



2013-2014

Master Formation d'Enseignants pour le Supérieur

Cours commun de mécanique des fluides

Marie-Caroline JULLIEN

Table des matières

1 Cinématique des fluides	5
1.1 Description du mouvement d'un fluide	5
1.1.1 Description Lagrangienne	5
1.1.2 Description Eulérienne	5
1.1.3 Accélération d'une particule de fluide	5
1.1.4 Lignes et tubes de courant, trajectoires	5
1.2 Déformations dans les écoulements	6
1.3 Conservation de la masse dans un fluide en écoulement	7
1.3.1 Equation de continuité	7
1.3.2 Condition d'incompressibilité d'un fluide	7
1.4 Ecoulement plan : fonction de courant	8
2 Dynamique des fluides visqueux	9
2.1 Forces de surface	9
2.2 Équation du mouvement d'un fluide	10
2.2.1 Équation de la dynamique d'un fluide dans le cas général	10
2.2.2 Équation de Navier-Stokes du mouvement d'un fluide newtonien	10
2.2.3 Équation d'Euler pour le mouvement d'un fluide parfait	11
2.3 Conditions aux limites dans les écoulements fluides	11
2.3.1 En fluide visqueux	11
2.3.2 En fluide parfait	12
2.4 Quelques exemples d'écoulements parallèles de fluides visqueux newtoniens	12
3 Équations de bilan	13
3.1 Équation de bilan de masse	13
3.2 Bilan de quantité de mouvement	13
3.2.1 Expression locale	13
3.2.2 Forme globale	13
3.3 Bilan d'énergie - équation de Bernoulli	14
3.3.1 Relations de Bernoulli pour un fluide parfait	14
3.4 Pertes de charge	15
4 Statique des fluides dans le champ de pesanteur	17
4.1 Equation fondamentale de la statique des fluides dans le champ de pesanteur	17
4.1.1 Fluide en équilibre	17
4.1.2 Equation de la statique dans le champ de pesanteur	17
4.2 Cas particulier où ρ peut être supposé constant sur la hauteur du domaine	18
4.3 Théorème d'Archimède	18
5 Analyse dimensionnelle	19
5.1 Rappels sur les dimensions et systèmes d'unités	19
5.2 Ordres de grandeur/Estimations	19
5.3 Forme adimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes	21
5.4 Théorème II et applications	22

Appendices

A Hydrostatique : Cas où l'on prend en compte les variations de ρ, application à 3 modèles simples d'atmosphère	25
--	-----------

B Opérateurs différentiels/résolution d'équations différentielles/synthèse sujets d'agreg	27
--	-----------

Chapitre 1

Cinématique des fluides

1.1 Description du mouvement d'un fluide

Hypothèse de continuité

1.1.1 Description Lagrangienne

Dans cette description on suit une particule de fluide au cours de son mouvement, en spécifiant sa position $\vec{r}_0 = O\vec{M}_0$ à un instant référence donné t_0 . La vitesse du fluide est alors caractérisée par le vecteur $\vec{V}(\vec{r}_0, t)$ qui est fonction des deux variables \vec{r}_0 et t . Le point de vue Lagrangien correspond à des mesures faites avec des instruments qui suivent le fluide dans son mouvement, tels que des ballons-sondes dans l'atmosphère ou des particules marquées.

Il est assez aisé de noter que cette approche ne permet pas de connaître un écoulement dans sa globalité car cela nécessite de suivre chaque particule fluide, c'est-à-dire une infinité de degrés de liberté. C'est pourquoi dans la plupart des analyses, l'approche utilisée est l'approche eulérienne qui elle consiste à s'intéresser aux champs de vitesse, température, densité ...

1.1.2 Description Eulérienne

L'ensemble des vitesses \vec{v} des particules de fluide de position $\vec{r} = O\vec{M}$ à l'instant t définit un champ de vecteurs $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Dans la description eulérienne du mouvement d'un fluide, on s'intéresse à la vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$ d'une particule de fluide qui coïncide à l'instant t avec le point fixe M de vecteur position \vec{r} ; à chaque instant, on regarde donc les vitesses de particules différentes. A un instant ultérieur t' , la vitesse au même point \vec{r} sera devenue $\vec{v}(\vec{r}, t')$. Ce point de vue est celui d'un observateur au repos par rapport au référentiel dans lequel est mesurée la vitesse \vec{v} et correspond bien aux études expérimentales réalisées avec des sondes fixes par rapport au mouvement du fluide. La description eulérienne présente cependant l'inconvénient d'introduire des termes non-linéaires dans l'expression de l'accélération, comme nous le verrons au paragraphe suivant.

1.1.3 Accélération d'une particule de fluide

L'accélération d'une particule de fluide dans un écoulement instationnaire est donnée par (démonstration en cours) :

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}} \quad (1.1)$$

On peut écrire l'équivalent de cette équation pour exprimer la variation d'autres grandeurs que la vitesse le long de la trajectoire d'une particule de fluide : par exemple, en exprimant la variation de la température $T(\vec{r}, t)$ de la particule ou de sa concentration $C(\vec{r}, t)$ en une espèce chimique. Ainsi la variation de température d'une particule le long de sa trajectoire vérifie :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})T \quad (1.2)$$

où $\partial T / \partial t$ est la dérivée temporelle de la température du fluide en un point fixe donné. Le second terme traduit la variation de T due à l'écoulement du fluide dans la direction du gradient de température.

1.1.4 Lignes et tubes de courant, trajectoires

Les lignes de courant sont les lignes du champ de vecteurs $\vec{v}(\vec{r}, t)$; elles sont définies comme étant les tangentes en chaque point au vecteur vitesse $\vec{v}(x, y, z, t_0)$ à un instant donné t_0 . Un tube de courant est l'ensemble des lignes de courant

s'appuyant sur un contour fermé. Mathématiquement, ces lignes sont définies par l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels qu'un déplacement $d\vec{M}(dx, dy, dz)$ le long de la ligne soit colinéaire au vecteur vitesse \vec{v} ; ceci peut s'exprimer par :

$$\boxed{d\vec{M} \wedge \vec{v} = \vec{0}} \quad \text{soit :} \quad \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}$$

On obtient l'équation des lignes de courant par intégration de ces deux équations différentielles.

Les lignes de courant peuvent être visualisées en faisant une photo en légère pose d'un ensemble de particules : la direction des segments obtenus donne celle du vecteur vitesse ; leur longueur est proportionnelle au module de la vitesse.

La trajectoire d'une particule de fluide est définie comme le chemin suivi par cette particule au cours du temps, c'est-à-dire l'ensemble des positions successives de cette particule au cours de son mouvement. On les obtient mathématiquement par intégration temporelle du champ de vitesse lagrangien $\vec{V}(\vec{r}_0, t)$, c'est-à-dire le système d'équations :

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}(\vec{r}_0, t)} \quad \text{soit :} \quad \frac{dx}{dt} = V_x(\vec{r}_0, t), \quad \frac{dy}{dt} = V_y(\vec{r}_0, t), \quad \frac{dz}{dt} = V_z(\vec{r}_0, t)$$

On peut les visualiser en photographiant en pose prolongée le déplacement d'un traceur émis pendant un temps très court en un point du fluide (colorant, bulle, particules diffusant la lumière ...).

Dans le cas d'un écoulement stationnaire ($\partial\vec{v}/\partial t = 0$), les lignes de courant et les trajectoires coïncident.

Ligne d'émission

1.2 Déformations dans les écoulements

Pour caractériser un matériau, le mécanicien mesurerait la déformation en fonction de la contrainte appliquée au matériau. Il définirait un solide à partir de sa réponse élastique : la déformation croît linéairement avec la contrainte appliquée. La déformation reste en général petite jusqu'à la rupture du solide. En revanche, dans un fluide la déformation peut être arbitrairement grande sans qu'il y ait une perte de cohésion. Pour un fluide visqueux, c'est la vitesse de déformation qui est proportionnelle à la contrainte appliquée. **Notion d'échelle de temps, exemple du glacier.**

Le terme "taux" signifiera dans la suite la variation de la quantité considérée par unité de temps.

Définition accroissement de vitesse.

Les quantités $G_{ij} = (\partial v_i / \partial x_j)$ sont les éléments d'un tenseur de rang deux, le tenseur des taux de déformation (ou des gradients de vitesse) du fluide. Il se décompose en une partie symétrique et une partie antisymétrique sous la forme :

$$G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.3)$$

En posant

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

et

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$G_{ij} = e_{ij} + \omega_{ij} \quad (1.4)$$

e_{ij} traduit la dilatation ou variation de volume (termes diagonaux) et la vitesse des déformations angulaires (termes non diagonaux).

La partie antisymétrique ω_{ij} traduit une rotation globale de la particule fluide sans variation de forme ou de volume :

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v}$$

Illustrations des différentes déformations

Prenons le cas d'un cisaillement simple (ou écoulement de Couette plan) ; celui-ci résulte de la composition d'une déformation et d'une rotation (cf. figure (1.1)). La vitesse n'a de composante non nulle que suivant l'axe Ox et ne varie que dans la direction perpendiculaire y . Ce type de champ de vitesse est obtenu en mettant en mouvement relatif parallèlement à leur plan deux plaques parallèles entre lesquelles est placé un fluide visqueux.

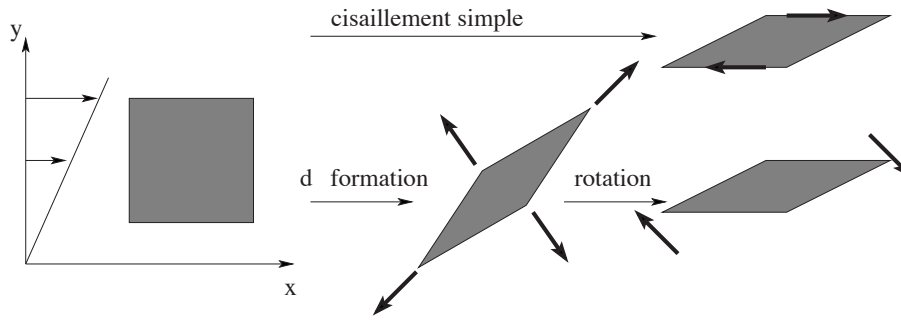


FIGURE 1.1 – La déformation d'un élément de volume dans un écoulement de cisaillement simple peut être décomposée en la superposition d'une élongation sans rotation et d'une rotation.

