

**Yann Gueguen**, Dr,  
Maître de Conférence,  
Département Mécanique et Verres  
Institut de Physique de Rennes UMR CNRS-UR1 6251  
✉ : Bât. 10B, Campus de Beaulieu  
35042 Rennes Cedex,  
☎ : 02.23.23.58.06  
☎ : 02.23.23.61.11  
✉ : [yann.gueguen@univ-rennes1.fr](mailto:yann.gueguen@univ-rennes1.fr)

## Mécanique des Fluides

---

Licence 3, SPI, Parcours **I**ngénierie des **S**ystème **C**omplexe  
ENS Rennes



Rennes, le 30 décembre 2018



# Sommaire

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1	Trois outils indispensables à la mécanique des fluides : gradient, rotationnel et divergent . . . . .	6
2	Généralités sur les fluides . . . . .	14
<b>II</b>	<b>Statique des fluides</b>	<b>27</b>
1	Introduction . . . . .	28
2	Problème en une dimension : variation de la pression dans une colonne de fluide .	28
3	Equation fondamentale de l'équilibre des fluides . . . . .	30
4	Poussée d'Archimède . . . . .	32
<b>III</b>	<b>Dynamique des fluides parfaits et point de vue d'Euler</b>	<b>33</b>
1	Introduction . . . . .	34
2	Equation de l'hydrodynamique des fluides parfaits . . . . .	34
3	Point de vue de Lagrange et point de vue d'Euler . . . . .	37
<b>IV</b>	<b>Equation de Bernoulli</b>	<b>41</b>
1	Introduction . . . . .	42
2	Simplification de l'équation de dynamique des fluides . . . . .	42
3	Relation de Bernoulli . . . . .	43
4	Pression motrice . . . . .	44
5	Pression dynamique . . . . .	45
6	Nombre de Froude . . . . .	45
7	Bernoulli sur une ligne de courant . . . . .	45
8	Conservation du débit . . . . .	47
9	Puissance mécanique d'un écoulement . . . . .	47
<b>V</b>	<b>Dynamique des fluides parfaits et écoulement à potentiel de vitesse</b>	<b>49</b>
1	Introduction . . . . .	50
2	Principe de conservation de la masse : équation de continuité . . . . .	50
3	Écoulement à potentiel de vitesse . . . . .	53
4	Théorème de la variation transversale . . . . .	68
5	Généralisation des équations de la dynamique avec d'autres forces volumiques . .	69

<b>VI</b>	<b>Dynamique des fluides réels</b>	<b>75</b>
1	Introduction . . . . .	76
2	Expérience de Reynolds . . . . .	76
3	Ecoulement laminaire simple : Ecoulement de Poiseuille . . . . .	79
4	Théorème des variations transversales . . . . .	84
5	Perte de puissance . . . . .	84
6	Bernoulli généralisé . . . . .	86
7	Perte de charge singulière . . . . .	88
8	Section non-circulaire . . . . .	89
9	Pompes et turbines . . . . .	90
10	Ecoulement turbulent . . . . .	91
<b>VII</b>	<b>Théorème des quantités de mouvement ou théorème d'Euler</b>	<b>95</b>
1	Introduction . . . . .	96
2	Nouvelle expression de l'accélération . . . . .	96
3	Projection . . . . .	97
4	Quatre outils pour simplifier l'accélération . . . . .	97
5	Théorème des quantités de mouvement . . . . .	98
6	Théorème d'Euler sur un tube de courant . . . . .	99
<b>VIII</b>	<b>Concepts de base en aéro/hydrodynamisme</b>	<b>101</b>
1	Profil d'aile . . . . .	102
2	Résultante aérodynamique . . . . .	102
3	Moment aérodynamique . . . . .	103
4	Coefficients aérodynamiques . . . . .	103
5	Evaluation des coefficients aérodynamiques . . . . .	104
6	Similitude d'écoulement . . . . .	106
	<b>Glossaire</b>	<b>106</b>
	<b>Figures</b>	<b>108</b>
	<b>Points Clés</b>	<b>110</b>

# CHAPITRE I

## Introduction

### Sommaire

---

1	Trois outils indispensables à la mécanique des fluides : gradient, rotationnel et divergent . . . . .	<b>6</b>
1.A	Gradient d'une fonction scalaire . . . . .	6
1.B	Gradient d'un champ vectoriel . . . . .	6
1.C	Rotationnel d'un champ de vecteur . . . . .	8
1.D	Divergence d'un champ de vecteur . . . . .	10
2	Généralités sur les fluides . . . . .	<b>14</b>
2.A	Fluide? . . . . .	14
2.B	Liquide et gaz . . . . .	15
2.C	Milieu continu . . . . .	15
2.D	Description d'un fluide . . . . .	16
2.E	Représentation géométrique . . . . .	18
2.F	Types d'écoulement . . . . .	18
2.G	Forces . . . . .	18
2.H	Contraintes dans un milieu fluide . . . . .	20
2.I	Viscosité d'un fluide . . . . .	22
2.J	Débit . . . . .	23
2.K	Théorème de Green-Ostrogradski (G-O) . . . . .	25

---

## 1 Trois outils indispensables à la mécanique des fluides : gradient, rotationnel et divergent

Avant d'entamer le cours de mécanique des fluides à proprement parler, nous allons décrire ici quelques outils mathématiques utiles à la mécanique de milieux continus. L'utilisation de ces outils fera l'objet du premier TD de mécanique des fluides. A l'issue de la licence 3, l'étudiant est sensé être capable d'utiliser parfaitement tous ces outils.

### 1.A Gradient d'une fonction scalaire

Soit  $p$  une fonction scalaire (tenseur d'ordre 0 → voir Solide Déformable), par exemple la pression, dans un espace de dimension 3, de base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$$p(x_1, x_2, x_3) \quad (\text{I.1})$$

Le gradient de  $p$  est un champ de vecteur ou "champ vectoriel" (un tenseur d'ordre 1). Il faut faire la différence entre un "vecteur", par exemple une force, qui indique une grandeur vectorielle en un point, d'un champ vectoriel qui associe un vecteur à chaque point d'un espace :

$$\vec{\text{grad}}(p(x_1, x_2, x_3)) = \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \vec{e}_3 \quad (\text{I.2})$$

Dans un espace de dimension 3, la pression (le "champ scalaire de pression") a trois variables, et peut donc varier selon trois directions. Cette variation ne peut être décrite que par un "objet" à trois composantes : un tenseur d'ordre 1 (un champ vectorielle).

Exemple simple :  $p(x_1, x_2, x_3) = p_0 - \rho g x_1 = p(x_1)$ . Si  $p_0$  est positif, la pression est plus élevée pour les  $x_1$  faibles. On a :

$$\vec{\text{grad}}(p(x_1, x_2, x_3)) = -\rho g \vec{e}_1 \quad (\text{I.3})$$

$\vec{\text{grad}}(p)$  pointe du haut vers le bas : il pointe vers les hautes pressions (c'est l'inverse du vent). Le champ vectoriel dessiné en tout point "montrerait" où sont les hautes pressions.

