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{p^{1+\alpha_1} K_2}{p^{\alpha_1+\alpha_2} + K_1 K_2} P(p)$$

(1) L’erreur statique relative  $e_{r\infty\%}$  vaut tout le temps  $\frac{1}{K_1}$  sur la diagonale, sauf si  $\alpha_2 = 0$ .

Erreur statique $e_{r\infty}^{(1)}$	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 = 2$
Impulsion $P(p) = 1$	0	0	0
Echelon $P(p) = \frac{E_0}{p}$	$\alpha_2 = 0$ $\frac{K_2 E_0}{1 + K_1 K_2}$	$\alpha_2 \geq 1$ $\frac{E_0}{K_1}$	0
Rampe $P(p) = \frac{V_0}{p^2}$	$\infty$	$\frac{V_0}{K_1}$	0
Parabole $P(p) = \frac{a_0}{p^3}$	$\infty$	$\infty$	$\frac{a_0}{K_1}$
Pour un système de FTBO de classe $\alpha_1 + \alpha_2$ et $\alpha_1$ la classe de la fonction de transfert avant la perturbation			

1 intégrateur en amont de la perturbation élimine l’influence d’une perturbation en échelon.

2 intégrateurs en amont de la perturbation éliminent l’influence d’une perturbation en rampe.

Le système étant stable, une perturbation impulsionnelle n’aura pas d’influence sur l’écart statique.

### 5 Améliorer les performances en corrigeant la commande

Prenons l’exemple d’un véhicule automobile et de son conducteur. On constate que :

- Le conducteur conduit le véhicule en imposant une position du volant, un rapport de vitesses, une position des pédales d’accélérateur et de freins ;
- Le conducteur doit obéir à des critères. Il doit se déplacer d’un point à un autre en minimisant le temps de parcours tout en restant sur la route et tout en respectant les limites de vitesse ;
- Le conducteur acquiert visuellement et tactilement des informations sur la vitesse, la trajectoire du véhicule, la position du volant... ;
- Le conducteur évalue ces différents paramètres pour élaborer et modifier la conduite du véhicule.



L’ensemble correspond à un système asservi où le conducteur, tel un capteur, complète la boucle de retour, joue le rôle de comparateur et celui du bloc élaborant la commande.

Si le temps de parcours est jugé trop long, on peut changer le véhicule (le système commandé) pour un autre plus puissant, ou changer le conducteur (le générateur de commande) pour un pilote de rallye. Mais même le meilleur pilote ne pourra pas faire de miracles avec une voiture puissante.

Dans un système asservi, la commande est élaborée de façon autonome à partir de l’écart entre la consigne et la réponse. Pour améliorer les performances, on ajoute un correcteur. Il peut être placé de plusieurs façons :

- Dans la chaîne directe en série
- Dans une boucle en parallèle avec point de prélèvement en aval ;
- Dans une boucle par anticipation avec point de prélèvement en amont.

Nous allons étudier par la suite un correcteur série. Il corrige le système en amont de l’actionneur.

Les 3 actions de base, proportionnelle, intégrale, dérivée, correspondent à 3 modifications réalisables sur une fonction de transfert :

- Modifier le gain ;
- Ajouter un pôle ;
- Ajouter un zéro.

## 5.1 Correcteur proportionnel P

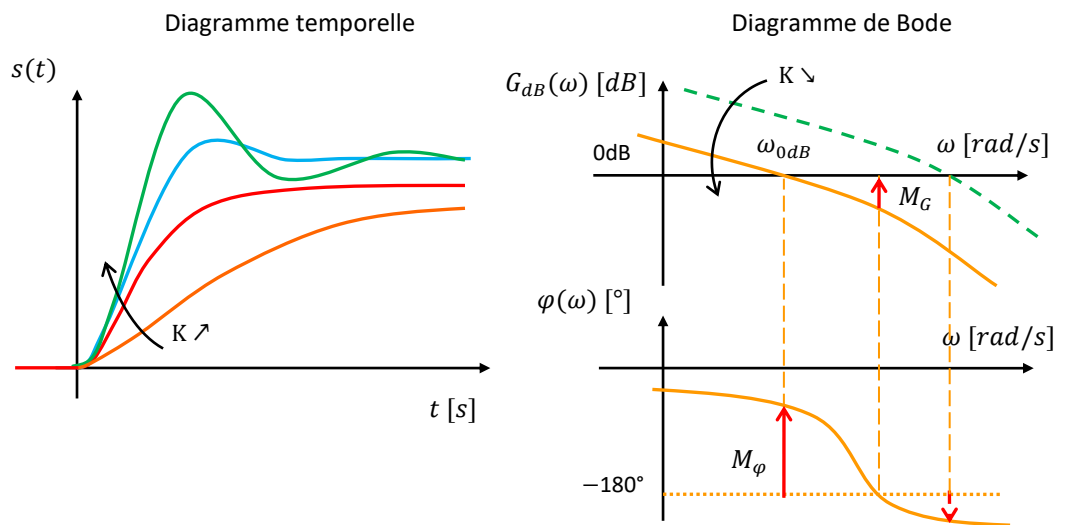
Ce correcteur ajoute un gain  $K$  à la FTBO.