1.3 Conservation de la masse dans un fluide en écoulement

1.3.1 Equation de continuité

Remarque préliminaire : Théorème de Reynolds : Soit un ensemble de particules fluides que l'on suit dans leur mouvement et qui occupe un volume \mathcal{D}_t à l'instant t . Soit aussi une propriété physique représentée en variable d'Euler par $F(\vec{x}, t)$. La variation de la somme de cette valeur physique sur le volume \mathcal{D}_t au cours du temps vaut :

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_{\mathcal{D}_t} F(\vec{x}, t) d\tau \right) = \iiint_{\mathcal{D}_t} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial(F.v_j)}{\partial x_j} \right) d\tau$$

Démonstration du théorème de Reynolds

Nous considérons un volume \mathcal{V} quelconque, fixe par rapport au référentiel utilisé pour décrire l'écoulement du fluide, et limité par une surface fermée \mathcal{S} . A chaque instant, du fluide entre et sort de ce volume ; la variation de la masse totale m qu'il contient est égale et opposée au flux sortant à travers la surface. Nous avons donc d'après le théorème de Reynolds :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho dV = \iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{v} \right) dV = 0$$

Cette équation est vérifiée quel que soit le volume \mathcal{V} ; en faisant tendre la taille de ce dernier vers 0, on obtient l'équation de continuité :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{v} = 0} \quad (1.5)$$

En notant que :

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = \rho \text{div} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \rho$$

On peut écrire l'équation de continuité sous la forme :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \rho \right) + \rho \text{div} \vec{v} = 0$$

L'équation de continuité s'écrit donc de manière équivalente :

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0} \quad (1.6)$$

1.3.2 Condition d'incompressibilité d'un fluide

Pour un fluide incompressible, c'est-à-dire tel que la masse volumique de chaque élément reste constante au cours du mouvement ($d\rho/dt = 0$), l'équation de conservation de la masse prend la forme simple suivante :

$$\boxed{\text{div} \vec{v} = 0}$$

Les conditions dans lesquelles un fluide peut être considéré comme incompressible peuvent se réduire dans la plupart des cas à l'inégalité :

$$U \ll c$$

où U représente l'échelle de vitesse caractéristique de l'écoulement et c est la célérité des ondes de pression dans le fluide considéré (ondes acoustiques par exemple). On peut écrire cette condition sous une forme adimensionnelle en utilisant le nombre de Mach $M = U/c$:

$$M \ll 1$$

Cette condition n'est manifestement pas vérifiée dans l'étude de la dynamique des gaz à grande vitesse (aéronautique, ondes de choc) : négliger la compressibilité d'un fluide revient en effet à supposer que la vitesse des ondes sonores est infinie.

1.4 Ecoulement plan : fonction de courant

La fonction de courant permet de ramener l'étude du champ vectoriel de vitesse d'un fluide incompressible à un champ scalaire. Un écoulement plan est un écoulement dont le champ de vitesse est, à tout instant, parallèle à un même plan, et qui ne varie pas perpendiculairement au plan. On a donc :

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} v_x(x, y, t) \\ v_y(x, y, t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

si $\text{div } \vec{v} = 0$, il existe un potentiel vecteur \vec{A} , tel que $\text{div } \text{rot } \vec{A} = 0$; dans le cas d'un écoulement bidimensionnel sur le plan (x, y) , le vecteur \vec{A} n'a qu'une seule composante sur z .

En notant $\psi \equiv A_z$ et en considérant :

$$\text{div } \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

avec :

$$\text{rot } \psi \vec{z} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{y}$$

Soit :

$$\text{div } \text{rot } \psi \vec{z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

Par analogie :

$$\boxed{v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}}$$

ψ s'appelle la fonction de courant car elle permet un calcul simple des lignes de courant. En effet, on obtient aussitôt $d\psi = 0$.

$$\boxed{\text{Les lignes } \psi(x, y, t) = C(t) \text{ sont les } \textit{lignes de courant}}$$

Si de plus $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$, la seule composante du rotationnel est celle perpendiculaire au plan, et s'écrit :

$$\omega_3 = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

Ce qui implique :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Autrement dit, ψ est une fonction harmonique car elle vérifie l'équation $\Delta \psi = 0$.

Chapitre 2

Dynamique des fluides visqueux

2.1 Forces de surface

Contraintes dans un fluide

Considérons un élément de surface d'aire dS dans un fluide. On analyse la force exercée par la fraction de fluide située d'un côté de l'élément sur celle située de l'autre côté : la contrainte est la valeur de la force qui s'exerce sur l'unité de surface. Dans un fluide au repos, elle est normale aux éléments de surface et sa norme est indépendante de l'orientation de ceux-ci. La contrainte étant isotrope, il suffit d'un seul nombre pour en caractériser la valeur en chaque point ; c'est la pression hydrostatique. Dans un fluide en mouvement, il apparaît en outre des contraintes tangentes à l'élément de surface dS . Ces contraintes reflètent les forces de frottement entre couches de fluide glissant les unes par rapport aux autres, et sont dues à la viscosité du fluide. La viscosité est en effet un coefficient de transport qui traduit le transfert de quantité de mouvement des zones de plus grandes vitesses vers les zones de plus faibles vitesses.

Le tenseur σ_{ij} possède 9 coefficients, tenseur de rang 2 qui s'écrit comme une matrice trois sur trois ; l'élément σ_{ij} du tenseur ($i=1$ à 3, $j=1$ à 3) représente la composante suivant i de la contrainte, ou force par unité de surface dont la normale est orientée suivant j . Ainsi :

- σ_{yx} est la composante suivant Oy de la force exercée sur une surface unité dont la normale est orientée suivant Ox ; c'est une *contrainte tangentielle ou de cisaillement*.
- σ_{xx} est la composante suivant Ox de la force exercée sur une surface perpendiculaire à la même direction Ox ; c'est une *contrainte normale*.

Forces de pression et tenseur des contraintes de viscosité pour un fluide newtonien

On peut extraire du tenseur des contraintes la partie qui correspond aux contraintes de pression, qui sont les seules présentes en l'absence de gradient de vitesse. Cette composante est purement diagonale (contraintes exclusivement normales) et isotrope (les trois coefficients diagonaux ont la même valeur) ; on décompose le tenseur sous la forme :

$$\boxed{\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p\delta_{ij}} \quad \text{notation tensorielle : } \bar{\sigma} = -p\bar{I} + \bar{\sigma}' \quad (2.1)$$

où p est la pression et δ_{ij} représente le tenseur de Kronecker ($\delta_{ij}=1$ si $i = j$, et $\delta_{ij}=0$ si $i \neq j$). Le signe négatif apparaissant devant p traduit le fait que le fluide au repos est généralement en compression : la contrainte est donc de sens opposé au vecteur \vec{n} normal à la surface, qui pointe vers l'extérieur. Le terme σ'_{ij} est l'élément générique du tenseur des contraintes de viscosité : c'est la partie de σ_{ij} liée à la déformation des éléments de fluide. Le tenseur σ'_{ij} est symétrique. Dans le cas des fluides newtoniens et incompressibles on suppose que les composantes σ'_{ij} du tenseur des contraintes de viscosité, qui est lui-même symétrique, dépendent linéairement des composantes e_{ij} de la partie symétrique du tenseur des gradients de vitesse. On montre que ce tenseur s'écrit :

$$\boxed{\sigma'_{ij} = 2\mu e_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)} \quad \text{notation tensorielle : } \bar{\sigma}' = 2\mu\bar{\epsilon}$$

2.2 Équation du mouvement d'un fluide

2.2.1 Équation de la dynamique d'un fluide dans le cas général

Nous appliquons la relation fondamentale de la dynamique à un volume de fluide \mathcal{V} en écrivant l'égalité entre la variation temporelle de sa quantité de mouvement et l'ensemble des forces (de volume et de surface) exercées sur \mathcal{V} . Le volume \mathcal{V} est constitué d'éléments matériels dont il suit le déplacement :

$$\frac{d}{dt} \left[\iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{v} \, d\tau \right] = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{f} \, d\tau + \iint_S [\bar{\sigma}] \cdot \vec{n} \, d\Sigma \quad (2.2)$$

Dans cette relation, $d\tau$ représente le volume d'un élément matériel de fluide et $d\Sigma$ est un élément de la surface fermée \mathcal{S} limitant le volume \mathcal{V} . Le tenseur $[\bar{\sigma}]$ prend en compte l'ensemble des forces de surface (pression et viscosité) s'exerçant sur l'élément $d\Sigma$. La force par unité de masse \vec{f} appliquée à l'unité de masse du fluide est, par exemple, la pesanteur ou la force électrostatique sur un fluide chargé. En manipulant cette égalité on obtient :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \, d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{f} \, d\tau + \iiint_{\mathcal{V}} \text{div} [\bar{\sigma}] \, d\tau \quad (2.3)$$

En faisant tendre ce volume vers zéro et en divisant par l'élément de volume, on obtient l'équation **locale** de mouvement d'une particule de fluide :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} + \text{div} [\bar{\sigma}] \quad (2.4)$$

Dans $[\bar{\sigma}]$, séparons la partie correspondant aux forces de pression de celle qui se rapporte aux forces de viscosité ($\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p\delta_{ij}$). On obtient :

$$(\text{div} [\bar{\sigma}])_i = (\text{div} [\sigma'])_i - \frac{\partial(p\delta_{ij})}{\partial x_j} = (\text{div} [\sigma'])_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

On obtient finalement :

$$\boxed{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} = \rho \vec{f} - \text{grad} p + \text{div} [\sigma']} \quad (2.5)$$

- Le premier terme du membre de gauche de cette équation représente l'accélération d'une particule de fluide due à la variation explicite de sa vitesse avec le temps dans un repère eulérien fixe ;
- le second terme correspond à la variation de vitesse associée à l'exploration du champ de vitesse par la particule de fluide au cours de son mouvement. Cette accélération sera présente même dans un champ de vitesse stationnaire ;
- le terme $\rho \vec{f}$ du membre de droite regroupe l'ensemble des forces en volume appliquées au fluide.
- le second terme $-\text{grad} p$ représente les forces de pression correspondant aux contraintes normales, qui existent même en l'absence de mouvement (pression hydrostatique). Dans le cas d'un fluide immobile ($\vec{v} = 0$), l'équation se réduit à :

$$\rho \vec{f} - \text{grad} p = 0$$

qui exprime le principe fondamental de l'hydrostatique ;

- enfin, le dernier terme $\text{div} [\sigma']$ représente les forces de viscosité dues à la déformation des éléments de fluide. Il contient à la fois les contraintes tangentiels, et les contraintes normales qui peuvent intervenir au cours du mouvement d'un fluide compressible ou élastique.