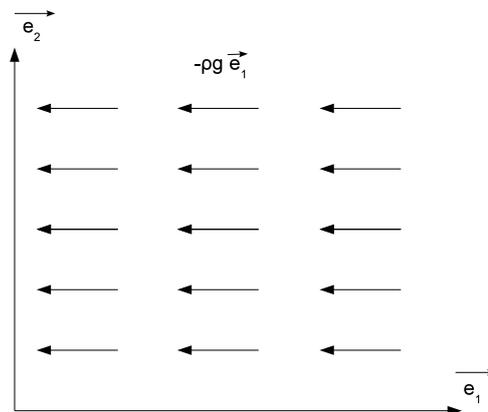


FIGURE I.1 — Gradient d'un champ scalaire :  $p(x_1) = p_0 - \rho g x_1$

### 1.B Gradient d'un champ vectoriel

Soit un champ vectoriel  $\vec{v}(x_1, x_2, x_3)$  (toujours dans un espace de dimension 3), donc un tenseur d'ordre 1 :

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2, x_3) \\ v_2(x_1, x_2, x_3) \\ v_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}} \quad (\text{I.4})$$

Ce champ vectoriel a trois composantes  $(v_1, v_2, v_3)$  dépendant chacune de trois variables  $(x_1, x_2, x_3)$ . Un "objet" décrivant sa variation dans l'espace doit donc avoir  $3 \times 3 = 9$  composantes décrivant la variation de chaque composante suivant chaque variable. Cet objet est donc un tenseur d'ordre 2 (une "matrice"  $3 \times 3$ ) :

$$\overset{=}{\text{grad}}(\vec{v}(x_1, x_2, x_3)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} \begin{matrix} \leftarrow v_1(x_1, x_2, x_3) \\ \leftarrow v_2(x_1, x_2, x_3) \\ \leftarrow v_3(x_1, x_2, x_3) \end{matrix} \quad (\text{I.5})$$

Exemple simple : soit le champ de vitesse suivant :

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} a x_1 \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}} \quad (\text{I.6})$$

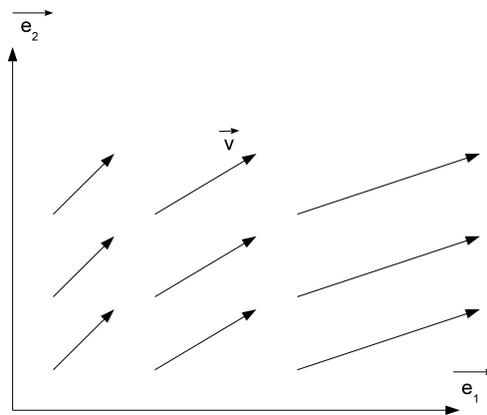


FIGURE I.2 — Champ de vitesse :  $\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = a x_1 \vec{e}_1 + b \vec{e}_2 + c \vec{e}_3$

Le gradient de ce champ de vitesse est :

$$\overset{=}{\text{grad}}(\vec{v}(x_1, x_2, x_3)) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3} \quad (\text{I.7})$$



### Bilan sur les gradients

L'opérateur gradient est un opérateur indiquant la variation d'un champ scalaire, vectoriel... Le gradient augmente l'ordre du tenseur : la gradient d'un tenseur d'ordre 0 est un tenseur d'ordre 1, le gradient d'un tenseur d'ordre 1 est un tenseur d'ordre 2... le gradient d'un tenseur d'ordre N est un tenseur d'ordre N+1.

## 1.C Rotationnel d'un champ de vecteur

Très schématiquement, le rotationnel d'un champ de vecteur indique la "tendance" à tourner de ce champ. Schématiquement, car la tendance à tourner qu'il souligne est un peu dur à définir mathématiquement et à se représenter : un champ peut "visuellement" sembler tourner alors que son rotationnel est nul.

De façon plus "mathématique", le rotationnel d'un champ de vecteur est nul, entre autres, si aucune composante  $v_i$  de ce champ ne dépend de  $x_j$  ( $j \neq i$ ), l'inverse n'étant pas nécessairement vrai.

On note  $\vec{\nabla}$  ("nabla") l'opérateur tel que (ce n'est finalement qu'une autre notation de *grad*) :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}} \quad (\text{I.8})$$

Traditionnellement, on utilise plutôt "*grad*" quand on parle du gradient d'une fonction et " $\vec{\nabla}$ " quand on l'utilise "seul" (pour décrire le rotationnel par exemple)...

Soit  $\vec{v}(x_1, x_2, x_3)$  un champ vectoriel quelconque, son rotationnel est défini par :

$$\text{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \quad (\text{I.9})$$

Soit :

$$\text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2, x_3) \\ v_2(x_1, x_2, x_3) \\ v_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}} \quad (\text{I.10})$$

Le rotationnel d'un champ de vecteur est donc un vecteur. En mécanique des fluides, on appelle classiquement le rotationnel du champ de vitesse la "vorticité", même si cela ce terme est plus souvent utilisés par les spécialistes des écoulements tourbillonnaires.

### 1.C.1 Attention...

On a noté que (Eq.I.8) :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I.11})$$

Ce qui n'est pas tout à fait exact<sup>1</sup>...Ceci ne veut en effet en aucun cas dire que :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{e}_3 \quad (\text{I.12})$$

Tout simplement parce que  $\partial \vec{e}_i / \partial x_i = \vec{0}$ ... Ca veut donc dire que :

1. c'est juste pour arriver à l'équation I.10 facilement, qui du coup n'a de sens qu'en coordonnées cartésiennes.

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (\text{I.13})$$

C'est subtile, mais c'est important.  $\vec{\nabla}$  est un opérateur différentiel : il différencie avant toute chose. Ci-dessous, nous donnons le détail du calcul du rotationnel, en coordonnées cartésiennes, qui permet de comprendre la méthodologie pour faire le calcul en coordonnées cylindriques ou sphériques :

$$\vec{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{e}_1 \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_3} \quad (\text{I.14})$$

Or :

$$\frac{\partial(v_1 \vec{e}_1)}{\partial x_1} = v_1 \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \vec{e}_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \vec{e}_1 \quad (\text{I.15})$$

Donc :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \vec{e}_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \vec{e}_3 \quad (\text{I.16})$$

Et :

$$\vec{e}_1 \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 \quad (\text{I.17})$$

$$\vec{e}_1 \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} = \vec{0} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \vec{e}_3 - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \vec{e}_2 \quad (\text{I.18})$$

On applique la même méthode pour  $\vec{e}_2 \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_2}$  et  $\vec{e}_3 \wedge \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_3}$  et on doit finir par retrouver :

$$\vec{rot}(\vec{v}) = \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \vec{e}_1 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \vec{e}_2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3 \quad (\text{I.19})$$

### 1.C.2 Exemple 1

Soit le champ de vitesse suivant :  $\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = a \vec{e}_1$ . Les vecteurs vitesses pointent tous dans la même direction, il n'y a pas de rotation.

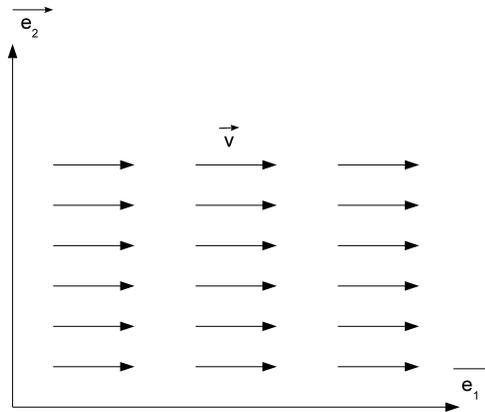


FIGURE I.3 — Champ de vitesse  $\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = a \vec{e}_1$

On a alors :  $\vec{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$ . Un champ vectoriel dont le rotationnel est nul en tout point est dit irrotationnel.

### 1.C.3 Exemple 2

Soit le champ de vitesse suivant, en coordonnées cylindriques :  $\vec{v}(r, \theta, z) = v_\theta(r) \vec{e}_\theta = \Omega r \vec{e}_\theta$ . Ce champ de vitesse est un champ qui tourne autour du point  $r = 0$ .  $\Omega$  est la vitesse angulaire (radian par seconde).

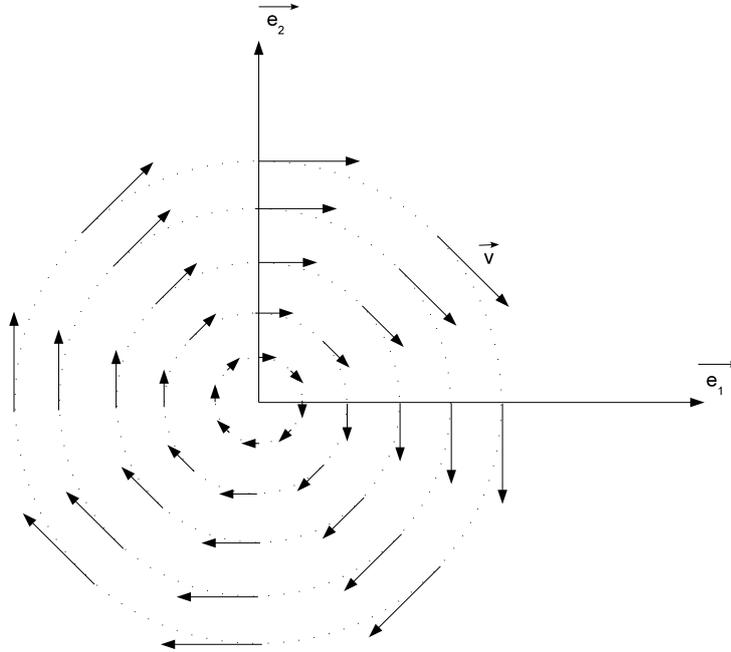


FIGURE I.4 — Champ de vitesse  $\vec{v}(r, \theta, z) = \Omega r \vec{e}_\theta$

On a (formulaire) :  $r\vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \vec{e}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Omega r^2) \vec{e}_z = \frac{1}{r} 2\Omega r \vec{e}_z = 2\Omega \vec{e}_z$ .