Si on **augmente** le correcteur proportionnel  $C(p) = K$  :

- on **améliore la précision**<sup>(1)</sup> mais on **dégrade la stabilité** ;
- la phase du diagramme de Bode reste inchangée.

(1) Sauf si le système est déjà précis !

### Exemple



### Stabilité

Une augmentation de  $K$  réduit les marges, et donc peut faire apparaître des oscillations, voir rendre le système instable.

### Rapidité

Pour un 1<sup>er</sup> ordre, on peut améliorer la rapidité en augmentant  $K$ .

Pour un 2<sup>nd</sup> ordre ; une réponse très amortie est lente, mais une réponse très oscillatoire est lente également. Il y a donc un minimum.

### Précision

Si l'on est dans un cas où le système n'est pas précis, augmenter  $K$  améliore la précision, par exemple pour une classe 0 soumis à un échelon, l'erreur statique est  $\frac{E_0}{1+K_{FTBO}}$ .

### Réglage du correcteur

- Valeurs max de  $K$  : pour une marge de phase mini ou une marge de gain mini.
- Valeur min de  $K$  : pour un temps de réponse à 5% max ou une erreur statique max.

## 5.2 Correcteur intégral I

Ce correcteur augmente la classe de la FTBO.

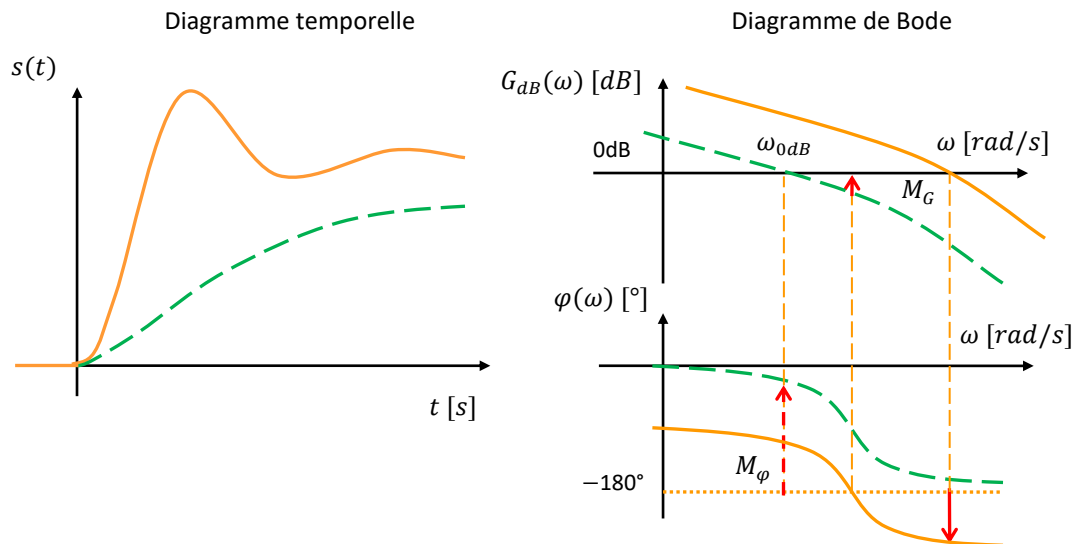
(1) Les correcteurs intégrales sont les seuls correcteurs qui peuvent avoir une sortie non nulle pour une entrée nulle.

(2) La robustesse est une performance, qui caractérise l'insensibilité aux perturbations.