2.2.2 Équation de Navier-Stokes du mouvement d'un fluide newtonien

Equations avec la viscosité de volume

Pour un fluide newtonien et incompressible on obtient pour $\text{div} [\sigma']$:

$$\left(\text{div} [\sigma'] \right)_i = \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

Dans cette écriture les variations spatiales de μ sont implicitement négligées. On obtient finalement :

$$\text{div} [\sigma'] = \mu \Delta \vec{v} \quad (2.6)$$

On obtient l'équation de Navier-Stokes :

$$\boxed{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} = \rho \vec{f} - \text{grad} p + \mu \Delta \vec{v}} \quad (2.7)$$

$[\mu]=ML^{-1}T^{-1}$, l'unité dans le système international est le Poiseuille, symbole Pl. On utilise usuellement le Poise, symbole Po (1 Po=0,1 Pl). $\mu_{eau}=10^{-3}$ Pl et $\mu_{air}=18.10^{-6}$ Pl.

Cette équation est souvent écrite de la manière suivante :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } P + \nu \Delta \vec{v}$$

où ν est la viscosité cinématique, qui a les dimensions d'un coefficient de diffusion $[\nu]=L^2T^{-1}$. Attention, la viscosité cinématique n'a rien à voir avec la viscosité dynamique : c'est un artifice de calcul qui ne mesure en aucun cas la viscosité. Pour bien s'en convaincre, il n'y a qu'à faire le rapport ν_{eau} et ν_{air} et comparer avec le rapport entre μ_{eau} et μ_{air} ($\nu_{eau}=10^{-6}$ m²s⁻¹ et $\nu_{air}=15.10^{-6}$ m²s⁻¹)

Forme adimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes

L'équation de Navier-Stokes étant non linéaire, rares sont les cas où l'on peut obtenir des solutions analytiques. Toutefois, il est souvent possible de simplifier l'équation en faisant une analyse d'ordre de grandeur entre le terme non linéaire $(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}$ et le terme de viscosité $\nu \Delta \vec{v}$. On définit alors le nombre de Reynolds comme :

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu}$$

On peut distinguer deux régimes d'écoulement :

- Pour $Re \ll 1$, l'écoulement est dit laminaire. La viscosité domine sur les termes non linéaires qui peut alors être négligé, c'est le régime dit de Stokes, l'équation devient linéaire.
- Pour $Re \gg 1$, l'écoulement est turbulent et non déterministe, ce cas ne sera pas traité en cours.

2.2.3 Équation d'Euler pour le mouvement d'un fluide parfait

L'équation d'Euler est l'équation de la quantité de mouvement pour un fluide parfait (pour lequel les effets de viscosité sont négligeables) et incompressible. C'est donc simplement un cas particulier de l'équation de Navier-Stokes, dans laquelle nous posons $\mu=0$, pour obtenir :

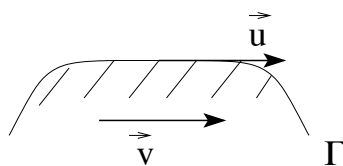
$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v} = \rho \vec{f} - \text{grad } p \quad (2.8)$$

Cette équation est strictement valable pour les fluides parfaits, c'est-à-dire de viscosité nulle. C'est le cas de l'Helium dont l'isotope 4 voit sa viscosité s'annuler complètement lorsqu'il est refroidi à une température inférieure à 2,17 K. Cette équation est également valable pour des écoulements à grands nombres de Reynolds, l'équation d'Euler peut être appliquée suffisamment loin des parois, mais seulement si l'écoulement en volume n'est pas turbulent. L'existence et les caractéristiques des zones où l'équation d'Euler ne s'applique pas (couche limite près d'une paroi solide, sillage derrière un obstacle) seront discutées ultérieurement.

2.3 Conditions aux limites dans les écoulements fluides

2.3.1 En fluide visqueux

Fluide / paroi :



Fluide / fluide :

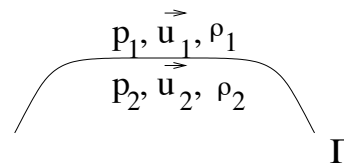


FIGURE 2.1 – Conditions aux limites pour un fluide visqueux.

À la surface d'un corps solide La non-pénétration du fluide dans le solide impose l'égalité des composantes de vitesse perpendiculaires à la surface de séparation, pour le fluide et pour le solide :

$$\vec{v}_{solide} \cdot \vec{n} = \vec{v}_{fluide} \cdot \vec{n}$$

Les contraintes de viscosité interdisent le glissement du fluide par rapport à la surface solide. Les composantes tangentielles des vitesses du fluide et du solide doivent donc être égales, ce qui conduit à la relation :

$$\boxed{\vec{v}_{solide} = \vec{v}_{fluide}} \quad (2.9)$$

Entre deux fluides Il faut également exprimer une condition sur la continuité des contraintes (forces par unité de surface) à la surface de séparation entre les deux fluides. On doit en effet avoir équilibre entre les contraintes à l'intérieur de chacun des deux liquides et les contraintes localisées sur la surface.

– Equilibre des contraintes tangentielles à l'interface :

$$\mu^{(1)} \left(\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial x_i} \right) n_j = \mu^{(2)} \left(\frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(2)}}{\partial x_i} \right) n_j = 0 \quad \text{pour interface liquide/gaz}$$

– Equilibre des contraintes normales à l'interface :

$$p^{(1)} n_i = p^{(2)} n_i$$

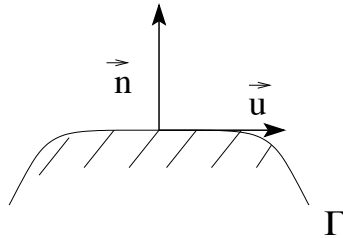
Ce qui se résume en notation vectorielle :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \\ \vec{T}_1(M, \vec{n}_1) = -\vec{T}_2(M, \vec{n}_2) \end{cases}} \quad \text{sur } \Gamma \quad (2.10)$$

où $\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\sigma} \cdot \vec{n}$

2.3.2 En fluide parfait

Fluide / paroi :



Fluide / fluide :

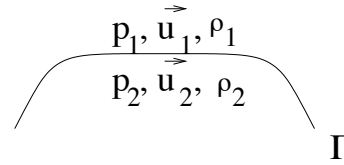


FIGURE 2.2 – Conditions aux limites pour un fluide parfait

À la surface d'un corps solide De même que pour les fluides réels, la non-pénétration du fluide dans le solide impose l'égalité des composantes de vitesse perpendiculaires à la surface de séparation, pour le fluide et pour le solide :

$$\boxed{\vec{v}_{solide} \cdot \vec{n} = \vec{v}_{fluide} \cdot \vec{n}} \quad (2.11)$$

Pour un fluide parfait (viscosité nulle) aucune condition n'est à imposer sur la composante tangentielle de la vitesse; cela implique que le glissement du fluide parallèlement à la paroi solide est possible.

Entre deux fluides La viscosité étant nulle, seul l'équilibre des contraintes normales à l'interface est à prendre en compte :

$$\boxed{p^{(1)} n_i = p^{(2)} n_i} \quad (2.12)$$

On obtient alors :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{u}_1 \cdot \vec{n} = \vec{u}_2 \cdot \vec{n} \\ p_1 = p_2 \end{cases}} \quad \text{sur } \Gamma \quad (2.13)$$

2.4 Quelques exemples d'écoulements parallèles de fluides visqueux newtoniens

cf. TD

Chapitre 3

Équations de bilan

3.1 Équation de bilan de masse

Cette équation a déjà été établie au premier chapitre. Elle s'écrit du point de vue eulérien :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0} \quad (3.1)$$

Nous utilisons la convention d'Einstein en effectuant une somme implicite sur les indices apparaissant deux fois dans des facteurs différents d'un même terme. Cette équation exprime l'équilibre entre la variation de densité volumique $\partial \rho / \partial t$ d'une part, la divergence du courant de masse $\rho \vec{v}$ d'autre part.

3.2 Bilan de quantité de mouvement

3.2.1 Expression locale

La quantité de mouvement par unité de volume de fluide est égale à $\rho \vec{v}$; calculons la dérivée temporelle de sa i ème composante :

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (3.2)$$

En utilisant les équations obtenues au chapitre précédent, et en combinant avec la conservation de la masse ($\partial \rho / \partial t = -\partial(\rho v_j) / \partial x_j$) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \left[-v_i \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} \right] + \left[-\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \left(\operatorname{div}[\bar{\sigma}'] \right)_i + \rho f_i \right]$$

avec :

$$\left(\operatorname{div}[\bar{\sigma}'] \right)_i = \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} \quad \left(= \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \text{ pour un fluide newtonien} \right)$$

on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \sigma'_{ij}) + \rho f_i \quad (3.3)$$

Cette équation générale est valable pour tous les fluides, newtoniens ou non, incompressibles ou non. Nous y trouvons un terme $\partial(\rho v_i) / \partial t$ de variation de densité volumique de quantité de mouvement, la divergence d'un flux $(\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \sigma'_{ij})$ et un terme de source ρf_i . Pour dégager plus précisément la signification physique de ces différents termes, nous allons donner une expression globale de l'équation, en l'intégrant sur un volume macroscopique de fluide.

3.2.2 Forme globale

En intégrant l'équation ci-dessus sur un volume \mathcal{V} fixe dans l'espace (les particules de fluide peuvent donc traverser la frontière qui le limite) :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV = - \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \sigma'_{ij}) dV + \iiint_{\mathcal{V}} \rho f_i dV \quad (3.4)$$

Cette équation s'écrit dans le cas d'un fluide newtonien incompressible, avec la normale \vec{n} orientée vers l'extérieur du volume V , où le volume d'intégration V est fixe (on prend le théorème Reynolds avec une vitesse du volume nulle) :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho \vec{v} \, dV \right) = - \iint_S \left(\rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) + p \vec{n} - \vec{\sigma}' \cdot \vec{n} \right) dS + \iiint_V \rho \vec{f} \, dV} \quad (3.5)$$

- La première intégrale du second membre représente la contribution à la variation de quantité de mouvement du flux de celle-ci à travers la surface S .
 - $\rho v_i v_j$, le transport de la composante ρv_i dans la direction i de la quantité de mouvement par les particules en déplacement dans la direction j ;
 - $p \delta_{ij}$, le transport de quantité de mouvement associé aux forces de pression ;
 - $-\sigma'_{ij}$, le transport de quantité de mouvement associé aux forces de frottement visqueux.
 L'intégrale $-\iint_S p \vec{n} \, dS$ est la résultante des forces de pression exercées *normalement* à la surface S . L'intégrale $\iint_S \sigma' \cdot \vec{n} \, dS$ est égale à la composante *tangentielle* de la force de frottement visqueux exercées sur la surface S .
- La seconde intégrale du second membre représente la production de quantité de mouvement par unité de temps dans le volume considéré ; cet apport de quantité de mouvement est dû au champ de forces extérieures \vec{f} .