L'écoulement tourne bien autour d'un point : il est rotationnel, car son rotationnel est non-nul. On remarquera par ailleurs que :

$$\Omega \vec{e}_z = \vec{\Omega} = \frac{1}{2} r\vec{\text{rot}}(\vec{v}) \quad (\text{I.20})$$

Le champ de vecteur vitesse de rotation angulaire, qu'on appelle "vecteur tourbillon", correspond au demi-rotationnel du champ de vitesse (à la moitié de la vorticité). La norme d'un rotationnel d'un champ de vitesse correspond, à un facteur 2 près, à la vitesse angulaire locale.

### 1.C.4 Exemple 3

Soit le champ de vitesse suivant :  $\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = a x_1 \vec{e}_1 + b \vec{e}_2$ . Ce champ de vitesse peut donner l'impression de tourner, mais il est bien irrotationnel :  $r\vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$ .

## 1.D Divergence d'un champ de vecteur

L'opérateur divergent en un opérateur qui met en évidence le fait qu'un champ de vecteur converge (le divergent est négatif), c'est-à-dire que les vecteurs du champ pointent vers un même point, ou qu'il diverge (le divergent est positif).

Le divergent d'un champ de vecteur est un champ scalaire. Soit :

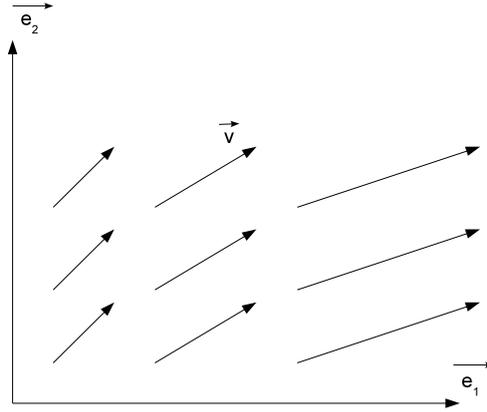


FIGURE I.5 — Champ de vitesse :  $\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = a x_1 \vec{e}_1 + b \vec{e}_2$ . Il semble tourner, mais il suffit de la tracer pour  $x_1 < 0$  pour voir que non.

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2, x_3) \\ v_2(x_1, x_2, x_3) \\ v_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}} \quad (\text{I.21})$$

Le divergent de ce champ est défini par :

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad (\text{I.22})$$

### 1.D.1 Que cela représente-t-il ?

Isolons un cube  $dV = dx dy dz$  au sein d'un fluide. Soit  $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$  le champ vectoriel défini et dérivable dans  $dV$ . Le flux d'un champ vectoriel  $\vec{v}$  (mathématiquement, cela peut être le flux de n'importe quel champ vectoriel, pour ce qui nous intéresse ici, c'est par exemple le flux de fluide - le débit-, auquel cas  $\vec{v}$  est le champ de vitesse) à travers un élément de surface  $dS$  est défini par :

$$\vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (\text{I.23})$$

$\vec{n}$  est la normale à la surface  $dS$ . On choisit  $\vec{n}$  soit pointant vers l'extérieur du volume (dans ce cas quand  $\vec{v}$  "entre" son flux est négatif, car  $\vec{v}$  est globalement opposé à  $\vec{n}$ ), soit vers l'intérieur (dans ce cas quand  $\vec{v}$  "entre" son flux est positif, car  $\vec{v}$  est globalement dans le même sens  $\vec{n}$ ), au choix. La coutume est plutôt de le faire pointer vers l'extérieur, et c'est ce que nous allons faire ici. Si  $\vec{v}$  est le champ de vitesse d'un fluide ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ), on remarque que le flux n'est rien d'autre qu'un débit volumique à travers  $dS$  ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ ).

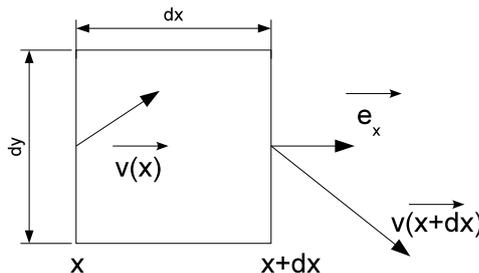


FIGURE I.6 — Flux de vitesse dans un cube à travers les faces orientées par  $\pm \vec{e}_x$ .

Faisons le bilan des entrées/sorties du champ  $\vec{v}$  dans  $dV$ . Le flux entrant ou sortant par la face située en  $x$ , de normal  $-\vec{e}_x$ , de surface  $dS = dydz$  vaut :

$$\vec{v}(x, y, z) \cdot (-\vec{e}_x) dydz = -v_x(x, y, z) dydz \quad (\text{I.24})$$

Le flux entrant ou sortant par la face située en  $x + dx$  vaut :

$$\vec{v}(x + dx, y, z) \cdot \vec{e}_x dydz = v_x(x + dx, y, z) dydz \quad (\text{I.25})$$

Si je fais le bilan sur ces deux faces, le flux total vaut :

$$[v_x(x + dx, y, z) - v_x(x, y, z)] dydz \quad (\text{I.26})$$

Je fais le même bilan sur les faces orientées par  $\vec{e}_y$  et  $-\vec{e}_y$  :

$$[v_y(x, y + dy, z) - v_y(x, y, z)] dx dz \quad (\text{I.27})$$

Puis  $\vec{e}_z$  et  $-\vec{e}_z$

$$[v_z(x, y, z + dz) - v_z(x, y, z)] dx dy \quad (\text{I.28})$$

Puis, au final le bilan des flux sur toutes les faces :

$$[v_x(x + dx) - v_x(x)] dydz + [v_y(y + dy) - v_y(y)] dx dz + [v_z(z + dz) - v_z(z)] dx dy \quad (\text{I.29})$$

Je rapporte ce bilan à l'élément de volume (je divise par  $dV = dx dy dz$ ) :

$$\frac{v_x(x + dx) - v_x(x)}{dx} + \frac{v_y(y + dy) - v_y(y)}{dy} + \frac{v_z(z + dz) - v_z(z)}{dz} \quad (\text{I.30})$$

Par définition de la dérivée :

$$\frac{\partial v_x(x)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(y)}{\partial y} + \frac{\partial v_z(z)}{\partial z} = \text{div}(\vec{v}) \quad (\text{I.31})$$

### Divergent

Le divergent d'un champ vectoriel en un point M est un bilan des entrées/sorties de ce champ dans le volume  $dV$  entourant M. Si les flux entrant et sortant s'équilibrent, le divergent est nul.