Le correcteur **intégral**<sup>(1)</sup>  $C(p) = \frac{1}{\tau_i p}$  :

- annule l'écart statique d'une entrée en échelon ;
- annule l'effet en régime permanent d'une perturbation en échelon<sup>(2)</sup> si placé en amont de la perturbation ;
- diminue la phase de 90° et donc rend souvent le système instable.

Exemple



### Stabilité

Ce correcteur est rarement utilisable car il diminue la phase de 90° et donc diminue les marges et peut rendre le système instable.

### Rapidité

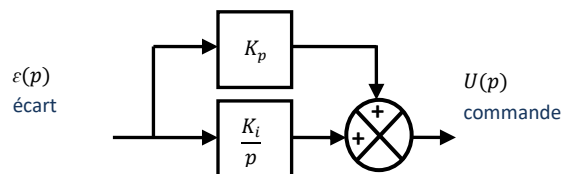
La bande passante diminue et donc la rapidité. Le temps de réponse 5% augmente.

### Précision

En augmentant la classe de la FTBO, il annule l'erreur statique d'une entrée échelon et rend le système précis. Placé en amont d'une perturbation indicielle, il annule son effet.

## 5.3 Correcteur proportionnel intégral PI

Ce correcteur combine les actions proportionnelles et intégrales.



Plusieurs paramétrages sont possibles, en posant  $K_i = \frac{1}{T_i}$  et  $\tau_i = KT_i$  :

$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} = K_p + \frac{1}{T_i p} = \frac{1 + K_p T_i p}{T_i p} = \frac{K_p (1 + \tau_i p)}{\tau_i p}$$

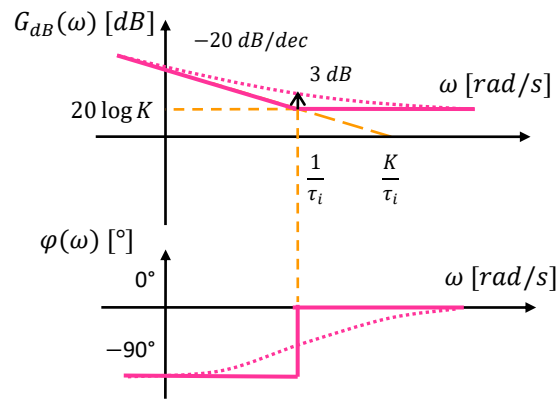
Il se comporte comme un correcteur intégral pour les basses fréquences et comme un correcteur proportionnel pour les hautes fréquences. Bien réglé, il présente les avantages 2 correcteurs sans leurs inconvénients.

Il peut parfois être utilisé pour compenser un pôle dominant.

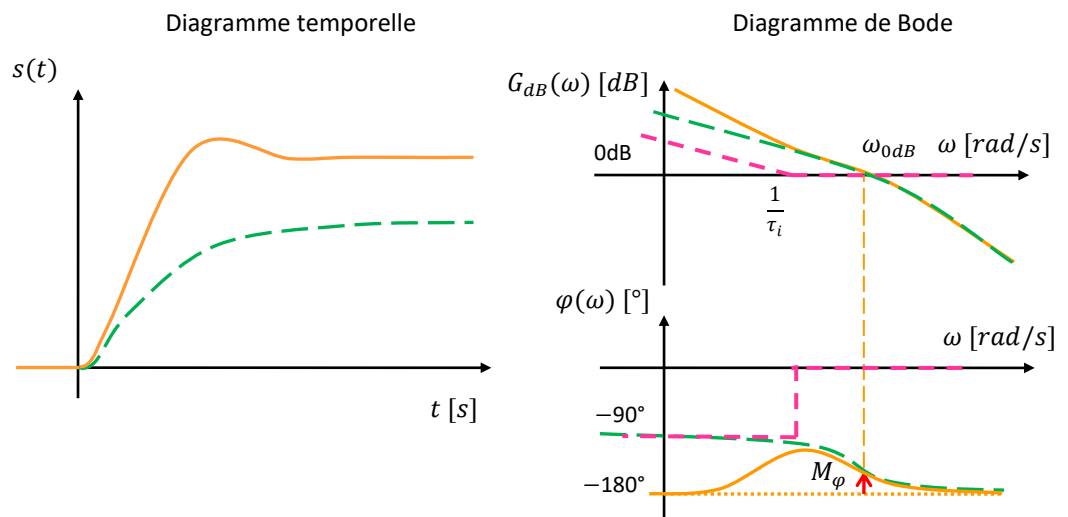
Le correcteur **proportionnel intégral**  $C(p) = \frac{K(1+\tau_i p)}{\tau_i p}$  :

- **améliore la précision mais dégrade la stabilité ;**
- **augmente le gain aux basses fréquences ;**
- **annule l'écart statique d'une entrée en échelon ;**
- **annule l'effet** en régime permanent **d'une perturbation** en échelon si placé en amont de la perturbation.

