

## **Mécanique des fluides**

▶ [page suivante : l'essentiel](#)

2. Cinématique des fluides

3. Dynamique des fluides

4.1 Equations de bilan (PCM, PCqdm, PCE, TRD, TMD)

4.2 Bernoulli et Archimède

5. Ecoulements irrotationnels : potentiel des vitesses

6. Conditions aux limites (classique et potentiel)

7.1 Analyse dimensionnelle

7.2 Théorème de Vaschy–Buckingham

8. Couches limites laminaires

9. Coefficients aérodynamiques

10.1 Ex d'écoulements // de fluides visqueux newtonniens

10.2 Couette plan

10.3 Poiseuille plan

10.4 Poiseuille cylindrique

*Les formules des opérateurs sont dans Mathématique/Opérateurs*

### **L'essentiel**

▶ Navier Stokes : (p4.1 et p4.2)

▶ Incompressibilité : (p2.1 et p4.1)

▶ Conservation de la masse : (p4.1)

▶ Equations bilan et Bernoulli : (p4.2)

▶ Conditions limites : (p6.1)

▶ Nombre de Reynolds : (p6.1)

▶ Analyse dimensionnelle : (p7.1)

▶ Frottements aéro. : (p9.1)

▶ Ex : Couette et Poiseuille (p10.1 à 10.4)

*Les formules des opérateurs sont dans Mathématique/Opérateurs*

## 2. Cinématique des fluides

Condition d'incompressibilité :

Si le nombre de Mach =  $\frac{V}{c} \ll 1$

⇒ fluide incompressible  $\rho = \text{cst} \Rightarrow \text{div}(\vec{V}) = 0$  avec  $c = \sqrt{\gamma \cdot r \cdot T}$  (340m/s dans l'air à  $T_{\text{ambient}}$ ), la vitesse du son

⇒ conservation du débit Q

Description Lagrangienne : On suit une particule de fluide au cours de son mouvement.

Description Eulerienne : On s'intéresse aux champs de vitesse.

Dérivée particulaire :  $\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad})(X)$

Lignes de courant :  $\vec{V} \wedge d\vec{M} = \vec{0}$  càd  $\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}$

$$d\vec{M} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad d\vec{M} = \begin{bmatrix} dr \\ r \cdot d\theta \\ dz \end{bmatrix} \quad d\vec{M} = \begin{bmatrix} dr \\ r \cdot d\theta \\ r \cdot \sin(\theta) d\varphi \end{bmatrix}$$

et éventuellement  $\vec{V} = \text{grad}(\Phi)$  en irrotationnelle

Trajectoire :

$$\frac{dx}{dt} = V_x, \quad \frac{dy}{dt} = V_y, \quad \frac{dz}{dt} = V_z$$

Tenseur des déformations :

$$G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = e_{ij} + w_{ij}$$

$e_{ij}$  : partie symétrique de G, traduit les dilatations sur ses termes diag. et les vitesses de déf. angulaires sur ses termes non diag.

$w_{ii}$  : rotation de la particule fluide

### 3. Dynamique des fluides

Equation dynamique, cas général :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} = \rho \vec{f} + \text{div}(\boldsymbol{\sigma})$$

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} = \rho \vec{f} - \text{grad} p + \mu \Delta \vec{V} + \left( \frac{\mu}{3} + \zeta \right) \text{grad}(\text{div}(\vec{V}))$$

$$\rho V_{,t} + \rho V_i V_{,ij} = \rho f_{,i} - p_{,i} + \mu V_{,ij} + \left( \frac{\mu}{3} + \zeta \right) V_{,ji}$$

avec  $\mu$  viscosité de cisaillement,  $\zeta$  viscosité de volume

$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}'$  ou  $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p\delta_{ij}$ , avec  $\boldsymbol{\sigma}'$  : partie de  $\boldsymbol{\sigma}$  liée à la def des elts de fluide,  $\boldsymbol{\sigma}'$  sym.