#### 1.D.2 Exemple 1

Soit le champ de vitesse suivant :  $\vec{v} = a \vec{e}_x + b \vec{e}_y$ . Visuellement, ce champ ne diverge pas, et on a bien :

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x(x)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(y)}{\partial y} + \frac{\partial v_z(z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{I.32})$$

#### 1.D.3 Exemple 2

Soit le champ de vitesse suivant, en coordonnées sphériques :  $\vec{v}(r, \theta, \phi) = a \vec{e}_r$ . Visuellement, ce champ diverge depuis  $r = 0$ , et on a bien (formulaire) :

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{2a}{r} \quad (\text{I.33})$$

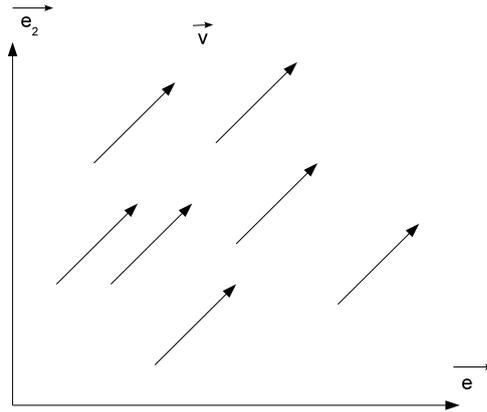


FIGURE I.7 — Champ de vitesse :  $\vec{v} = a \vec{e}_x + b \vec{e}_y$

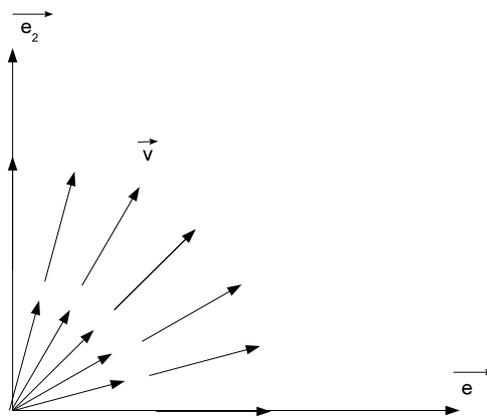


FIGURE I.8 — Champ de vitesse :  $\vec{v}(r, \theta, z) = a \vec{e}_r$

1.D.4 Exemple 3

Soit le champ de vitesse suivant, en coordonnées cylindriques :  $\vec{v}(r, \theta, z) = a \vec{e}_\theta$ . Visuellement, ce champ ne diverge pas, mais tourne autour de  $r = 0$ . On a (formulaire)

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \tag{I.34}$$

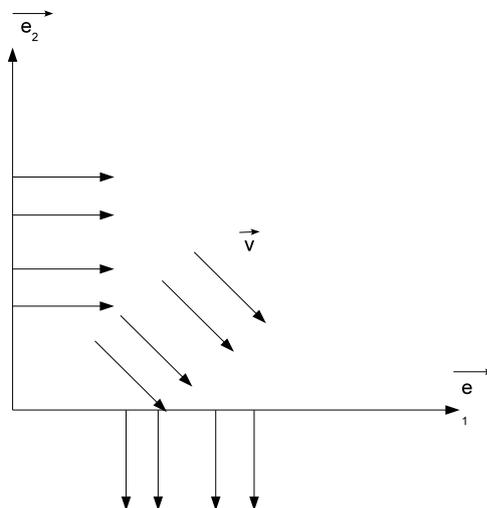


FIGURE I.9 — Champ de vitesse :  $\vec{v}(r, \theta, z) = a \vec{e}_\theta$

## 2 Généralités sur les fluides

### 2.A Fluide ?

#### Définition d'un fluide

On appelle fluide un système déformable sans forme propre.

Tout corps qui prend la forme de son contenant n'a pas de forme propre. Théoriquement, n'importe quel corps s'écoule, qu'il nous apparaisse solide ou pas, qu'il le soit ou pas au sens physique du terme (c-a-d : s'il se trouve sous sa température de fusion). L'écoulement d'un corps est un processus thermiquement activé, ce qui signifie que pour toute température supérieure à 0 K, il s'écoule. Cependant, le temps nécessaire pour observer cet écoulement (pour que le corps commence à prendre la forme de son contenant) peut être considérable.

En rhéologie (science de l'écoulement), on définit un temps  $\tau$  qui est le temps caractéristique de l'écoulement ( $\sim$  temps pour prendre la forme du contenant<sup>2</sup>). On appelle "nombre de Deborah"<sup>3</sup>, le ratio entre ce temps  $\tau$  et la durée d'observation  $t_O$  :

$$N_D = \frac{\tau}{t_O} \quad (\text{I.35})$$

Si  $N_D \ll 1$ , le corps est considéré comme fluide. Si  $N_D \gg 1$ , le corps est considéré comme un solide. Entre les deux, c'est un corps visco-élastique. Pour le verre à vitre, par exemple, on estime  $\tau$  à  $10^{32}$  ans (dix mille milliards de milliards de fois l'âge de l'univers) à 20°C. Le verre peut donc, même à l'échelle de l'humanité entière, être considéré comme un solide à 20°C.

#### Fluide et liquide

Il ne faut donc pas confondre "fluide" qui caractérise un corps qui a une aptitude à prendre la forme d'un contenant à l'échelle d'un temps d'observation, et "liquide" qui caractérise l'état de la matière entre la température de fusion et la température de vaporisation. Cependant, les liquides et les gaz sont bien, à l'échelle des temps humains, des fluides (la réciproque n'est donc pas vraie).

#### 2.A.1 Autres définitions

Une autre façon de différencier un fluide d'un solide est l'élasticité en cisaillement : on considère qu'un fluide ne présente aucune élasticité en cisaillement, contrairement aux solides.

2. Pour être exact, c'est le temps caractéristique pour que, lorsqu'on applique une déformation au milieu, la force pour maintenir cette déformation devienne nulle.

3. Deborah est une prophétesse, dans la Bible hébraïque (livre des Juges), elle demande à un général hébreu (Barac) de lever une armée pour vaincre un peuple ennemi, les cananéens et prédit la victoire des hébreux. Elle chanta, après la victoire (des hébreux, sinon, elle n'aurait pas eu de raison de chanter) "Et les montagnes coulèrent devant le Seigneur" (oui, ça paraît complètement hors sujet de chanter cela...). Le physicien Markus Reiner, un des pères fondateurs de la rhéologie, reprit cette phrase pour illustrer que tout s'écoule, même les montagnes, si on prend le temps de les regarder suffisamment longtemps.

### Cisaillement

La conséquence de cette absence d'élasticité en cisaillement d'un fluide est qu'un fluide ne peut pas subir de contrainte (force) tangentielle à ces surfaces s'il est statique, contrairement à un solide.

Si on cisaille infiniment lentement un fluide, cela ne nécessite aucune force.

## 2.B Liquide et gaz

Les liquides et les gaz peuvent être traités par la mécanique des fluides. Du point de vue de la mécanique des fluides, une distinction principale peut être faite : la compressibilité.

### Compressibilité

On appelle coefficient de compressibilité isotherme la variation de volume relative sous une pression donnée à température constante :

$$X_T = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_T \quad (\text{I.36})$$

Les liquides sont généralement caractérisés par un très faible  $X_T$ , et l'approximation de fluide incompressible est généralement satisfaisante.

Les gaz sont généralement beaucoup plus compressibles et cette approximation est donc loin de la vérité :

Eau, à 20°C :  $X_T = 4.5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$  ; 22.2 MPa pour faire varier le volume de 1% (220 fois la pression atmosphérique)

Air, à 20°C :  $X_T \sim 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$  ; 1000 Pa pour faire varier le volume de 1% (1/100<sup>e</sup> de la pression atmosphérique)

## 2.C Milieu continu

### Mécanique des milieux continus

La mécanique des fluides fait partie de la Mécanique des Milieux Continus (MMC). Elle traite un fluide, quel qu'il soit, comme un milieu continu (voir le cours de Solide Déformable). Tous les champs scalaires ou vectoriels qui caractérisent un fluide sont supposés être des fonctions continues et continuellement dérivables.

Or, on sait qu'un fluide n'est pas un milieu continu. L'eau est constituée de molécule d'H<sub>2</sub>O, et, entre elles, de vide. A l'échelle de la molécule d'eau, l'eau n'est pas un milieu continu.

La mécanique des fluides n'est pertinente que pour décrire un fluide à une échelle où l'approximation des milieux continus est correcte. Si on ne traite que quelques molécules de liquide/gaz, la mécanique des fluides est incapable de décrire le comportement du système considéré : on doit faire appel à la physique statistique.

## 2.C.1 Particule

 **Particule et VER**

La mécanique des fluides étant une part de la mécanique des milieux continus on peut lui attribuer les mêmes concepts. La notion de VER (Volume Élémentaire Représentatif) s'applique donc aussi : le VER est le plus petit volume de fluide (le plus petit ensemble de molécule de fluide) que l'on peut considéré comme étant représentatif, en terme de propriété du fluide (viscosité, compressibilité, masse volumique...), de l'ensemble du fluide traité. En mécanique des fluides, on appelle plutôt ce VER une "particule" (ou "particule fluide").