Diagramme de Bode du correcteur PI :



Exemple



#### Stabilité

On choisit  $\tau_i$  pour que la phase de la FTBO ne soit pas diminuée au voisinage du point critique, soit  $\frac{1}{\tau_i} \ll \omega_{0dB}$ . Par exemple, une décade avant  $\frac{1}{\tau_i} = \frac{\omega_{0dB}}{10}$ .

#### Rapidité

Ce correcteur tend à diminuer la rapidité. Contrairement au correcteur intégral pur, l'action intégrale est limitée aux basses fréquences, donc le ralentissement du système est limité.

Une augmentation de  $K$  augmente la rapidité mais diminue la stabilité.

#### Précision

Idem correcteur I.

### 5.4 Correcteur à retard de phase (ou correcteur PI réel)

Le correcteur PI est censé avoir un gain infini aux basses fréquences. Si les puissances en jeu sont trop importantes, il est impossible de réaliser concrètement ce comportement théorique. Le correcteur à retard de phase exerce une action intégrale limitée à une plage de fréquence.

Ce correcteur augmente le gain de la FTBO aux basses fréquences et modifie la précision du système.

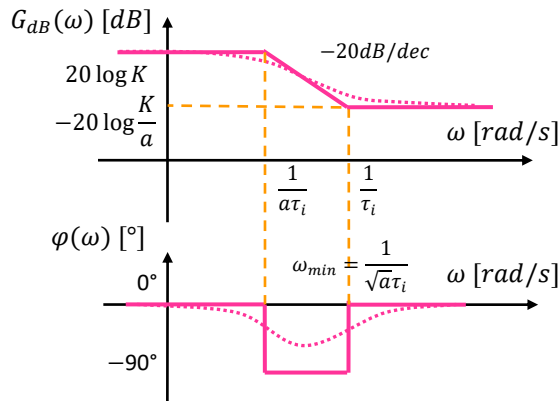
Le correcteur à retard de phase enlève de la phase.

(1) Attention, ce correcteur peut aussi s'écrire  $C(p) = \frac{1+b\tau_i p}{1+\tau_i p}$  avec  $b < 1$ . Il faut donc plutôt se fier à l'allure du diagramme de Bode.

Le correcteur à retard de phase<sup>(1)</sup>  $C(p) = K \frac{1+\tau_i p}{1+a\tau_i p}$ , avec  $a > 1$  :

- améliore la précision mais dégrade la stabilité ;
- augmente le gain aux basses fréquences.

Diagramme de Bode du correcteur à retard de phase :



La phase est minimale pour  $\omega_{min} = \frac{1}{\sqrt{a\tau_i}}$  et vaut  $\sin \varphi_{min} = \frac{1-a}{1+a}$ .

Calcul de la moyenne logarithmique entre  $\frac{1}{\tau_i}$  et  $\frac{1}{a\tau_i}$

$$\log \omega_{min} = \frac{1}{2} \left( \log \frac{1}{\tau_i} + \log \frac{1}{a\tau_i} \right) = \log \left( \sqrt{\frac{1}{\tau_i} \cdot \frac{1}{a\tau_i}} \right) = \log \left( \frac{1}{\sqrt{a\tau_i}} \right) \Rightarrow \omega_{min} = \frac{1}{\sqrt{a\tau_i}}$$

**Stabilité**

La stabilité est plutôt diminuée vu que l'on enlève de la phase. Cependant, en choisissant bien K, on peut la préserver. Parfois même, on peut augmenter les marges en diminuant  $\omega_{0dB}$ .

**Rapidité**

A l'inverse, la rapidité diminue.

**Précision**

La précision est améliorée sans changer la classe. Donc les écarts statiques sont réduits mais ne sont pas annulés.