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}' = 2\mu\mathbf{D} + \zeta \cdot \text{div}(\vec{V})\mathbf{I} = \mu[\mathbf{grad}(\vec{V}) + {}^t\mathbf{grad}(\vec{V})] + \zeta \cdot \text{div}(\vec{V})\mathbf{I}$$

$$\tau = \sigma'_{ij} = 2\mu D_{ij} + \zeta \cdot V_{,k,k} \delta_{ij} = \mu[V_{,ij} + V_{,ji}] + \zeta \cdot V_{,k,k} \delta_{ij}$$

Dans le cas des fluides newtoniens incompressibles :

$$\text{div}(\vec{V}) = 0 \Rightarrow \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} = \rho \vec{f} - \text{grad} p + \mu \Delta \vec{V}$$

FP  $\Rightarrow \mu = 0$  et  $\zeta = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) = - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho V_i V_j + p \delta_{ij} - \sigma'_{ij}) + \rho f_{,i}$$

$$\text{ou } \rho V_{,t} + \rho V_i V_{,ij} = \rho f_{,i} - p_{,i} + \mu V_{,ij}$$

#### 4. Equations de bilan (PCM, PCqdm, PCE, TRD, TMD)

Conservation de la masse locale: (équation de continuité)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}(\vec{V}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \text{rot}(\vec{V}) \wedge \vec{V} = 0$$

Conservation de la qté de mvt locale: (équation de Navier-Stokes) Fluide **visqueux** et **incompressible**

Un fluide est newtonien, si  $\nu = \text{cte} \neq 0$ .

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} = \rho \vec{f} - \text{grad} p + \mu \Delta \vec{V}$$

$$\text{ou } \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{V}$$

Viscosité dynamique:  $[\mu] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-1} = 1 \text{ Poiseuille}$

$$\mu_{\text{eau}} = 10^{-3} \text{ Pl}, \mu_{\text{air}} = 18 \cdot 10^{-6} \text{ Pl} \quad (10 \text{ Po}(\text{Poise}) = 1 \text{ Pl} = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s})$$

Viscosité cinématique:  $[\nu] = \text{L}^2\text{T}^{-1} = 1 \text{ Stokes} = 1 \text{ St} = 1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$

La viscosité  $\nu$  est la résistance au cisaillement.

**Equation d'Euler = NS en FP (càd  $\mu=0$ )**

Equation de la chaleur:

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = k \cdot \Delta T + T \cdot \beta \frac{dp}{dt} + \phi_v$$

$$\rho C_p (T_{,t} + V_{i,t} T_{,i}) = k T_{,ii} + T \beta (p_{,t} + V_{i,t} p_{,i}) - p V_{i,i} + \mu \cdot \text{tr}[V_{i,j}^2]$$

$$+ V_{i,i} V_{i,j} - \frac{2}{3} \mu \cdot V_{i,j}^2 \quad \text{avec } e = C_p \cdot T \text{ et } \phi_v = -p \cdot \text{div}(\vec{V}) + \mu \cdot \gamma'^2$$

$$- \frac{2}{3} \mu \cdot \text{div}(\vec{V})^2 \text{ et } \gamma'^2 = \text{tr}[(\text{grad}(\vec{V}) + \text{grad}(\vec{V})) \cdot \text{grad}(\vec{V})]$$

$$\text{en incompressible: } \rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} T \right) = k \cdot \Delta T + \mu \cdot \gamma'^2$$

Théorème de la résultante dynamique: (qdm globale)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_V \rho \vec{V} dV = - \int \int_S [\rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) + p \vec{n} - \sigma' \cdot \vec{n}] dS$$

$$+ \int \int \int_V \rho \vec{f} dV \quad \text{note: } (\vec{V} = \text{vit}, \vec{n} \text{ ext}, V = \text{vol})$$

Théorème du moment dynamique:

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_V \vec{OM} \wedge \rho \vec{V} dV$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_V \vec{OM} \wedge \rho \vec{V} dV + \int \int_S (\vec{OM} \wedge \rho \vec{V}) \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

$$= - \int \int_S \vec{OM} \wedge [\rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) + p \vec{n} - \sigma' \cdot \vec{n}] dS + \int \int \int_V \vec{OM} \wedge \rho \vec{f} dV$$

note: pour un compresseur, la forme est:  $C = Q_m (R_2 V_{\theta 2} - R_1 V_{\theta 1})$

Equation de Navier-Stokes en :

$$\rho \frac{d}{dt} \vec{V} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{V} + \rho (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{V} + \rho \frac{1}{2} \text{grad}(\vec{V}^2) + \text{rot}(\vec{V}) \wedge \vec{V} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{V} + \rho \text{grad}(\vec{V}) \cdot \vec{V} = \rho f - \text{grad} p + \mu \Delta \vec{V}$$

Cartésien : (x,y,z)

$$\text{opérateurs grad} \begin{pmatrix} vx(x,y,z) \\ vy(x,y,z) \\ vz(x,y,z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} vx(x,y,z) \\ vy(x,y,z) \\ vz(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{dV_x}{dt} + V_x \frac{dV_x}{dx} + V_y \frac{dV_x}{dy} + V_z \frac{dV_x}{dz} \right) = -\frac{dp}{dx} + \rho f_x + \mu \left( \frac{d^2 V_x}{dx^2} + \frac{d^2 V_x}{dy^2} + \frac{d^2 V_x}{dz^2} \right) \\ \rho \left( \frac{dV_y}{dt} + V_x \frac{dV_y}{dx} + V_y \frac{dV_y}{dy} + V_z \frac{dV_y}{dz} \right) = -\frac{dp}{dy} + \rho f_y + \mu \left( \frac{d^2 V_y}{dx^2} + \frac{d^2 V_y}{dy^2} + \frac{d^2 V_y}{dz^2} \right) \\ \rho \left( \frac{dV_z}{dt} + V_x \frac{dV_z}{dx} + V_y \frac{dV_z}{dy} + V_z \frac{dV_z}{dz} \right) = -\frac{dp}{dz} + \rho f_z + \mu \left( \frac{d^2 V_z}{dx^2} + \frac{d^2 V_z}{dy^2} + \frac{d^2 V_z}{dz^2} \right) \end{cases}$$

Cylindrique : (r,θ,z)

$$\text{opérateurs grad} \begin{pmatrix} vr(r,\theta,z) \\ v\theta(r,\theta,z) \\ vz(r,\theta,z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} vr(r,\theta,z) \\ v\theta(r,\theta,z) \\ vz(r,\theta,z) \end{pmatrix}$$

$$\text{div}(\vec{V}) = \frac{1}{r} \frac{d(rV_r)}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dV_\theta}{d\theta} + \frac{dV_z}{dz}$$

$$(\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} = \begin{pmatrix} V_r \frac{dV_r}{dr} + \frac{V_\theta}{r} \frac{dV_r}{d\theta} + V_z \frac{dV_r}{dz} - \frac{V_\theta^2}{r} \\ V_r \frac{dV_\theta}{dr} + \frac{V_r V_\theta}{r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{dV_\theta}{d\theta} + V_z \frac{dV_\theta}{dz} \\ V_r \frac{dV_z}{dr} + \frac{V_\theta}{r} \frac{dV_z}{d\theta} + V_z \frac{dV_z}{dz} \end{pmatrix}$$