Par un choix judicieux du volume d'intégration, appelé *volume de contrôle* (limité par exemple par les parois d'un canal dans lequel s'écoule le fluide, ou par des surfaces confondues avec des tubes de courant, ou perpendiculaires à ceux-ci), on peut déterminer la force exercée sur les parois de ce volume par le fluide en écoulement.

3.3 Bilan d'énergie - équation de Bernoulli

Equation bilan de l'énergie sous forme globale + démonstration

3.3.1 Relations de Bernoulli pour un fluide parfait

La *relation de Bernoulli* traduit le bilan d'énergie pour les fluides *parfaits*, *incompressibles* dans le cas où les forces en volume \vec{f} dérivent d'un potentiel U avec $\vec{f} = -\text{grad } U$.

Pour un écoulement stationnaire

Hypothèses :

- fluide incompressible,
- fluide parfait,
- forces extérieures à distance dues seulement à la pesanteur $\vec{f} = \vec{g}$ ($U = -gz\vec{e}_z$),
- écoulement stationnaire,

Sous les hypothèses précédentes, nous avons l'équation du mouvement suivante :

$$\frac{1}{2} \text{grad} (\vec{v}^2) + (\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v} = -\text{grad} (gz) - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

que l'on peut écrire :

$$\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) = -(\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v}$$

En introduisant la charge :

$$\text{grad } X = -(\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v}$$

et en intégrant le long d'une ligne de courant on obtient :

$$\text{grad } X \cdot d\vec{x} = 0 \quad \text{car} \quad ((\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{x} = 0$$

ou

$$dX = 0$$

Nous en déduisons la première forme de l'équation de Bernoulli :

$$\boxed{\rho \frac{v^2}{2} + p + \rho gz = \text{constante,} \quad \text{le long d'une ligne de courant}} \quad (3.6)$$

Pour des écoulements potentiels

Considérons à présent le cas où l'écoulement du fluide est potentiel (le chapitre suivant traitera de ce type d'écoulements); le champ de vitesse \vec{v} dérive alors d'un potentiel ϕ tel que :

$$\vec{v} = \text{grad } \phi$$

On continue de supposer l'écoulement incompressible, et la présence de forces en volume dérivant d'un potentiel; par contre nous ne supposons plus le champ de vitesse stationnaire. L'équation de Bernoulli peut être établie directement à partir de l'équation d'Euler :

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{v^2}{2} + p + \rho gz = c(t) \text{ fonction arbitraire du temps} \quad (3.7)$$

Pour un écoulement stationnaire, cette forme semble se ramener à la forme précédente. La différence capitale vient de ce que la quantité $(\rho \frac{v^2}{2} + p + \rho gz)$ est *constante dans tout le volume de l'écoulement*.

On trouve cette formulation en partant de l'équation d'Euler et en écrivant :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \frac{v^2}{2} + (\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \frac{v^2}{2} \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } \phi) = \text{grad } \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{aligned}$$

3.4 Pertes de charge

Soit un écoulement rotationnel permanent de fluide incompressible newtonien dans le champ de pesanteur. Dans ce cas, $\vec{f} = -\text{grad}(gz)$ et l'équation de Navier-Stokes devient :

$$\frac{1}{2} \text{grad}(\vec{v}^2) + (\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v} = -\text{grad}(gz) - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v}$$

En introduisant la charge qui vaut cette fois-ci :

$$\text{grad } X = \nu \Delta \vec{v} - (\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v}$$

et en intégrant le long d'une ligne de courant on obtient :

$$\text{grad } X \cdot d\vec{x} = \nu \Delta \vec{v} \cdot d\vec{x} \quad \text{car } ((\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{x} = 0$$

ou

$$dX = \nu \Delta \vec{v} \cdot d\vec{x}$$

L'équation de Bernoulli $X = \text{cste}$ n'est donc plus valable, pour un filet de fluide visqueux. dX correspond à la *perte de charge*, c'est-à-dire à la perte d'énergie par unité de volume. Cette énergie est à la fois dissipée au sein du tube de courant et transformée en chaleur et échangée avec les tubes de courant voisins à cause des forces de viscosité.

Equation de Bernoulli généralisée, fluide visqueux

On considère cette fois-ci un fluide visqueux incompressible en régime permanent, soumis à des efforts de pesanteur. Le théorème de Bernoulli sous sa forme généralisée s'écrit le long d'un écoulement en régime permanent :

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2 + \zeta_{12} \quad (3.8)$$

Le terme ζ_{12} est appelé perte de charge. Il est lié à la viscosité du fluide et aux accidents de forme pouvant exister dans des canalisations. On distingue les pertes de charge régulières (dues à l'énergie dissipée dans une conduite longue à cause de la viscosité du fluide) et les pertes de charge singulières (dues aux accidents de formes : rétrécissements, diaphragmes, coudes, vannes ...).

$$\begin{cases} \text{pertes de charge régulières} & \zeta_{12} = \frac{1}{2} \zeta \rho v^2 \frac{L}{D} \\ \text{pertes de charge singulières} & \zeta_{12} = \frac{1}{2} \zeta \rho v^2 \end{cases} \quad (3.9)$$

ζ est appelé coefficient de perte de charge et est généralement donné par des abaques dont les figures (3.1 et 3.2) sont des exemples.

Démonstration équation de Navier-Stokes dans un repère tournant + éq. de Bernoulli correspondante

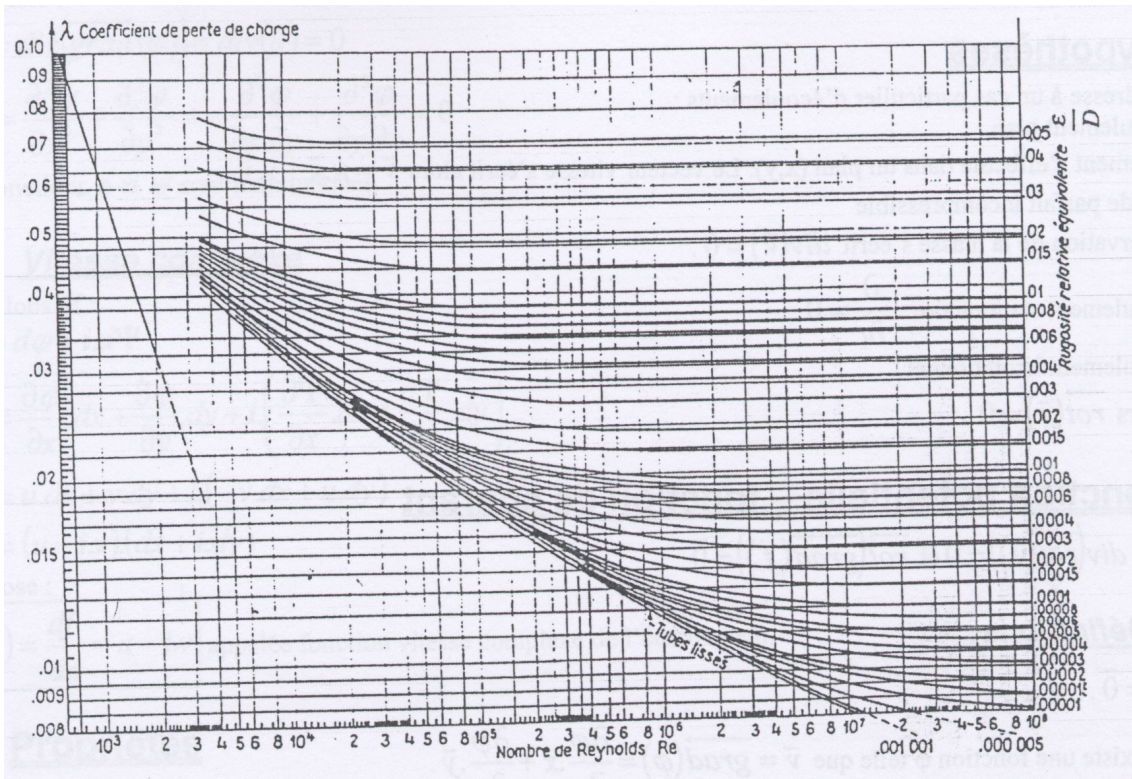


FIGURE 3.1 – Pertes de charges régulières : Abaque de Moody.