Attention donc, une particule, au sens de la mécanique des fluides, n'est pas une molécule, mais un ensemble de molécules suffisamment grand pour formé un VER (typiquement le  $\mu\text{m}^3$ , pour l'eau, soit plus d'une dizaine de milliards de molécules d' $\text{H}_2\text{O}$ ).

**2.D Description d'un fluide**

## 2.D.1 Description lagrangienne

La description lagrangienne<sup>4</sup> est la plus intuitive, qui reprend l'idée de trajectoire : on suit une particule qui à l'instant  $t = 0$  se trouve en  $M_0$ , tel que :

$$M_0 = \{x_0, y_0, z_0\} \quad (\text{I.37})$$

À l'instant  $t > 0$ , elle se trouve en  $M$  :

$$M = \{x(x_0, y_0, z_0, t), y(x_0, y_0, z_0, t), z(x_0, y_0, z_0, t)\} \quad (\text{I.38})$$

De façon classique, sa vitesse se définit par :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial y(\dots)}{\partial t} \\ \frac{\partial z(\dots)}{\partial t} \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}} \quad (\text{I.39})$$

Et l'accélération par :

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x(\dots)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 y(\dots)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 z(\dots)}{\partial t^2} \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}} \quad (\text{I.40})$$

On peut faire l'analogie entre la description lagrangienne et l'observation d'une autoroute, voiture par voiture. Je fixe un GPS sur chaque voiture, ce qui me permet d'en connaître les

4. Joseph Louis, comte de Lagrange est né à Turin le 25 janvier 1736 et mort à Paris le 10 avril 1813. C'est un mathématicien, mécanicien et astronome italien (de son vrai nom : Giuseppe Lodovico de Lagrangia).

positions, donc les vitesses de chaque voitures puis leurs accélérations.

Le système que l'on traite est un ensemble de  $N$  particules, toujours le même à tout instant. Le problème est que le contour du volume formé par ces  $N$  particules évolue au cours du temps du fait du champ de vitesse et reste donc difficile à définir. Si le contour du système étudié ne cesse de varier cela devient très compliqué de lui appliquer le PFS ou le PFD, parce qu'il faut redéfinir sans cesse les forces appliquées sur ce contour.

Pour poursuivre l'analogie, si je dessine à  $t = 0$  le contour entourant  $N$  voitures (et uniquement ces  $N$  voitures), à un instant  $t > 0$ , ce dernier contour n'a pas de raison d'avoir la même géométrie. Il faut établir la variation de surface du contour d'après le déplacement de chaque voiture, pour connaître les contraintes qui s'appliquent à ce contour (feu, carrefour, ralentissement...). Le volume renfermant ces  $N$  voitures peut même se fractionner, si certaines quittent la route.

### 2.D.2 Description eulérienne



#### Point de vue d'Euler

Dans la description eulérienne<sup>a</sup>, on décrit le fluide en terme de champ de vitesse. On considère un point  $M$  quelconque :  $M = \{x, y, z, t\}$  et à l'instant  $t$  on analyse la vitesse du fluide en ce point :

$$\vec{v}(x, y, z, t) \quad (\text{I.41})$$

Ce champ décrit la vitesse de ce qui, à l'instant  $t$ , passe en ce point  $M$ .

Pour reprendre l'analogie de l'autoroute, on place cette fois ci des radars en différents points de l'autoroute, ce qui permet à l'instant  $t$  de collecter la vitesse des véhicules qui passent en ces différents points. L'accélération ne se déduit donc pas de :

$$\vec{a} \neq \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad (\text{I.42})$$

<sup>a</sup>. Leonhard Paul Euler est né le 15 avril 1707 à Bâle (Suisse) et mort à 76 ans le 18 septembre 1783 à Saint-Petersbourg. C'est un mathématicien et physicien suisse, qui a vécu en Prusse et en Russie. Il était membre de l'Académie royale des sciences de Prusse.

Le système que l'on traite n'est pas un ensemble de  $N$  particules mais un volume  $V$  défini dans l'espace, indépendamment du temps. A l'instant  $t = 0$  ce volume renferme  $N$  particules, et à l'instant  $t > 0$  il en renferme  $N^*$ .  $N^*$  n'a aucune raison d'être systématiquement égal à  $N$ . Le problème est que le champ de vitesse à l'instant  $t = 0$  est la vitesse de particules, et le champ de vitesse à  $t > 0$  la vitesse d'autres particules. La variation temporelle de la vitesse n'est donc pas l'accélération des particules. Nous verrons dans ce cours comment s'exprime l'accélération eulérienne.

La description eulérienne a ceci de pratique : les contours du système étudié n'évoluent pas, puisque c'est cela qui définit le système.

La description eulérienne, en apparence moins intuitive, est plus "logique" en mécanique des fluides. En description eulérienne, je m'assoie près d'un fleuve, et je regarde ce qui se passe devant moi. En description lagrangienne, je jette un bout de bois sur l'eau et je lui cours après

pour voir ce qui va lui arriver. La description eulérienne se moque du devenir des particules et rend le problème plus facile à traiter.

## 2.E Représentation géométrique

### 2.E.1 Ligne de courant

De point de vue de Lagrange, une ligne de courant est la ligne que suivra une particule (sa trajectoire).

De point de vue d'Euler, une ligne de courant est la courbe tangente au vecteur vitesse. Soit  $d\vec{l}$  un élément de ligne de courant autour d'un point  $M$ , soit  $\vec{v}$  le vecteur vitesse au point  $M$ . On vérifie alors :

$$d\vec{l} \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad (\text{I.43})$$

Si  $\vec{v} = v_x(x, y, z, t) \vec{e}_x + v_y(x, y, z, t) \vec{e}_y + v_z(x, y, z, t) \vec{e}_z$  et  $d\vec{l} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$ , cela revient aussi à écrire que :

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)} \quad (\text{I.44})$$

### 2.E.2 Tube de courant

Une tube de courant est un ensemble de lignes de courant.

### 2.E.3 Filet de courant

Un filet de courant est un tube de courant où  $\vec{v}$  est identique en tout point (remarque : ça peut être  $\vec{v} = v_\theta \vec{e}_\theta$  -i.e : il n'est pas nécessairement rectiligne-).

## 2.F Types d'écoulement



### Écoulement laminaire

On appelle écoulement laminaire un écoulement où les lignes de courant sont, au moins localement parallèles. En d'autres termes, si deux particules sont voisines à l'instant  $t$ , elles le restent à l'instant  $t + dt$ .



### Écoulement turbulent

On appelle écoulement turbulent un écoulement où les lignes de courant sont aléatoires, irrégulières. Deux particules initialement voisines ne le resteront pas. Un écoulement turbulent implique la formation de tourbillons instables, de remous, de cavitations...

## 2.G Forces

Selon la mécanique des milieux continus, un corps, qu'il soit fluide ou non, peut subir deux types de forces.

### 2.G.1 Des forces de volume

Ces forces s'exercent dans l'ensemble de volume, et ne requiert pas de contact entre ce qui génère la force et le corps. Les forces volumiques incluent par exemple : le poids, la force centrifuge, les forces électromagnétiques (par exemple pour un plasma -le gaz, pas l'écran...-).

On notera  $\vec{f}_V$  la force volumique élémentaire, en  $\text{N.m}^{-3}$ , qui est la force de volume rapportée au volume élémentaire  $dV$ .