Sphérique : (r,θ,φ), θ=(z, e<sub>r</sub>)

$$\text{opérateurs grads} \begin{pmatrix} vr(r,\theta,\phi) \\ v\theta(r,\theta,\phi) \\ v\phi(r,\theta,\phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} vr(r,\theta,\phi) \\ v\theta(r,\theta,\phi) \\ v\phi(r,\theta,\phi) \end{pmatrix}$$

$$(\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} =$$

$$\begin{pmatrix} V_r \frac{dV_r}{dr} + \frac{dV_r}{d\theta} V_\theta + \frac{dV_r}{d\phi} V_\phi - \frac{V_\theta^2}{r} - \frac{V_\phi^2}{r} \\ \frac{dV_\theta}{dr} V_r + \frac{V_\theta}{r} \frac{dV_\theta}{d\theta} + \frac{dV_\theta}{d\phi} V_\phi + \frac{V_r V_\theta}{r} - \frac{V_\phi^2 \cos(\theta)}{r \sin(\theta)} \\ \frac{dV_\phi}{dr} V_r + \frac{dV_\phi}{d\theta} V_\theta + \frac{V_\phi}{r \sin(\theta)} \frac{dV_\phi}{d\phi} + \frac{V_r V_\phi}{r} + \frac{V_\theta V_\phi \cos(\theta)}{r \sin(\theta)} \end{pmatrix}$$

Démonstration Bernoulli :

Euler (fluide parfait) :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{V^2}{2} \right) + \rho \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) \wedge \vec{V} = \rho \vec{f} - \overrightarrow{\text{grad}}(p) \quad \text{ex : } \vec{f} = -g\vec{z} - r\omega^2 \vec{e}_r + 2\omega \vec{e}_z \wedge \vec{V}$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{V^2}{2} \right) + \rho \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) \wedge \vec{V} = -\rho \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(gz) - \rho \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{r^2 \omega^2}{2} \right)$$

Le long d'une LDC,  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) \wedge \vec{V}$  perpendiculaire à  $\vec{V} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \Rightarrow \frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = cte$

Bernoulli 1 (FP, incompressible, forces à distances conservatives, stationnaire) :  $\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho gz = cte$  sur une LDC

Bernoulli 2 (FP, incompressible, forces à distances conservatives, potentiel  $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(\Phi)$ ) :  $\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \frac{V^2}{2} + p + \rho gz = c(t)$  ou

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \frac{V^2}{2} + p + \rho gz = c$$

Bernoulli généralisé (fluide visqueux incompressible, régime permanent) :

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2 + \xi_{12}$$

avec  $\xi_{12}$ , pertes de charge régulières et singulières

$$\text{PDC régulières : } \Delta p = \xi_{12} = \frac{1}{2} \zeta \cdot \rho \cdot V^2 \frac{L}{D}$$

$\zeta$  : (parfois noté  $\lambda$ ) coefficient de perte de charge fonction de  $Re$  et rugosité relative paroi ( $\lambda = 64/Re$  pour tube lisse en écoulement Poiseuille)

$Rq$  : force volumique de frottement  $N/m^3 =$  perte de charge linéique  $Pa/m$

$$\text{PDC singulières : } \Delta p = \xi_{12} = \frac{1}{2} \zeta \cdot \rho \cdot V^2$$

$\zeta$  : fonction géométrie singularité, et de  $Re$ .

Archimède :

$$\vec{P}_i + \vec{F}_{\text{archi}} = \vec{0} \Rightarrow m\vec{g} - V\rho_0\vec{g} = \vec{0}$$

### 5. Ecoulements irrotationnels : potentiel des vitesses

Les potentiels des vitesses concernent les mvts des **FLUIDES PARFAITS**

$\Phi$  : potentiel des vitesses

$\Psi$  : potentiel dont dérive les forces de volume

Cas d'un écoulement plan de normale z :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})=\vec{0} \Rightarrow \exists \Phi / \vec{V}=\overrightarrow{\text{grad}}(\Phi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ V_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \end{cases} \quad (1)$$

si incompressible, alors

$$\overrightarrow{\text{div}}(\vec{V})=\vec{0} \Rightarrow \exists \Psi / \vec{V}=\overrightarrow{\text{rot}}(\Psi \cdot \vec{z})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ V_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} V_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ V_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \Delta \Phi = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(\Phi)) = \text{div}(\vec{V}) = 0$$

$$\text{et } \Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0$$

Propriété d'orthogonalité : (Conditions de Cauchy-Riemann)