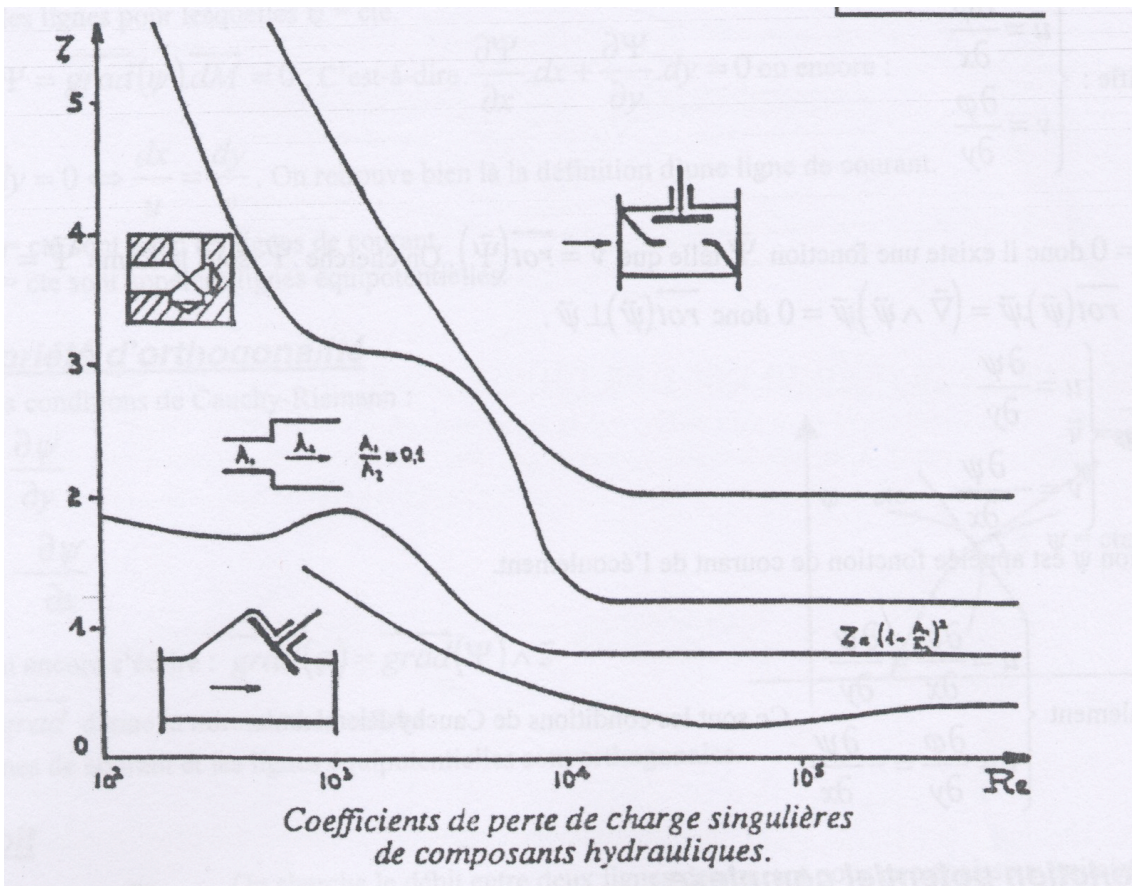


FIGURE 3.2 – Pertes de charges singulières pour différents organes.

Chapitre 4

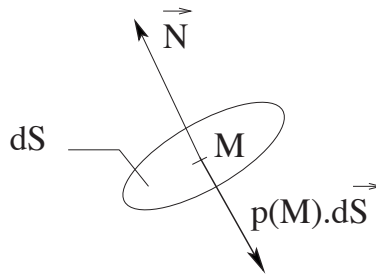
Statique des fluides dans le champ de pesanteur

4.1 Equation fondamentale de la statique des fluides dans le champ de pesanteur

4.1.1 Fluide en équilibre

On suppose $\forall \vec{x}, \forall t, \vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{0}$. L'équation de conservation de la masse implique immédiatement que la masse volumique ρ ne dépend que de variables d'espace. Plus généralement, on se place à l'équilibre donc $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Par ailleurs, la décomposition $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$ se réduit à $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$. En effet, lorsqu'un fluide est en équilibre dans le champ de pesanteur, l'expérience prouve que l'on a $\vec{T}(M, \vec{N}) = \alpha(M)\vec{N}$ avec $\alpha(M) < 0$. On pose $\alpha(M) = -p(M)$. Or, $\vec{T}(M, \vec{N}) = \sigma_{ij}(M).N_j$. On a donc la loi de comportement à l'équilibre :

$$\sigma_{ij}(M) = -p(M)\delta_{ij}$$



Il n'y a plus de contraintes tangentielles, seules les contraintes normales interviennent. Nous rappelons que les contraintes tangentielles sont liées au cisaillement pour un fluide visqueux.

4.1.2 Equation de la statique dans le champ de pesanteur

C'est le cas particulier de l'équation d'Euler pour laquelle $\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{0}$:

$$\rho\vec{g} = \vec{\text{grad}} p \quad (4.1)$$

Projetons cette relation. Si on prend \vec{e}_z selon la verticale ascendante¹, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$

qui s'écrit encore :

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho(z)g} \quad (4.2)$$

On a donc une seule équation pour deux inconnues ρ et p ; il nous faut une relation supplémentaire.

1. c'est-à-dire $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Il faut toujours préciser le repère choisi car le résultat de la projection en dépend.

4.2 Cas particulier où ρ peut être supposé constant sur la hauteur du domaine

L'intégration de l'équation précédente ne pose aucune difficulté. Si on choisit $p(h) = p_0$ comme condition aux limites (cas à la surface libre d'un liquide), et comme les contraintes sont continues à la traversée de la surface libre, on obtient la *formule de Pascal* :

$$p(z) = p_0 + \rho_0 g(h - z) \quad (4.3)$$

4.3 Théorème d'Archimède

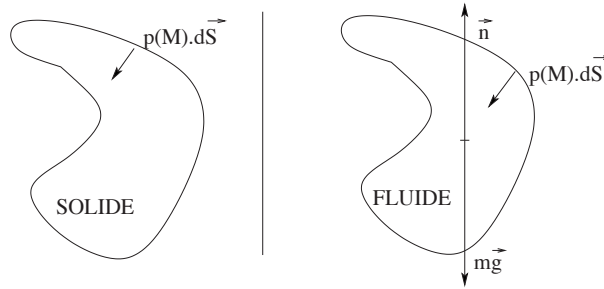
Énoncé

Soit un fluide *en équilibre* et un solide que l'on plonge dans ce fluide. La résultante des forces de pression exercées par le fluide sur le solide est un glisseur² opposé au poids du fluide déplacé.

$$\vec{P} + \vec{F}_{archi} = \vec{0} \Rightarrow m\vec{g} - V\rho_0\vec{g} = 0$$

où V est le volume occupé par le solide (volume immergé), et ρ_0 est la masse volumique du fluide dans lequel le solide est immergé.

Démonstration : On remplace le solide par du fluide (par la pensée). La distribution des forces de pression ne change



pas (les forces de pression ne dépendent que de la surface) or le fluide est en équilibre donc la somme des forces extérieures appliquées est nulle.

². Le terme glisseur signifie que, dans le torseur (une résultante et un moment) global des actions, le moment est nul : il n'y a pas de couple associé

Chapitre 5

Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle fournit des informations sur des phénomènes physiques à partir des considérations d'**homogénéité**. Ce type d'analyse conduit à une solution partielle de la plupart des problèmes, mais elle ne permet pas la détermination de solutions complètes et ne donne pas une explication des mécanismes physiques mis en jeu. On peut cependant obtenir des estimations à priori des termes qui composent les équations de bilan, dégager les termes dominants et déduire des équations simplifiées représentatives des mécanismes prépondérants. Très généralement, l'analyse dimensionnelle d'un problème permet la réduction du nombre des variables de ce problème. Après avoir déterminé les variables indépendantes du problème, on peut former un système complet de produits sans dimensions dont le nombre est inférieur à celui des variables initiales.

Un autre champ d'application de l'analyse dimensionnelle est celui des problèmes de similitude entre un modèle (une maquette à échelle réduite) et un prototype. L'analyse dimensionnelle définit dans ce cas les conditions de similitude dans lesquelles les mesures effectuées à échelle réduite sont représentatives du système en vraie grandeur. Dans ce type de problème, on isole des *lois d'échelles* telle que ces lois soient applicables quelle que soit l'échelle considérée (approche très utilisée en turbulence).

5.1 Rappels sur les dimensions et systèmes d'unités

Deux paramètres sont nécessaires pour définir une quantité physique :

- sa dimension : longueur, temps, vitesse, énergie, etc... ; celle-ci s'exprime en fonction d'un certain nombre de dimensions de base. Traditionnellement, notre perception du monde réel lui attribue trois dimensions de base : la masse M , la longueur L et le temps T (en fait, une quatrième intervient en électromagnétisme, l'intensité du courant I). Toute quantité dimensionnée est du type $[Q] = M^m L^l T^t$. Par exemple, la dimension d'une vitesse est $[v] = LT^{-1}$, celle d'une énergie est $[E] = ML^2T^{-2}$, etc.
- sa mesure : simple valeur numérique, définie par comparaison de la quantité avec un étalon de même dimension choisi comme unité. Ce choix est purement conventionnel et arbitraire. Plusieurs systèmes d'unités peuvent être construits sur les mêmes dimensions de base. Par exemple pour (M, L, T) :
 - le Système International (SI) : $\langle M \rangle =$ kilogramme, $\langle L \rangle =$ mètre, $\langle T \rangle =$ seconde ;
 - le système CGS : $\langle M \rangle =$ gramme, $\langle L \rangle =$ centimètre, $\langle T \rangle =$ seconde.

Une mesure n'est pas définie hors du système d'unités dans lequel elle a été obtenue. Soit l'accélération : $a = 100 \text{ m s}^{-2} = 10 \times g$. Sa mesure est 100 ou 10, selon qu'on a adopté le SI ou un système dans lequel g est l'unité d'accélération. Seules, les quantités sans dimension – en particulier un rapport de quantités de même dimension – ont la même mesure dans tous les systèmes d'unités. Par exemple $a/g = 10$ dans les deux systèmes ci-dessus.

Ajout ou retrait de dimensions

5.2 Ordres de grandeur/Estimations

L'estimation a priori de l'ordre de grandeur des termes des équations de bilan donne souvent des renseignements utiles. Ce type d'estimation permet :

1. de négliger les termes peu importants et donc de simplifier le problème à étudier,
2. d'obtenir des informations sur la solution avant d'avoir résolu le problème.