Considérons un volume élémentaire  $dV$ . La force volumique qui s'exerce sur ce volume est  $d\vec{F}_V$  tel que :

$$d\vec{F}_V = \vec{f}_V dV \quad (\text{I.45})$$

On peut prendre l'exemple du poids (c'est la principale force volumique qu'on traitera dans ce cours). Si on isole un volume  $V$ , de masse  $m$ , le poids qui s'exerce sur ce volume vaut :

$$\vec{P} = m \vec{g} \quad (\text{I.46})$$

Si on isole un volume élémentaire  $dV$ , de masse  $dm$ , le poids élémentaire (i.e. : le poids s'exerçant sur ce volume élémentaire) vaut :

$$d\vec{F}_V = d\vec{P} = dm \vec{g} \quad (\text{I.47})$$

Soit  $\rho$  la masse volumique du volume  $dV$ , on a donc :

$$dm = \rho dV \quad (\text{I.48})$$

D'où :

$$d\vec{P} = \rho \vec{g} dV \quad (\text{I.49})$$

#### Force volumique élémentaire du poids

Ce qu'on appelle la force volumique élémentaire pour le poids est donc le poids rapporté au volume élémentaire :

$$\vec{f}_V = \rho \vec{g} \quad (\text{I.50})$$

Si on considère un corps de volume  $V$  où la masse volumique est fonction de la position  $\{x, y, z\}$  (un corps non-homogène, donc), on a, en conservant l'hypothèse que l'accélération de la pesanteur est indépendante de la position :

$$\vec{P} = \int_V d\vec{P} = \int_V \rho(x, y, z) \vec{g} dV = \vec{g} \int_V \rho(x, y, z) dV \quad (\text{I.51})$$

### 2.G.2 Des forces de surface

Les forces de contact ou de surface sont les forces exercées sur un corps par le contact avec d'autres corps, fluides ou non.

On notera  $\vec{f}_S$  la force surfacique élémentaire, en  $\text{N.m}^{-2}$ , qui est la force de surface rapportée à une surface élémentaire  $dS$ .

Considérons une surface élémentaire  $dS$ . La force surfacique qui s'exerce sur cette surface est  $d\vec{F}_S$  tel que :

$$d\vec{F}_S = \vec{f}_S dS \quad (\text{I.52})$$

On peut prendre l'exemple de la pression, par exemple que l'air ambiant exerce sur un corps. Soit  $M$  un point à la surface du corps,  $dS$  entourant  $M$ ,  $\vec{n}$  le vecteur normal à  $dS$ , pointant vers l'extérieur du corps, et  $p$  la pression de l'air autour de ce point  $M$ . On a :

$$-p \vec{n} = \vec{f}_S \quad (\text{I.53})$$

D'où :

$$d\vec{F}_S = -p \vec{n} dS \quad (\text{I.54})$$

### Force résultante de la pression

La force s'exerçant sur l'ensemble de la surface  $S$  d'un corps, du fait de la pression, et uniquement de la pression, vaut :

$$\vec{F}_S = - \int_S p(x, y, z) \vec{n}(x, y, z) dS \quad (\text{I.55})$$

Sur une surface quelconque,  $\vec{n}$  varie en fonction de  $x, y$  et  $z$ .

## 2.H Contraintes dans un milieu fluide

La notion de contrainte a déjà été vue en RdM, elle sera également plus détaillée dans le cours de solide déformable. Nous rappelons seulement ici les notions de contraintes normales et contraintes tangentielles.

Considérons un volume  $V$  de fluide. On réalise dans ce volume une coupure. Soit  $S$  la surface de coupure,  $dS$  un élément de surface entourant un point  $M$  sur cette surface.  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à  $dS$ ,  $\vec{t}$  un vecteur unitaire tangent à  $dS$ .

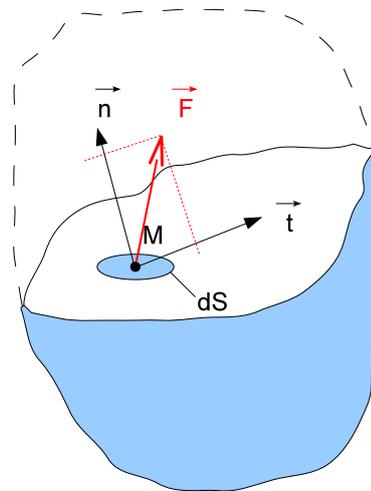


FIGURE I.10 — Coupure fictive

En  $M$  s'exerce une force de cohésion appliquée sur  $dS$  :  $d\vec{F}$ .  $d\vec{F}$  peut avoir une composante suivant  $\vec{n}$ , c'est la composante normale à  $dS$ , et une composante suivant  $\vec{t}$ , c'est la composante tangentielle :

$$d\vec{F} = dF_n \vec{n} + dF_t \vec{t} \quad (\text{I.56})$$

Bien entendu, pour former un repère, il doit y avoir deux vecteurs orthogonaux tangents à la surface  $\vec{t}$  et  $\vec{t}'$  formant la base orthonormée avec  $\vec{n}$  :

$$d\vec{F} = dF_n \vec{n} + dF_t \vec{t} + dF_t' \vec{t}' \quad (\text{I.57})$$

On simplifie ici avec  $dF_t' = 0$ .

On appelle vecteur contrainte au point  $M$ , pour un élément de surface orienté par  $\vec{n}$ , le vecteur défini par :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{dS} \quad (\text{I.58})$$

La norme de ce vecteur s'exprime en Pa, d'où le nom de "vecteur contrainte". Ce vecteur a également deux composantes, l'une normale, l'autre tangentielle :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n} = \frac{dF_n}{dS} = \sigma_{nn} \quad (\text{I.59})$$

C'est la contrainte normale, qui est donc due aux forces normales.

$$\vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{t} = \frac{dF_t}{dS} = \sigma_{nt} = \tau_{nt} \quad (\text{I.60})$$

C'est la contrainte tangentielle, qui est donc due aux forces tangentielles. Dans la notation  $\sigma_{nt}$ , le premier indice marque la normale à la surface  $dS$  que l'on considère, le second marque la direction selon laquelle on projette le vecteur contrainte.

Dans la réalité, il y a une autre composante de contrainte tangentielle :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{t}' = \frac{dF_t'}{dS} = \sigma_{nt'} = \tau_{nt'} \quad (\text{I.61})$$

### Contrainte dans un fluide immobile

Dans le cas d'un fluide au repos (statique des fluides), tout élément de surface ne subit que la pression autour du point  $M$  qu'il entoure. Quelque soit l'élément de surface considéré, quelque soit le repère, on a au point  $M$  :

$$d\vec{F} = -p \vec{n} dS \quad (\text{I.62})$$

Les forces de cohésions sont des forces colinéaires à  $\vec{n}$  (normales à  $dS$ ). On en déduit :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = -p \vec{n} \quad (\text{I.63})$$

D'où :

$$\sigma_{nn} = -p \text{ et } \sigma_{nt} = 0 \quad (\text{I.64})$$

Un fluide immobile ne subit que des contraintes normales.

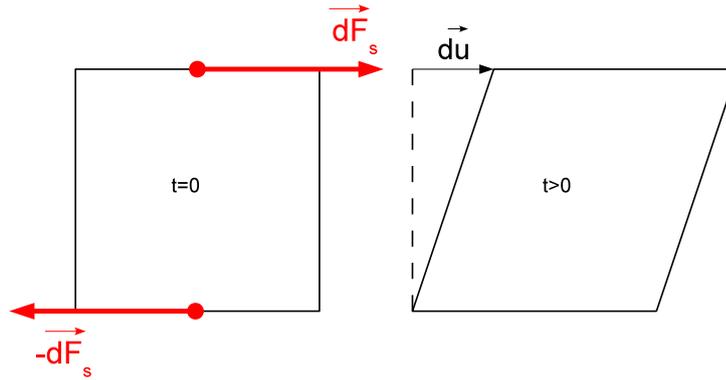


FIGURE I.11 — Viscosité

## 2.I Viscosité d'un fluide

Considérons un volume  $dV$  de fluide, d'épaisseur  $dx$ , de surfaces supérieure (en  $x + dx$ ) et inférieure (en  $x$ )  $dS = dydz$ .

On applique une force purement tangentielle  $d\vec{F}$  sur ces surfaces (Figure I.11), selon  $\vec{e}_y$ . Il en résulte une contrainte tangentielle :

$$\sigma_{xy} = \tau = \frac{\|d\vec{F}\|}{dS} = \frac{d\vec{F} \cdot \vec{e}_y}{dS} \quad (\text{I.65})$$

Du fait de la force tangentielle, on observe un gradient de vitesse entre la face supérieure et la face inférieure. On a  $u(x)$  le déplacement de la face inférieure, et  $u(x + dx)$  le déplacement de la face supérieure. On note  $\gamma$  le glissement qui vaut :

$$\gamma = \frac{u(x + dx) - u(x)}{dx} = \frac{du}{dx} \quad (\text{I.66})$$

La vitesse s'exprimant ainsi :

$$v = \frac{du}{dt} \quad (\text{I.67})$$

On appelle vitesse de glissement la différence de vitesse relative entre les deux faces :

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{dx} \right) = \frac{d^2u}{dxdt} = \frac{dv}{dx} \quad (\text{I.68})$$

### Viscosité

La viscosité est le ratio entre la contrainte appliquée et la vitesse de glissement (le gradient de vitesse) produite :

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (\text{I.69})$$

La contrainte s'exprimant en Pa, la vitesse de glissement en  $\text{s}^{-1}$ , la viscosité  $\eta$  s'exprime en Pa.s.