(1) et (2)  $\overrightarrow{\text{grad}}(\Phi) = \overrightarrow{\text{grad}}(\Psi) \wedge \vec{z}$ , **Lignes de courant  $\perp$  lignes équipotentielles.**

Circulation du vecteur vitesse :

► La vitesse est orthogonale aux lignes équipotentielles  $\Phi = \text{Cte}$  et tangente aux lignes de courant  $\Psi = \text{Cte}$

$$\Gamma = \int_{\Phi 1}^{\Phi 2} V \, dM = \Phi 2 - \Phi 1$$

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{V} + \text{grad} \left( \frac{V^2}{2} \right)$$

Potentiel complexe des vitesses :

**Cartésien :**  $f(z) = \Phi(x, y) + i \cdot \Psi(x, y)$ ,  $z = x + i \cdot y$

$$\text{vitesse complexe : } w(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = V_x - i \cdot V_y$$

**Polaire :**  $f(z) = \Phi(r, \theta) + i \cdot \Psi(r, \theta)$ ,  $z = r \cdot e^{i\theta}$

$$\text{vitesse complexe : } w(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = (V_r - i \cdot V_\theta) e^{i\theta}$$

## 6. Conditions aux limites (classique et potentiel)

ex:  $q = \rho \cdot S_i \cdot V_i(R_i)$

CL en fluide parfait: ( $\mu=0$ )

-à la surface d'un corps solide:  $\vec{V}_{\text{solide}} \cdot \vec{n} = \vec{V}_{\text{fluide}} \cdot \vec{n}$  (continuité des vitesses normales, non pénétration)

-entre 2 fluides: même vitesse normale et même pression à l'interface

CL en fluide visqueux: ( $\mu \neq 0$ , le fluide adhère aux surfaces)

-à la surface d'un corps solide:  $\vec{V}_{\text{solide}} = \vec{V}_{\text{fluide}}$

-entre 2 fluides: même vitesse normale et même contrainte à l'interface

$$\begin{cases} \mu_1 \left( \frac{\partial V_{i1}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{j1}}{\partial x_i} \right) n_j = \mu_2 \left( \frac{\partial V_{i2}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{j2}}{\partial x_i} \right) n_j \\ p_1 n_i = p_2 n_i \end{cases} \text{ sur } \Gamma$$

Conditions aux limites pour les potentiels:

$$\text{En S: } \mathbf{Vn} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = 0$$

$$\text{Entre deux FP: } \vec{Vn}_1 = \vec{Vn}_2 \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{n}}$$

## 7. Analyse dimensionnelle

Forme adimensionnelle de Navier-Stokes

$$r' = \frac{r}{L}, v' = \frac{v}{U}, t' = \frac{t}{T}, r' = \frac{r}{L}, p' = \frac{p-p_0}{1/2\rho U^2}$$

$$\frac{1}{St} \frac{\partial}{\partial t'} \vec{v}' + (\vec{v}' \cdot \text{grad}') \vec{v}' = -\frac{1}{Fr} \vec{z} - \text{grad}' p' + \frac{1}{Re} \Delta' \vec{v}'$$

►  $Re = \frac{\rho UL}{\mu}$ , nombre de Reynolds =  $\frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces visqueuses}}$ , avec U: vitesse caractéristique et L : longueur caractéristique

♦  $Re \ll 1000 \rightarrow$  laminaire, viscosité dominante

$$(\vec{v}' \cdot \text{grad}') \vec{v}' \ll \frac{1}{Re} \Delta' \vec{v}'$$

$\frac{\partial}{\partial t'} \vec{v}'$  et  $(\vec{v}' \cdot \text{grad}') \vec{v}'$  sont du même ordre de grandeur

♦  $Re \gg 1000 \rightarrow$  turbulent  $(\vec{v}' \cdot \text{grad}') \vec{v}' \gg \frac{1}{Re} \Delta' \vec{v}'$