**Réglage du correcteur**

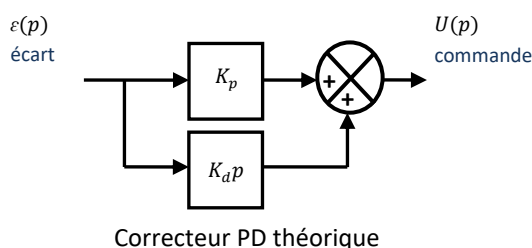
Si on choisit  $K = a$  le gain est nul pour les hautes fréquences.

On règle ce correcteur pour augmenter le gain aux basses fréquences sans diminuer la phase au voisinage du point critique.

**5.5 Correcteur dérivé D et proportionnel dérivé PD**

Le correcteur **dérivé**  $C(p) = K_d p$  et le correcteur **proportionnel dérivé**  $C(p) = K_p + K_d p$  ne sont pas réalisables technologiquement. Ils ont un degré du numérateur supérieur à celui du dénominateur. Ils ajoutent un zéro à la FTBO sans changer la classe.

Pour réaliser ces correcteurs, il faut avoir une amplification très importante pour les très hautes fréquences, ce qu'aucun système physique ne permet. Les réalisations essayant d'approcher ces modèles théoriques amplifient tous les bruits et leurs grandeurs de sortie sont inexploitable.



## 5.6 Correcteur à avance de phase (ou correcteur PD réel)

Le correcteur à avance de phase fait exactement l'inverse du correcteur à retard de phase. C'est la seule utilisation pratique de l'action dérivée.

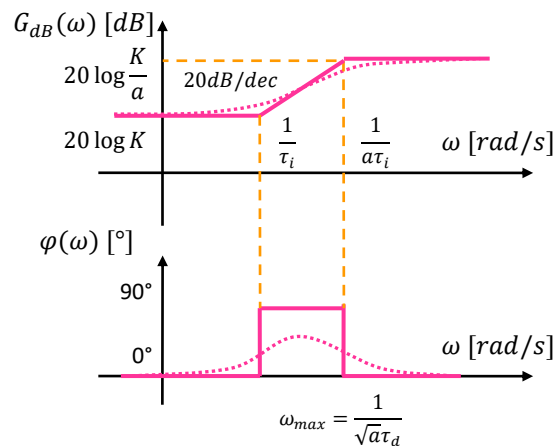
Il fait une action dérivée sur une plage de fréquence.

Le correcteur à avance de phase ajoute de la phase.

Le correcteur à **avance de phase**  $C(p) = K \frac{1+\tau_d p}{1+a\tau_d p}$ , avec  $a < 1$  :

- augmente la stabilité mais introduit des vibrations et du bruit ;
- améliore la rapidité.

Diagramme de Bode du correcteur à avance de phase :



La phase est maximale pour  $\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{a\tau_d}}$  et vaut  $\sin \varphi_{max} = \frac{1-a}{1+a}$ .

### Stabilité

Ce correcteur augmente la marge de phase autour du point critique et peut stabiliser un système instable ou augmenter les marges.

### Rapidité

Le gain des hautes fréquences est augmenté, donc la bande passante est plus large et la rapidité est améliorée.

### Précision

La précision diminue en fonction des valeurs choisies.

### Réglage du correcteur

- On cherche la valeur  $a$  qui permet d'obtenir  $M_\varphi$  demandée avec  $\sin \varphi_{max} = \frac{1-a}{1+a}$ .
- On cherche  $\tau_d$  avec  $\omega_{max} = \omega_{0dB}$  soit  $\tau_d = \frac{1}{\sqrt{a}\omega_{0dB}}$ .
- On ajuste  $K$  pour que le gain du système corrigé soit bien de 0dB pour  $\omega_{max}$ .

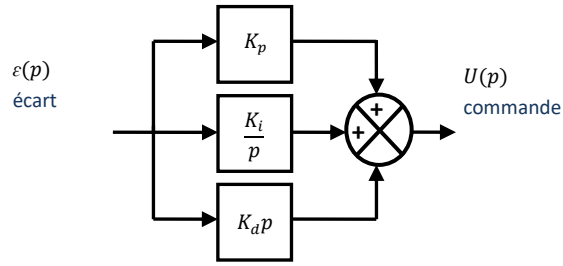
## 5.7 Correcteur proportionnel intégral dérivé PID

Il se comporte comme un correcteur intégral pour les basses fréquences et comme un correcteur proportionnel pour les fréquences intermédiaires et comme un correcteur dérivé pour les hautes fréquences. Bien réglé, il présente les avantages 3 correcteurs sans leurs inconvénients. Mais il est difficile à régler.