En mécanique des fluides, on appelle  $\eta$  la viscosité dynamique, et  $\mu = \eta/\rho$  ( $\rho$  la masse volumique) la viscosité dite "cinématique".

2.I.1 *Fluide parfait* **Définition du fluide parfait**

Le fluide parfait est un fluide idéalisé que l'on considère de viscosité nulle. Comme on vérifie la relation suivante :

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \quad (\text{I.70})$$

Cela implique que le fluide ne peut pas transmettre de force tangentielle car la contrainte tangentielle est nulle.

Dans un fluide parfait, on considère qu'il n'existe que des contraintes/forces normales à la surface.

2.I.2 *Fluide newtonien* **Définition du fluide newtonien**

Un fluide est dit newtonien <sup>a</sup> si la viscosité ne dépend pas de la contrainte (ou de la vitesse de déformation).

a. Isaac Newton est un alchimiste, astronome, mathématicien, physicien, philosophe... anglais (1642-1727). Connue pour la théorie de la gravitation universelle, le calcul infinitésimal, et l'optique.

Il existe cependant des fluides pour lesquels la viscosité augmente avec la vitesse de déformation, qui sont dits "rhéo-épaississant". La maïzena (marque déposée de l'amidon de maïs) mélangé à l'eau forme un fluide rhéo-épaississant. Un jeu "amusant" consiste à courir sur une bassine de maïzena : plus on court rapidement plus le fluide se déforme rapidement et plus sa viscosité augmente, ce qui le fait apparaître de moins en moins fluide. Si on marche lentement dessus, on coule.

D'autres fluides sont "rhéo-fluidifiants", c'est à dire que leur viscosité chute si on les déforme rapidement. C'est le cas de la majorité des peintures : quand on la touille dans le pot elle est assez fluide. En revanche, appliquée sur un mur, soumise uniquement à son propre poids (donc à une contrainte faible), sa viscosité est beaucoup plus grande, ce qui fait qu'elle s'écoule très lentement sur le mur (et donc sèche avant d'avoir pu s'écouler significativement).

D'autres fluides ne commencent à s'écouler qu'à partir d'une contrainte seuil : en deçà de cette contrainte, on peut considérer la viscosité comme infinie (très grande au moins). En dessus de cette contrainte seuil, le comportement peut être newtonien (la viscosité n'augmente pas et ne diminue pas avec la contrainte au delà de ce seuil). On appelle ces fluides "fluides de Bingham". Les dentifrices sont (suivant les marques) des fluides de Bingham. Pour certaines marques, on peut voir que la noisette de dentifrice posée sur la brosse à dent ne se déforme pas sous son propre poids (la contrainte est inférieure à la contrainte seuil), mais une fois brossée sur les dents, elle est très fluide (le cisaillement produit entre la brosse et les dents dépasse la contrainte seuil). Sinon, le dentifrice ne s'étalerait pas, ce n'est donc pas plus mal...

**2.J Débit**

Le débit est la quantité de fluide qui traverse une section droite durant un intervalle de temps défini. On peut exprimer cette quantité de fluide soit en terme de masse, soit en terme de volume.

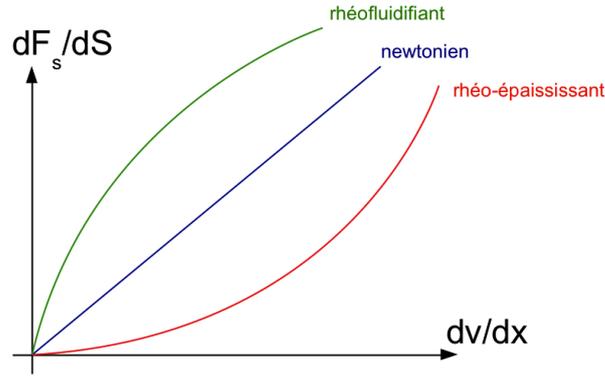


FIGURE I.12 — Viscosité newtonienne

### 2.J.1 Débit massique

Le débit massique, noté  $q_m$  est la quantité, exprimée en kg, de fluide traversant une section droite. Soit  $dS$  une section droite élémentaire, de normale  $\vec{n}$ ,  $dm$  la quantité de matière traversant  $dS$  durant  $dt$  :

$$q_m = \frac{dm}{dt} \quad (\text{I.71})$$

Soit  $d\vec{u}$  le déplacement de fluide autour de  $dS$  durant  $dt$ , et  $\rho$  la masse volumique de fluide :

$$dm = \rho d\vec{u} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (\text{I.72})$$

D'où :

$$q_m = \frac{\rho d\vec{u} \cdot \vec{n} \cdot dS}{dt} = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (\text{I.73})$$

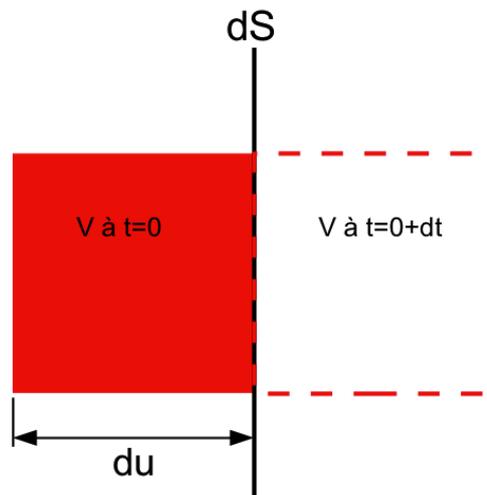


FIGURE I.13 — Débit massique

### Définition du débit massique

On peut généraliser au débit à travers une surface quelconque  $S$  :

$$q_m = \rho \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (\text{I.74})$$

en  $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ . Le signe de  $q_m$  dépend de l'orientation de  $\vec{n}$ . Il est négatif si globalement le champ de vitesse s'oppose à  $\vec{n}$ .  $\rho$  ne sort de l'intégrale que pour un fluide de masse volumique homogène.

#### 2.J.2 Débit volumique

### Définition du débit volumique

Le débit volumique, noté  $q_V$  est la quantité, exprimée en  $\text{m}^3$  de fluide traversant une section droite :

$$q_V = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (\text{I.75})$$

en  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Il suffit de diviser le débit massique par la masse volumique pour avoir un débit volumique.

## 2.K Théorème de Green-Ostrogradski (G-O)

Ce théorème est un outil indispensable pour la mécanique des fluides. Il permet de convertir une intégrale de volume en intégrale de surface.

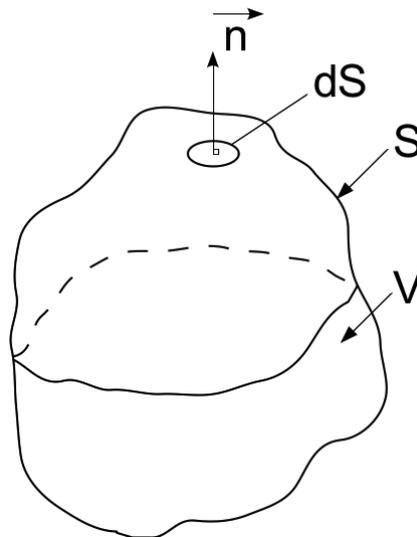


FIGURE I.14 — G-O

Soit  $\vec{A}$  un champ de vecteur quelconque ( $\vec{A}(x, y, z)$ ). On a vu que le divergent d'un champ vectoriel n'est rien d'autre que le bilan des flux de ce champ à travers les surfaces  $S$  fermant un volume  $dV$ . Soit  $\vec{n}$  la normale à une surface élémentaire  $dS$  orientée vers l'extérieur de  $dV$ , on a donc :

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{n} \, dS}{dV} \quad (\text{I.76})$$

D'où :

$$\operatorname{div}(\vec{A}) dV = \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS \quad (\text{I.77})$$

### Théorème de Green-Ostrogradski

Le théorème de Green <sup>a</sup>-Ostrogradski <sup>b</sup> donne :

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{A}) dV = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS \quad (\text{I.78})$$

$\forall \vec{A}$  pour  $S$  fermant  $V$ , avec  $\vec{n}$  orienté vers l'extérieur de  $V$ .