►  $St = \frac{L}{UT}$ , nombre de Strouhal =  $\frac{\text{termes instationnaires}}{\text{termes convectifs}}$  (ex : fils d'une harpe en résonance)

►  $Fr = \frac{U^2}{gL}$ , nombre de Froude =  $\frac{\text{vitesse d'écoulement}}{\text{vitesse locale des ondes de surface}}$  (ex : bourrelet d'eau dans un évier)

Théorème de Vaschy-Buckingham :

"**Toute loi physique s'écrit sous la forme  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$  où les  $a_i$  sont n grandeurs caractéristiques du système qui font intervenir k dimensions indépendantes. On démontre que l'on peut écrire cette loi sous la forme  $g(\pi_1, \dots, \pi_{n-k})$  où les  $\pi_i$  sont n-k grandeurs sans dimensions**"

► Méthode :

- Déterminer des variables indépendantes du pb

- former un système complet de produits sans dimensions, le nb de produits sans dimensions nécessaire est donné par le th de VB

Dimensions/Systèmes d'unités :

Une grandeur physique est définie par sa dimension et sa mesure.

*Dimension* : longueur, tps, vitesse, ...  $\rightarrow$  s'exprime en fct de dimensions de base (L, T, M, I)

*Mesure* : valeur numérique définie par comparaison de la quantité avec un étalon.

## B. Couches limites laminaires : théorie de Prandtl

Cadre de l'étude : (voir page suivante)

écoulement stationnaire, incompressible et laminaire

écoulement plan de normale z,  $u=(u,v)$

Plaque semi infinie, pesanteur négligée.

Système à résoudre :

$$\begin{cases} u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \cdot \left( \frac{d^2}{dx^2}(u) + \frac{d^2}{dy^2}(u) \right) \\ u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \cdot \left( \frac{d^2}{dx^2}(v) + \frac{d^2}{dy^2}(v) \right) \\ \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dy}(v) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(x,+\infty) = U \end{cases}$$

(eq 1&2 : NS, 3 : conservation masse, 4&5 ; CL)

Ordre de grandeur de l'épaisseur :  $\delta(x) \sim \sqrt{\frac{\nu \cdot x_0}{U}}$

$$\text{d'où } \frac{\delta(x)}{x_0} \sim \sqrt{\frac{\nu}{U \cdot x_0}} = \frac{1}{\sqrt{Re_{x_0}}} \ll 1$$

ac  $Re_{x_0}$ ; nb de Re local

Echelles du problème :

$$\frac{\delta(x)}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_L}}, \text{ On note } \delta(L) = \delta, \text{ on a } \delta \ll L$$

$$\frac{d}{dx}(u) \sim \frac{U}{L} \text{ et } \frac{d}{dy}(v) \sim \frac{V}{\delta}$$

Transduct° de la conservat° de la masse en ordre de grandeur :  $\frac{U}{L} = \frac{V}{\delta}$  (1) or  $L \gg \delta$  donc  $\frac{U}{L^2} \ll \frac{V}{\delta^2}$  (2)

(1) et (2) permettent d'estimer les ordres de grandeurs relatifs des termes des équations de NS, on aboutit à :  $\frac{d}{dx}(P) \gg \frac{d}{dy}(P)$  ainsi qu'aux

équations de Prandtl :

$$\begin{cases} u \cdot \frac{d}{dx}(u) + v \cdot \frac{d}{dy}(u) = U(x) \cdot \frac{d}{dx}(U(x)) + \nu \cdot \frac{d^2}{dy^2}(u) \\ u \cdot \frac{d}{dx}(v) + v \cdot \frac{d}{dy}(v) = 0 \\ \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dy}(v) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(x,+\infty) = U \end{cases}$$

NB : loin de la plaque on a :  $P = P^\infty(x)$  et un comportement de fluide parfait, Bernoulli donne alors :  $P^\infty(x) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U(x)^2 = cte$

$$\text{d'où } \frac{d}{dx}(P) + \rho \cdot U(x) \cdot \frac{d}{dx}(U(x)) = 0$$

Loin du corps et tant que l'écoulement est laminaire :