Nous allons introduire les techniques d'estimation à travers un exemple, puis nous déduisons des termes estimés quelques nombres sans dimensions importants. On considère l'écoulement autour d'un corps solide (Fig. 5.1). On considère les grandeurs typiques suivantes :

1. échelle : l , diamètre de l'obstacle (diamètre d'une conduite dans le cas de l'écoulement dans une conduite). Attention, il est parfois nécessaire de définir plusieurs échelles caractéristiques (cas de l'écoulement cisailé que l'on décrit à l'aide d'une échelle transverse δ et d'une échelle longitudinale l);
2. vitesse : U , vitesse à l'infini;
3. masse volumique : ρ ;
4. viscosité : μ
5. temps : $f_0 = 1/t_0$, si l'écoulement est instationnaire

Considérons à présent l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{v} = \rho \vec{g} - \vec{\text{grad}} p + \mu \Delta \vec{v}$$

(1) (2) (3) (4) (5)

L'estimation des termes qui interviennent dans cette équation peut être effectuée de la manière suivante (attention, elles sont toutes par unité de volume!!) :

(1) Quantité d'accélération instationnaire	$\left \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right \sim \rho \frac{U}{t_0} = \rho f_0 U$
(2) Quantité d'accélération convective (forces d'inertie)	$ \rho(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{v} \sim \rho \frac{U^2}{l}$
(3) Forces de pression, forme adaptée au cas compressible	$ \vec{\text{grad}} p \sim \frac{p}{l}$
forme adaptée au cas incompressible	$ \vec{\text{grad}} p \sim \frac{p - p_0}{l}$
(4) Forces de pesanteur	$ \rho \vec{g} \sim \rho g$
(5) Forces visqueuses	$ \mu \Delta \vec{v} \sim \mu \frac{U}{l^2}$

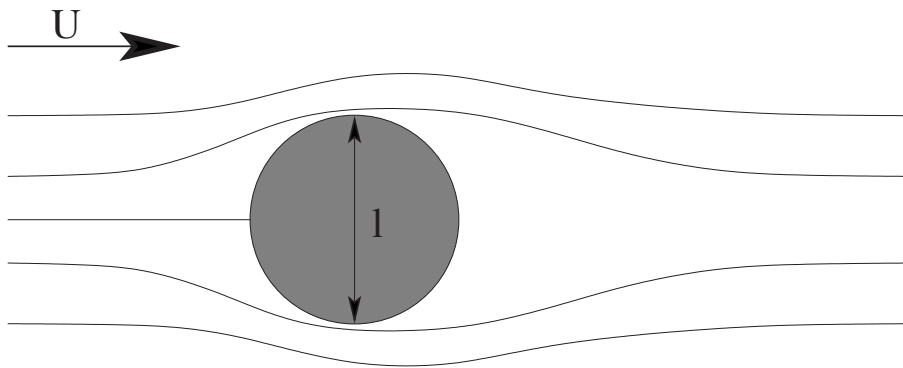


FIGURE 5.1 – Un écoulement typique.

On peut ensuite comparer ces estimations entre elles et obtenir des nombres sans dimensions qui permettront, en fonction de leur valeur, de ne prendre en compte que les effets dominants. Voici ci-après un petit catalogue de nombres sans dimension que l'on peut rencontrer dans des problèmes typiques :

Nombre d'Ekman	$E_k = \frac{\nu}{\Omega L^2}$	$\frac{\text{effets visqueux}}{\text{force de Coriolis}}$, écoulement en rotation à vitesse angulaire Ω
Nombre de Froude	$F_r = \frac{U^2}{gl}$	$\frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces de pesanteur}}$
Nombre de Mach	$M = \frac{U}{c}$	$\frac{\text{vitesse du fluide}}{\text{vitesse du son}}$
Nombre de Nusselt	$N_u = \frac{HL}{\kappa\Delta T}$	$\frac{\text{flux de chaleur avec convection}}{\text{flux de chaleur diffusif}}$, H est le flux de chaleur
Nombre de Péclet	$P_e = \frac{UL}{D}$	$\frac{\text{transport convectif}}{\text{transport diffusif}}$, D est la diffusion moléculaire
Nombre de Rayleigh	$R_a = \frac{\alpha\rho g\Delta TL^3}{\nu\kappa}$	$\frac{\text{forces d'Archimède}}{\text{force de Stokes}}$, α est le coefficient d'expansion thermique
Nombre de Reynolds	$R_e = \frac{Ul}{\nu}$	$\frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces visqueuses}}$

Nous avons considéré dans cet exemple un cas simple où par exemple une seule échelle caractéristique apparaît. Si en revanche on considère un écoulement dans un canal de hauteur b , de largeur w , et de longueur l , les échelles adimensionnées deviennent alors :

$$x' = \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{w}, \quad z' = \frac{z}{b},$$

L'ordre de grandeur des 3 termes du Laplacien deviennent alors :

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} = \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y'^2} = \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z'^2} = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial z'^2}$$

Les termes $\partial^2/\partial x'^2$ sont tous du même ordre de grandeur. Si on considère que le canal est tel que $l \gg w \gg b$, alors :

$$\frac{1}{l^2} \ll \frac{1}{w^2} \ll \frac{1}{b^2}$$

Par conséquent, seules les variations selon l'axe z seront significatives. L'équation pourra donc être simplifiée en ne considérant que les variations selon la verticale.

5.3 Forme adimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes

Le but de l'analyse dimensionnelle est de dégager les termes prépondérants dans l'équation de Navier-Stokes. L'équation de Navier-Stokes s'écrit dans un champ de pesanteur :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v}$$

Nous allons écrire l'équation de Navier-Stokes à l'aide de combinaisons sans dimension (que nous noterons par des primes) des différentes quantités qui y interviennent. Soient L et U les échelles respectives de taille (diamètre d'une conduite, diamètre d'un obstacle...) et de vitesse (vitesse moyenne dans un conduite) de l'écoulement ; on a :

$$\vec{r}' = \frac{\vec{r}}{L}, \quad \vec{v}' = \frac{\vec{v}}{U}, \quad t' = \frac{t}{T}, \quad p' = \frac{p - p_0}{1/2\rho U^2}$$

Nous avons introduit dans p' la valeur p_0 que prend la pression en l'absence d'écoulement (pression hydrostatique). T représente dans ce cas un temps (ou de manière équivalente une fréquence) caractéristique, comme par exemple la fréquence d'émission de tourbillons en aval d'un obstacle. L'équation de Navier-Stokes devient :

$$\left(\frac{U}{T}\right) \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + \left(U \times \frac{1}{L} \times U\right) (\vec{v}' \cdot \text{grad}') \vec{v}' = -g\vec{z}' - \left(\frac{1}{L} \times U^2\right) \text{grad}' p' + \left(\frac{1}{L^2} \times U\right) \frac{\mu}{\rho} \Delta' \vec{v}'$$

après division des deux membres par U^2/L :

$$\frac{L}{UT} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + (\vec{v}' \cdot \text{grad}') \vec{v}' = -\frac{Lg}{U^2} \vec{z}' - \text{grad}' p' + \frac{\mu}{\rho UL} \Delta' \vec{v}'$$

ou encore :

$$\frac{1}{St} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t'} + (\vec{v} \cdot \text{grad}') \vec{v} = -\frac{1}{Fr^2} \vec{z} - \text{grad}' p' + \frac{1}{Re} \Delta' \vec{v}$$

où

1. $St = UT/L$ est le nombre de Strouhal. Il représente le rapport des termes d'inertie et convectifs. Dans le *fil qui chante* ou dans la harpe éolienne du roi David, un fil tendu dans un écoulement d'air entre en résonance avec l'émission périodique de tourbillons, dans ce cas $St \sim 1$.
2. $Fr = U/\sqrt{gL}$ est le nombre de Froude associé à l'écoulement. Ce nombre représente le rapport de la vitesse de l'écoulement U à la vitesse locale des ondes de surface \sqrt{gL} . Tout le monde a pu observer l'apparition d'un bourrelet d'eau de forme circulaire au fond d'un évier dans lequel coule l'eau d'un robinet. Ce bourrelet est appelé ressaut. Le nombre de Froude passe d'une valeur supérieure à l'unité près du centre, à une valeur inférieure à la périphérie. Ce phénomène est analogue à l'onde de choc qui se forme près d'un avion supersonique et qui correspond au passage de la vitesse de l'air d'une valeur supérieure à une valeur inférieure à celle du son. Enfin, une vague déferlante représente une version mobile de ce phénomène.
3. $Re = (\rho UL/\mu) = (UL/\nu)$ est le nombre de Reynolds associé à l'écoulement. Ce nombre représente le rapport des termes non linéaires $(\vec{v} \cdot \text{grad}') \vec{v}$ aux termes de viscosité $\nu \Delta' \vec{v}$.

Si on prend comme temps caractéristique $T = L/U$, et dans le cas où les forces volumiques sont négligeables (ou écoulement en eau profonde), on obtient l'équation adimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t'} + (\vec{v} \cdot \text{grad}') \vec{v} = -\text{grad}' p' + \frac{1}{Re} \Delta' \vec{v}$$

On peut distinguer deux régimes d'écoulement :

- Pour $Re \ll 1$, l'écoulement est dit laminaire. La viscosité domine sur les termes non linéaires qui peut alors être négligé, c'est le régime dit de Stokes, l'équation devient linéaire.
- Pour $Re \gg 1$, l'écoulement est turbulent et non déterministe.

5.4 Théorème Π et applications

(nommé également théorème de Vaschy-Buckingham)

Théorème : Toute loi physique s'écrit sous la forme : $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, où les $(a_i)_{i=1, n}$ sont n grandeurs caractéristiques du système qui font intervenir k dimensions indépendantes. On démontre que l'on peut écrire cette loi sous la forme : $g(\pi_1, \dots, \pi_{n-k}) = 0$, où les $(\pi_i)_{i=1, n-k}$ sont des grandeurs sans dimensions.

Pour avoir un sens, toute loi physique doit pouvoir s'écrire en fonction de variables adimensionnées. Pour s'en convaincre, penser à ce qui se passe quand on change de système d'unités.

Remarque : Les a_i (grandeurs caractéristiques) peuvent être :

- des constantes fondamentales (constante de Planck, vitesse de la lumière, ...)
- des constantes caractéristiques du problème considéré (masse de la pomme, résistance du crâne d'Isaac Newton, ...).
- des variables (position x , temps t , ...)

On doit trouver résumés dans les a_i tous les phénomènes physiques et paramètres pertinents du problème considéré.

Appendices

Annexe A

Hydrostatique : Cas où l'on prend en compte les variations de ρ , application à 3 modèles simples d'atmosphère

On considère l'atmosphère comme un gaz parfait. On a l'équation d'état des gaz parfaits que l'on peut écrire :

$$\rho = \frac{Mp}{RT} \quad (\text{A.1})$$

où M est la masse molaire ($M=28,8.10^{-3}$ kg.mol $^{-1}$) et R la constante des gaz parfaits ($R= 8,314$ J.K $^{-1}$.mol $^{-1}$).