Le correcteur **proportionnel intégral dérivé**  $C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p$  :

- Comme le correcteur PI, il améliore la précision ;
- Comme le correcteur PD, il améliore la rapidité.





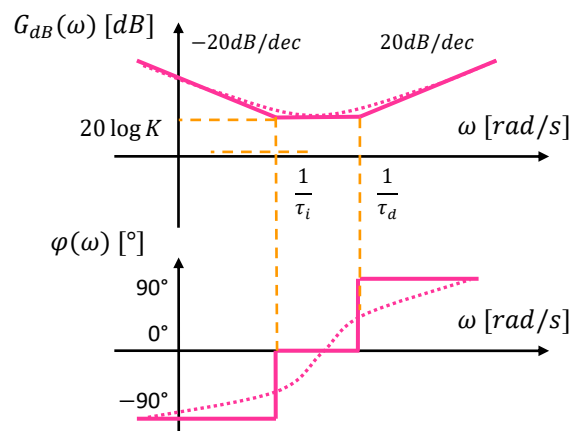
Correcteur PID théorique

Ce correcteur ne correspond à aucun système physique car le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur.

Les correcteurs réels que l'on utilise sont de la forme :

$$C(p) = K \frac{1+\tau_i p}{\tau_i p} \frac{1+\tau_d p}{1+b\tau_d p} \quad \text{ou} \quad C(p) = K \frac{1+\tau_i p}{1+a\tau_i p} \frac{1+\tau_d p}{1+b\tau_d p} \quad \text{avec } a > 1 \text{ et } b < 1$$

Diagramme de Bode du correcteur PID :



(1) La méthode de Ziegler-Nichols est une méthode heuristique de réglage du correcteur PID.

Réglage du correcteur<sup>(1)</sup>

- On commence par la rapidité et de précision avec le correcteur PI.
- Puis la stabilité avec l'avance de phase.

5.8 Bilan des performances des correcteurs

La problématique des asservissements est de trouver le meilleur **compromis** entre les différentes performances.

Performances	Stabilité	Rapidité	Précision
Correcteur P	↘	—	↗
Correcteur I	↘↘	↘	↗↗
Correcteur PI	↘	↘	↗↗
Correcteur à retard de phase	↘	↘	↗
Correcteur à avance de phase	↗	↗	↘
Correcteur PID	↗	↗	↗↗

## QUESTIONS DE COURS

- Donner la relation entre les fonctions de transfert de l'interface homme-machine et du capteur.
- Donner l'expression des fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée.
- Donner la condition fondamentale de stabilité au niveau des pôles. Sur quelle fonction s'applique-t-elle ?
- Que vaut la classe d'une FT stable ?
- Quel type de pôle génère des oscillations ?
- Comment réduire l'ordre d'un modèle, à l'aide de la notion de pôle dominant ?
- Une paire de pôles complexes implique-t-elle des oscillations visibles ?
- Que dire de la stabilité des modèles à plusieurs entrées.
- Donner le critère graphique du Revers. Sur quelle fonction s'applique-t-il ?
- Quelle marge doit être lue en premier ?
- Donner quelques causes d'instabilité.
- Donner les transformées de Laplace des entrées tests « impulsion », « échelon » et « rampe ».
- Donner le théorème de la valeur finale, et celui de la valeur initiale.
- Donner les expressions de la valeur finale et de l'erreur en régime permanent, d'un modèle stable, sans dérivateur soumis à une consigne en échelon d'amplitude  $E_0$  et à une perturbation en échelon d'amplitude  $C_{r0}$ .
- Expliquer la méthode pour déterminer l'erreur en régime permanent, d'un modèle stable soumis à une consigne en rampe.
- Donner le tableau exprimant les différentes valeurs de l'erreur statique due à un échelon.
- Donner le tableau exprimant les différentes valeurs de l'erreur statique due à une perturbation.
- Que faut-il faire pour améliorer la précision ? Quel inconvénient ceci peut entraîner ?