écoulement de type fluide parfait

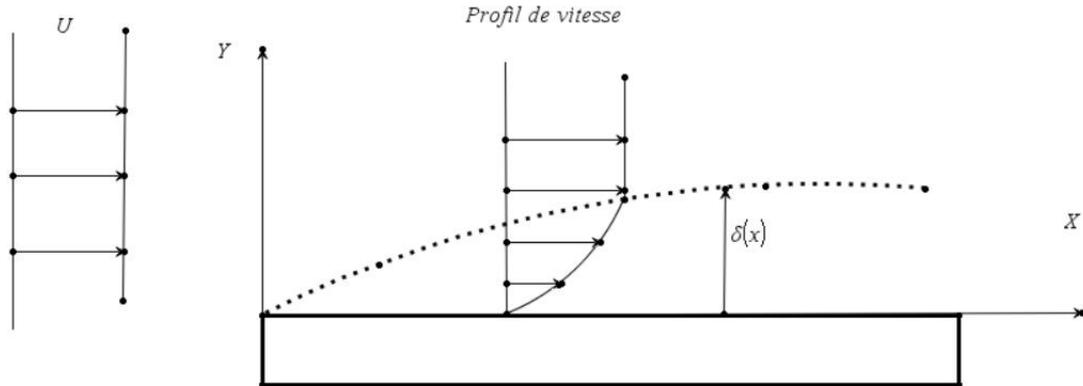
À la surface du corps solide : vitesse nulle (viscosité)

2 modèles ds le même écht, raccord ds la couche limite

Ds la couche limite : effets combinés de la viscosité

et du transport convectif de qté de mvt  $\Rightarrow$  eq difficiles

à résoudre sans approximations



## 9. Coefficients aérodynamiques

Force de portance :  $F_p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_y \cdot S \cdot V^2$

Force de traînée :  $F_t = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_x \cdot S \cdot V^2$

Pour une sphère dans un écoulement avec vitesse loin de la sphère =  $U_\infty$

la force de traînée est  $6\pi\eta R U_\infty$  soit  $C_x = \frac{24}{Re}$

### 10. Écoulement de Couette entre plans // en mvt relatif selon x en cartésien :

Écoulement induit par un mouvement relatif, incompressible, stationnaire, laminaire, visqueux.

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} V_x(x,y) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{div}(\vec{V}) \Rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \quad \text{donc} \quad \vec{V} = \begin{bmatrix} V_x(y) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Navier Stokes :  $\vec{0} = \rho \vec{f} - \text{grad} p + \mu \Delta \vec{V}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho g \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial y} \\ -\frac{\partial p}{\partial z} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu \cdot \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}(y) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(y) = \rho g \cdot y \\ V_x(y) = A \cdot y + B \end{cases} \quad \text{pression hydrostatique}$$

$$\text{CL: } \begin{cases} V_x(0) = 0 \\ V_x(h) = V_0 \end{cases} \Rightarrow V_x(y) = \frac{V_0}{h} y$$

► on intègre sur la surface pour obtenir le **débit** :  $Q_m = \int_S (V_x(r) \cdot r) dr d\theta dz = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{\Delta p}{L} R^4 V_m = \frac{Q_m}{S} = -\frac{1}{8\mu} \frac{\Delta p}{L} R^2$  et

$$V_{\max} = 2 \cdot V_m = -\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{L} R^2$$

► **force de frottement** = int sur la paroi de  $\sigma_{rz}$

$$F_f = \int_{S_{\text{lat}}} \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) dS = \frac{\mu \cdot V_0}{h}$$

$$\tau = \sigma_{rz} = \frac{F_f}{d \cdot L} = \frac{\mu \cdot V_0}{d \cdot L \cdot h}$$