Atmosphère isotherme

Compte tenu de (4.2), on obtient :

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$$

Atmosphère à gradient thermique constant

On a :

$$T = T_0 - \kappa z \quad (\kappa \sim 6 \text{ K.km}^{-1}) \quad (\text{A.2})$$

En utilisant (4.2) et (A.1), on obtient :

$$dp = -\frac{Mp}{RT}gz \quad \text{soit, avec (A.2)} \quad dp = \frac{Mp}{\kappa RT}gdT$$

et donc :

$$p = p_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{\kappa R}}$$

Atmosphère adiabatique

On a l'équation de Laplace :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cste} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (\text{A.3})$$

En prenant la différentielle logarithmique de (A.3) et de (A.1) successivement :

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$$
$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T}$$

Après élimination de ρ on obtient :

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T}$$

En utilisant (4.2) et (A.1), on trouve :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dz$$

L'élimination de p entre ces deux expressions donne :

$$dT = -\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{Mg}{R} dz$$

On a donc une atmosphère à gradient thermique constant $\kappa' = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{Mg}{R}$. L'application numérique donne $\kappa' \sim 10\text{K.km}^{-1}$, ce qui correspond à l'idée courante (un degré pour 100m).

Annexe B

Opérateurs différentiels/résolution d'équations différentielles/synthèse sujets d'agreg

Coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{grad}} U &= \vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z \\
\text{div } \vec{A} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \\
\Delta U &= \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \\
\Delta \vec{A} &= \nabla^2 \vec{A} = (\Delta A_x) \vec{u}_x + (\Delta A_y) \vec{u}_y + (\Delta A_z) \vec{u}_z
\end{aligned}$$

Coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{grad}} U &= \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z \\
\text{div } \vec{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z \\
\Delta U &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \\
\Delta \vec{A} &= \left(\Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \vec{u}_r + \left(\Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\theta + (\Delta A_z) \vec{u}_z
\end{aligned}$$

Coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{grad}} U &= \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \\
\text{div } \vec{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\
\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\varphi \\
\Delta U &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r U) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \\
\Delta \vec{A} &= \left(\Delta A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r \\
&\quad + \left(\Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_\theta \\
&\quad + \left(\Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_\varphi
\end{aligned}$$

A l'ordre supérieur

Coordonnées cartésiennes

Si b est un vecteur (b_x, b_y, b_z) :

$$\overline{\overline{\text{grad } b}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial b_x}{\partial x} & \frac{\partial b_x}{\partial y} & \frac{\partial b_x}{\partial z} \\ \frac{\partial b_y}{\partial x} & \frac{\partial b_y}{\partial y} & \frac{\partial b_y}{\partial z} \\ \frac{\partial b_z}{\partial x} & \frac{\partial b_z}{\partial y} & \frac{\partial b_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Si b est une matrice : $\text{div } \underline{\underline{b}} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j} e_i$ (somme implicite sur l'indice j pour chaque i) ; soit :

$$\text{div } \overline{\underline{\underline{b}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial b_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial b_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial b_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial b_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial b_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial b_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial b_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial b_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial b_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Coordonnées cylindriques

Si b est un vecteur (b_r, b_θ, b_z) :

$$\overline{\overline{\text{grad } b}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial b_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial b_r}{\partial \theta} - b_\theta \right) & \frac{\partial b_r}{\partial z} \\ \frac{\partial b_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial b_\theta}{\partial \theta} + b_r \right) & \frac{\partial b_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial b_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial b_z}{\partial \theta} & \frac{\partial b_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Si b est une matrice :

$$\text{div } \overline{\underline{\underline{b}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial b_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial b_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial b_{rz}}{\partial z} + \frac{b_{rr} - b_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial b_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial b_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial b_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{b_{r\theta}}{r} \\ \frac{\partial b_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial b_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial b_{zz}}{\partial z} + \frac{b_{zr}}{r} \end{pmatrix}$$

Relations utiles

Relations intégrales

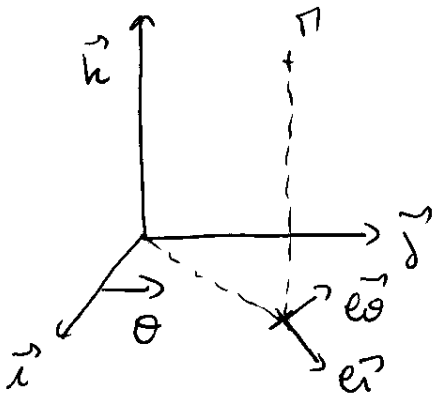
$$\begin{aligned} \iint_{S(V)} \vec{A} \cdot \vec{dS} &= \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dV && \text{Formule de Green-Ostrogradski} \\ \oint_C \vec{A} \cdot \vec{d\ell} &= \iint_{S(C)} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \cdot \vec{dS} && \text{Formule de Stokes} \\ \iint_{S(V)} U \vec{dS} &= \iiint_V \overrightarrow{\operatorname{grad}} U dV \\ \oint_C U \vec{d\ell} &= - \iint_{S(C)} \overrightarrow{\operatorname{grad}} U \wedge \vec{dS} && \text{Formule de Kelvin} \\ \iint_{S(V)} \vec{A} \wedge \vec{dS} &= - \iiint_V \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} dV \\ \iint_{S(V)} (U \overrightarrow{\operatorname{grad}} W - W \overrightarrow{\operatorname{grad}} U) \cdot \vec{dS} &= \iiint_V (U \Delta W - W \Delta U) dV \\ \iiint_V \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} U dV &= \iint_{S(V)} U \vec{A} \cdot \vec{dS} - \iiint_V U \operatorname{div} \vec{A} dV \\ \iiint_V \vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} dV &= \iint_{S(V)} (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dS} + \iiint_V \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} dV \\ \iint_{S(C)} U \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \cdot \vec{dS} &= \oint_C U \vec{A} \cdot \vec{d\ell} + \iint_{S(C)} (\vec{A} \wedge \overrightarrow{\operatorname{grad}} U) \cdot \vec{dS} \end{aligned}$$

Relations usuelles

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} U &= \Delta U \\ \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} &= 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{grad}} U &= 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} &= \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} \\ \overrightarrow{\operatorname{grad}} (UW) &= U \overrightarrow{\operatorname{grad}} W + W \overrightarrow{\operatorname{grad}} U \\ \operatorname{div} (U\vec{A}) &= U \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} U \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} (U\vec{A}) &= \overrightarrow{\operatorname{grad}} U \wedge \vec{A} + U \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} (\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{B} \\ \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \wedge \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} + \vec{B} \wedge \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{B} \end{aligned}$$

OPERATEURS / CYL.

①



base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$

$$\vec{e}_r = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r$$

$$\vec{A} = A_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + A_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + A_z(r, \theta, z) \vec{k}$$

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{I}_1 = \frac{\partial \vec{A}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_z \vec{k})$$

$$= \vec{e}_r \frac{\partial A_r}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \vec{k} \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

$$\vec{I}_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{A}}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_z \vec{k})$$

$$= \frac{1}{r} \left[\vec{e}_r \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + A_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} + \vec{e}_\theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + A_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} + \vec{k} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \right]$$

$$= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \theta} \vec{e}_r + A_r \vec{e}_\theta + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - A_\theta \vec{e}_r + \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \vec{k} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{A_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\theta + \frac{\partial A_z}{r \partial \theta} \vec{k}$$

$$\vec{I}_3 = \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \frac{\partial A_r}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \vec{e}_\theta + \frac{\partial A_z}{\partial z} \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \vec{e}_r \cdot \vec{I}_1 + \vec{e}_\theta \cdot \vec{I}_2 + \vec{k} \cdot \vec{I}_3 = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \text{ ok!} \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{e}_r \wedge \vec{I}_1 + \vec{e}_\theta \wedge \vec{I}_2 + \vec{k} \wedge \vec{I}_3$$

$$\vec{e}_r \wedge \vec{I}_1 = \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \vec{k} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{e}_\theta \wedge \vec{I}_2 = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r} \right) \vec{k} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \vec{e}_r$$

(2)

$$\vec{k} \wedge \vec{i}_3 = \frac{\partial A_r}{\partial z} \vec{e}_\theta - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \vec{e}_r$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \vec{e}_r \\ &+ \left[-\frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{\partial A_r}{\partial z} \right] \vec{e}_\theta \\ &+ \left[\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{A_\theta}{r} \right] \vec{k} \end{aligned}$$

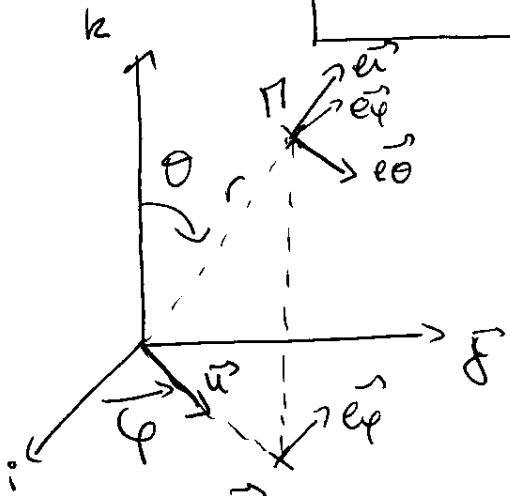
$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta \\ &+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A} &= \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{A} - \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{A} \\ &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{aligned}$$

à noter tout...