**Écoulement de Poiseuille selon x en cartésien :**

Écoulement induit par un gradient de pression, incompressible, stationnaire, laminaire, visqueux, pesanteur négligée.  $\text{div}(\mathbf{V}) \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$

donc  $\vec{V} = \begin{bmatrix} v_x(y) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Navier Stokes :  $\vec{0} = -\vec{\text{grad}}p + \mu \Delta \vec{V}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x} \\ -\frac{\partial p}{\partial y} \\ -\frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -K \Rightarrow \begin{cases} p(x) = \frac{\Delta p}{L} x + p_0 \\ v_x(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{L} y^2 + A y + B \end{cases} \quad \Delta p < 0$$

(on pourrait retrouver ce résultat avec un PFS)

▶ Si l'origine est en bas : ATTENTION plusieurs cas

CL :  $\begin{cases} v_x(0) = 0 \\ v_x(h) = 0 \end{cases} \Rightarrow v_x(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{L} y \cdot (y-h)$

▶ Si l'origine est au centre

CL :  $\begin{cases} v_x\left(-\frac{h}{2}\right) = 0 \\ v_x\left(+\frac{h}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow v_x(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{L} \left( y^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right)$

▶ on intègre sur la surface pour obtenir le **débit** :

ATTENTION aux bornes

$$Q_m = \int_S (v_x(y) \cdot r) dy dz = -\frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{L} \frac{h^3 d}{6} v_m = \frac{Q_m}{S} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{L} \frac{h^2}{6}$$

▶ **force de frottement** = int sur la paroi de  $\sigma_{rz}$

$$F_f = \int_{S_{\text{int}}} \mu \cdot \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dS = \frac{\Delta p \cdot d \cdot L}{2}$$

(on pourrait retrouver ce résultat avec un PFS)

$$\tau = \sigma_{rz} = \frac{F_f}{d \cdot L} = \frac{\Delta p}{2} \quad \text{ne dépend pas de } \mu$$

### Poiseuille dans un tube cylindrique de rayon R :

Écoulement induit par un gradient de pression, incompressible, stationnaire, laminaire, visqueux, pesanteur négligée.

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V_z(r, \theta, z) \end{bmatrix} \text{ axisymétrique} + \text{div}(V) \Rightarrow \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow V_z(r)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial r} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \text{constant} \Rightarrow p(\mathbf{z}) = \frac{\Delta p}{L} \cdot \mathbf{z} + p_0 \text{ avec } \Delta p < 0$$

$$\mu \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) = \frac{\Delta p}{L} \Rightarrow V_z(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{L} r^2 + A \ln(r) + B$$

$$\text{CL: } V_z(R) = 0 \text{ et } V_z(0) \neq \infty \Rightarrow V_z(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{L} (R^2 - r^2)$$

► on intègre sur la surface pour obtenir le **débit** :  $Q_m = \int_S (V_z(r) \cdot r) dr d\theta dz = -\frac{\pi}{8\mu} \frac{\Delta p}{L} R^4 V_m = \frac{Q_m}{S} = -\frac{1}{8\mu} \frac{\Delta p}{L} R^2$  et

$$V_{\max} = 2 \cdot V_m = -\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{L} R^2$$

► **force de frottement** = int sur la paroi de  $\sigma_{rz}$

$$F_f = \int_{S_{\text{lat}}} \mu \cdot \left( \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) dS = \pi \cdot R^2 \cdot \Delta p$$

$$\tau = \sigma_{rz} = \frac{F_f}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot L} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta p}{L} R \text{ ne dépend pas de } \mu$$

► **coefficient de perte de charge linéique**  $\lambda$

$$\lambda = \frac{\frac{\Delta p}{L} D}{\frac{1}{2} \rho V_m^2} \text{ et } \text{Re} = \frac{\rho V_m D}{\mu} \Rightarrow \lambda = \frac{64}{\text{Re}} \text{ (}\lambda \text{ parfois noté } \zeta)$$

on retrouve  $\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$  pour un écoulement laminaire et  $\lambda = f\left(\frac{1}{\text{Re}}\right)$  pour un tube lisse