OPÉRATEURS / SPHÉRIQUE

①



base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

$$\vec{e}_r = \cos\theta \vec{k} + \sin\theta \vec{u}$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = -\sin\theta \vec{k} + \cos\theta \vec{u}$$

$$\vec{u} = \cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j}$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{d\vec{u}}{d\varphi} = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}$$

$$\vec{A} = A_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r + A_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\theta + A_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\vec{e}_\varphi}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned} \vec{I}_1 = \frac{\partial \vec{A}}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} (A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\varphi \vec{e}_\varphi) \\ &= \vec{e}_r \frac{\partial A_r}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \end{aligned}$$

$$\vec{I}_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{A}}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\varphi \vec{e}_\varphi)$$

$$= \frac{1}{r} \left[\vec{e}_r \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + A_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} + \vec{e}_\theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + A_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} + A_\varphi \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} \right]$$

$$= \frac{1}{r} \left[\vec{e}_r \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + A_r \vec{e}_\theta + \vec{e}_\theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - A_\theta \vec{e}_r + \vec{e}_\varphi \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \right] \quad \begin{array}{l} \text{car } \vec{e}_\varphi \\ \text{ne dépend} \\ \text{pas de } \theta \end{array}$$

$$= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{A_r}{r} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\theta + \frac{\partial A_\varphi}{r \partial \theta} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{I}_3 = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\varphi \vec{e}_\varphi)$$

$$= \frac{1}{r \sin\theta} \left[\vec{e}_r \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + A_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} + \vec{e}_\theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} + A_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} + \vec{e}_\varphi \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + A_\varphi \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} [\cos\theta \vec{k} + \sin\theta \vec{u}] = \frac{\partial}{\partial \varphi} [\cos\theta \vec{k} + \sin\theta \cos\varphi \vec{i} + \sin\theta \sin\varphi \vec{j}]$$

$$= -\sin\theta \sin\varphi \vec{i} + \sin\theta \cos\varphi \vec{j} = \sin\theta \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} [-\sin\theta \vec{k} + \cos\theta \vec{u}] = \frac{\partial}{\partial \varphi} [-\sin\theta \vec{k} + \cos\theta \cos\varphi \vec{i} + \cos\theta \sin\varphi \vec{j}]$$

$$= -\cos\theta \sin\varphi \vec{i} + \cos\theta \cos\varphi \vec{j} = \cos\theta \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{u}$$

d'où

(2)

$$\vec{I}_3 = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \vec{e}_r + A_r \sin \theta \vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \vec{e}_\theta + A_\theta \cos \theta \vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi - A_\varphi \vec{u} \right]$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \vec{e}_r \cdot \vec{I}_1 + \vec{e}_\theta \cdot \vec{I}_2 + \vec{e}_\varphi \cdot \vec{I}_3 \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_r}{r} + \frac{A_r}{r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{1}{\tan \theta} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{2A_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_\theta}{r} \frac{1}{\tan \theta} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \end{aligned}$$

Comparison avec formules :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{2A_r}{r}$$

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_\theta}{r} \frac{1}{\tan \theta}$$

OK!

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \underbrace{\vec{e}_r \wedge \vec{I}_1}_{\vec{J}_1} + \underbrace{\vec{e}_\theta \wedge \vec{I}_2}_{\vec{J}_2} + \underbrace{\vec{e}_\varphi \wedge \vec{I}_3}_{\vec{J}_3}$$

$$\vec{J}_1 = \frac{\partial A_\theta}{\partial r} \vec{e}_\varphi - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{J}_2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \vec{e}_\varphi + \frac{A_\theta}{r} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \vec{e}_r$$

$$\vec{J}_3 = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \vec{e}_\theta - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \vec{e}_r + A_\varphi \vec{e}_\varphi \wedge (-\vec{u}) \right]$$

$$\vec{e}_\varphi \wedge (-\vec{u}) = \vec{k} = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$$

(base $(\vec{u}, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} + \frac{A_\varphi}{r} \frac{1}{\tan \theta} \right] \vec{e}_r \\ &+ \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{r} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta \\ &+ \left[\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{A_\theta}{r} \right] \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

en comparant avec formules OK.

- Préambule :*
- déterminer la nature de (E) (linéaire ? ordre 1, 2 ? à coefficients constants ou non ? homogène ou non ?);
 - préciser les intervalles sur lesquels (E) est bien définie et peut être mise sous forme résolue;
 - si (E) n'est pas homogène, écrire (H) l'équation homogène associée à (E).

Équation d'ordre 1		Équation d'ordre 2	
<p>L'ensemble S_H des solutions de (H) est un espace vectoriel de dimension 1: $y_H(x) = K y_0(x)$ où $K \in \mathbb{R}$.</p> <p>Cas général : $y'(x) + a(x)y(x) = 0$.</p> <p>L'ensemble S_H des solutions de (H) est : $y_H(x) = K \exp(-A(x))$, où $A(x)$ est une primitive de $a(x)$ et où $K \in \mathbb{R}$.</p> <p>Base de S_H : $y_0(x) = \exp(-A(x))$.</p> <p><i>Attention:</i> avant d'appliquer la formule donnant y_H, mettre l'équation sous forme résolue !</p> <p>Remarque. Cas particulier d'une équation à coefficients constants. $y'(x) + ay(x) = 0$, avec $a \in \mathbb{R}$.</p> <p>Équation caractéristique : $r + a = 0$. Ensemble des solutions : $y_H(x) = K e^{-ax}$, où $K \in \mathbb{R}$.</p>	<p>L'ensemble S_H des solutions de (H) est un espace vectoriel de dimension 2: $y_H(x) = A y_1(x) + B y_2(x)$ où $A, B \in \mathbb{R}$.</p> <p>Équation à coefficients constants : $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$ où $a, b \in \mathbb{R}$.</p> <ul style="list-style-type: none"> résoudre l'équation caractéristique : (EC) $r^2 + ar + b = 0$. <p>$\Delta > 0$: $y_H(x) = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x}$, avec $r_1 \neq r_2$ racines réelles simples de (EC). Base de S_H : $y_1(x) = e^{r_1 x}$, $y_2(x) = e^{r_2 x}$.</p> <p>$\Delta = 0$: $y_H(x) = (Ax + B)e^{r_0 x}$, avec r_0 racine double de (EC). Base de S_H : $y_1(x) = x e^{r_0 x}$, $y_2(x) = e^{r_0 x}$.</p> <p>$\Delta < 0$: $y_H(x) = e^{px} (A \cos(qx) + B \sin(qx))$, avec $p \pm iq$ racines complexes conjuguées de (EC). Base de S_H : $y_1(x) = e^{px} \cos(qx)$, $y_2(x) = e^{px} \sin(qx)$.</p>	<p>Sur chaque intervalle I où (E) est définie, l'ensemble S_E des solutions de (E) est une solution particulière de (E), où $y_H(x)$ représente l'ensemble des solutions de (H) et où $y_p(x)$ est une solution particulière de (E).</p> <p>Cas général : <i>méthode de la variation de la constante.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> chercher y_p sous la forme : $y_p(x) = K(x)y_0(x)$; en injectant dans (E), le terme en facteur de $K(x)$ est toujours nul \implies on obtient $K'(x)$. <i>N.B.</i> On cherche une solution $y_p(x)$. Donc il suffit d'écrire une primitive de $K'(x)$. <p>avec $Q(x)$ polynôme de même degré que $P(x)$.</p>	<p>Équation à coefficients constants avec second membre de la forme $P(x)e^{\alpha x}$ où $P(x)$ est un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}.</p> <ul style="list-style-type: none"> chercher y_p sous la forme suivante : o si α n'est pas racine de (EC) ($\alpha \neq a$): $y_p(x) = Q(x)e^{\alpha x}$ o si α est racine de (EC) ($\alpha = a$): $y_p(x) = xQ(x)e^{\alpha x}$ <p>avec $Q(x)$ polynôme de même degré que $P(x)$.</p>
<p>Cas général :</p> <ul style="list-style-type: none"> trouver $y_1(x)$ une première solution de (H) (intuition, indication de l'énoncé, recherche sous forme de série entière ...); chercher une seconde solution de (H) sous la forme $y_2(x) = z(x)y_1(x)$; en injectant dans (H), le terme en facteur de $z(x)$ est toujours nul $\implies z'(x)$ est solution d'une équation d'ordre 1 à résoudre. <i>N.B.</i> On cherche une solution $y_2(x)$ (libre avec $y_1(x)$). Donc il suffit d'écrire une solution $z'(x)$ de l'équation obtenue, puis d'écrire une primitive de $z'(x)$. 	<p>Cas général : <i>méthode de la variation des deux constantes.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> chercher y_p sous la forme : $y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x)$, avec la contrainte $A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0$; ceci équivaut à résoudre le système : $A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0$, $A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) = h(x)$, où $h(x)$ est le second membre de (E) écrite sous forme résolue. <p><i>N.B.</i> On cherche une solution $y_p(x)$. Donc il suffit d'écrire une primitive de $A'(x)$ et une primitive de $B'(x)$.</p>	<p>Équation à coefficients constants avec second membre de la forme $P(x)e^{\alpha x}$ où $P(x)$ est un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}.</p> <ul style="list-style-type: none"> chercher y_p sous la forme suivante : o si α n'est pas racine de (EC): $y_p(x) = Q(x)e^{\alpha x}$ o si α est racine simple de (EC): $y_p(x) = xQ(x)e^{\alpha x}$ o si α est racine double de (EC): $y_p(x) = x^2Q(x)e^{\alpha x}$ <p>avec $Q(x)$ polynôme de même degré que $P(x)$.</p>	<p>Équation à coefficients constants avec second membre de la forme $P(x)e^{\alpha x}$ où $P(x)$ est un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}.</p> <ul style="list-style-type: none"> chercher y_p sous la forme : $y_p(x) = K(x)y_0(x)$; en injectant dans (E), le terme en facteur de $K(x)$ est toujours nul \implies on obtient $K'(x)$. <i>N.B.</i> On cherche une solution $y_p(x)$. Donc il suffit d'écrire une primitive de $K'(x)$. <p>avec $Q(x)$ polynôme de même degré que $P(x)$.</p>

Synthèse des sujets d'agreg

Année	Sujets abordés
94	Fluide visqueux -> Navier-Stokes repère sphérique, vitesse par séparation de variables, trainée d'une sphère => calculatoire
95	Potentiel des vitesses, calcul formel de lignes de courant, superposition de potentiels=> solutions type spirale logarithmique
99	Fluide visqueux repère cylindrique, pertes de charge régulières en écoulement laminaire et turbulent.
2000	Analyse dimensionnelle, théorème Vaschy-Buckingham, solution, fluide parfait instationnaire, potentiel des vitesses, solution par séparation de variables, force de trainée
2002	Vérin : somme d'un écoulement Poiseuille et de Couette, pertes de charge régulières et singulières, Bernoulli instationnaire (non traité en cours), calcul de puissance
2003	Manipulation d'opérateurs, calcul vitesse par séparation de variables, calcul de force de pression et de viscosité
2004	Vérin, combinaison Poiseuille/Couette, force visqueuse, pertes de charge linéaires et singulières (Bernoulli généralisé)
2006	Couche limite => mise en équations, calcul de la portance, du C_x , du torseur.
2007	Poiseuille Plan fluide newtonien et NON newtonien, pertes de charges dans les 2 cas.
2008	Potentiel des vitesses : Bernoulli instationnaire, conditions aux limites, calcul du mouvement d'une interface
2009	Fluide parfait, théorème du moment dynamique, composition des vitesses, Bernoulli à partir d'eq. d'Euler, rothalpie, pertes de charge
2010	Potentiel des vitesses, transformation conforme.