<sup>a</sup>. George Green, physicien britannique (1793-1841)

<sup>b</sup>. Mikhaïl Vassilievitch Ostrogradski, un physicien et mathématicien ukrainien (1801-1862)

# CHAPITRE II

## Statique des fluides

### Sommaire

---

1	Introduction . . . . .	<b>28</b>
2	Problème en une dimension : variation de la pression dans une colonne de fluide	<b>28</b>
2.A	Une brève introduction à la pression . . . . .	28
2.B	Force de surface . . . . .	29
2.C	Force de volume . . . . .	29
2.D	Principe fondamental de la statique (PFS) . . . . .	30
3	Equation fondamentale de l'équilibre des fluides . . . . .	<b>30</b>
3.A	Force de surface . . . . .	30
3.B	Force de volume . . . . .	31
3.C	PFS . . . . .	31
4	Poussée d'Archimède . . . . .	<b>32</b>

---

## 1 Introduction

Pour les étudiants qui ont déjà eu l'occasion de suivre des cours de mécanique des fluides, ce chapitre reprendra des équations qu'ils connaissent déjà. Le rôle de ce chapitre est d'introduire les outils de la MMC dans la mécanique des fluides via un problème simple : un fluide immobile (statique).

## 2 Problème en une dimension : variation de la pression dans une colonne de fluide

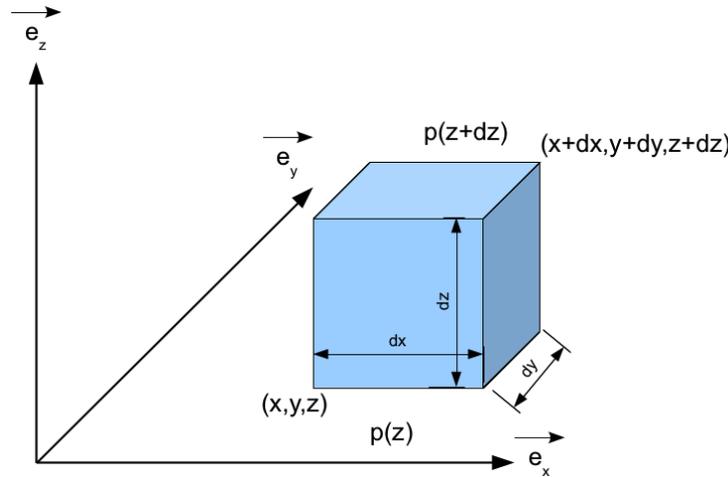


FIGURE II.1 — Pression autour d'un volume de fluide

On considère un volume élémentaire de fluide  $dV$ , de côtés  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ . On considère l'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  colinéaire à  $\vec{e}_z$  :

$$\vec{g} = -g \vec{e}_z \quad (\text{II.1})$$

Faisons un bilan des forces s'exerçant sur  $dV$ .

### 2.A Une brève introduction à la pression

Nous l'avons vu<sup>1</sup>, via la mécanique des solides déformables 3D, le tenseur des contraintes dans un milieu continu quelconque s'écrit :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \quad (\text{II.2})$$

Or, pour un fluide statique, lorsqu'on isole un volume de fluide au sein de l'ensemble du fluide, on ne peut pas envisager qu'il y ait une force tangentielle sur les surfaces de ce volume (voir en Introduction : 2.A.1). Ces forces sont donc normales aux surfaces. Dans la base  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ,

1. ou nous le verrons...

les contraintes hors diagonales sont donc nulles :  $\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{yx} = 0$ . Néanmoins, ce constat ne doit pas dépendre du référentiel. Or<sup>2</sup>, le tenseur des contraintes peut-être décomposé comme :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}} \quad (\text{II.3})$$

$\bar{\bar{I}}$  le tenseur identité,  $\text{tr}(\bar{\bar{\sigma}})$  la trace du tenseur des contraintes. Dans cette décomposition, seul le premier terme (dit "sphérique") est indépendant de la base considérée, car le tenseur identité est indépendante de la base considérée et la trace est un invariant. En d'autres termes, la seule composante du tenseur des contraintes qui ne génèrera pas de termes hors-diagonaux, quelques soient la base considérée, est  $\frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{I}}$ . Ce que nous, mécaniciens<sup>3</sup> appelons la pression est :

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\bar{\sigma}}) \quad (\text{II.4})$$

Le signe  $-$  vient du fait qu'une compression correspond à une contrainte négative. Autrement dit, la contrainte dans un fluide statique est donnée par :

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p \times \bar{\bar{I}} \quad (\text{II.5})$$

Et cela quelque soit la base ! Il en résulte que le vecteur contrainte sur une surface de normale  $\vec{n}$  est défini comme :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = -p \vec{n} \quad (\text{II.6})$$

La seule est unique force de surface est donc la force due à la pression, et cela pour n'importe quelle surface de n'importe quelle normale !

## 2.B Force de surface

Le fluide est immobile, et comme nous l'avons déjà introduit juste avant, il ne subit que des forces de surface normales à ses surfaces, et ces forces résultent uniquement de la pression :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = -p \vec{n} = \frac{d\vec{F}_S}{dS} \rightarrow d\vec{F}_S = -p \vec{n} dS \quad (\text{II.7})$$

Puisque ce volume est statique, on peut supposer que les forces selon  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  s'équilibrent, on ne les traite donc pas. Selon  $\vec{e}_z$ , on a les forces de pression qui s'exercent sur la face en  $z$  et sur la face en  $z + dz$ . Ces faces ont une surface  $dS = dx dy$ . En  $z$  :

$$d\vec{F}_S(z) = -p(z)(-\vec{e}_z) dS = p(z) \vec{e}_z dx dy \quad (\text{II.8})$$

En  $z + dz$  :

$$d\vec{F}_S(z + dz) = -p(z + dz) \vec{e}_z dS = -p(z + dz) \vec{e}_z dx dy \quad (\text{II.9})$$

## 2.C Force de volume

On ne traite que du poids comme force de volume.  $dV$  subit un poids  $d\vec{P}$  :

$$d\vec{P} = \rho \vec{g} dV = -\rho g \vec{e}_z dx dy dz \quad (\text{II.10})$$

2. Voir le cours de mécanique des solides déformables 3D.

3. La pression a diverses définitions, entre autres thermodynamiques.

## 2.D Principe fondamental de la statique (PFS)

$dV$  étant immobile, on vérifie :

$$d\vec{F}_S(z) + d\vec{F}_S(z + dz) + d\vec{P} = \vec{0} \quad (\text{II.11})$$

Soit, projeté sur  $\vec{e}_z$  :

$$p(z)dxdy - p(z + dz)dxdy - \rho g dx dy dz = 0 \quad (\text{II.12})$$

On peut tout rapporter à  $dV = dx dy dz$  :

$$\frac{p(z)}{dz} - \frac{p(z + dz)}{dz} - \rho g = 0 \quad (\text{II.13})$$

ou :

$$\frac{p(z + dz) - p(z)}{dz} + \rho g = \frac{\partial p(z)}{\partial z} + \rho g = 0 \quad (\text{II.14})$$

Par intégration, soit  $p(z_0)$  la pression au point de hauteur  $z_0$ ,  $p(z_1)$  la pression au point de hauteur  $z_1$  :

$$dp = -\rho g dz \quad (\text{II.15})$$

Si le fluide est incompressible :

$$p(z_1) - p(z_0) = \int_{z_0}^{z_1} -\rho g dz = -(\rho g z_1 - \rho g z_0) = \rho g z_0 - \rho g z_1 \quad (\text{II.16})$$

Soit :

$$p(z_1) + \rho g z_1 = p(z_0) + \rho g z_0 \quad (\text{II.17})$$

### Equation de la statique des fluides

Dans le cas où l'accélération de la pesanteur est colinéaire à  $\vec{z}$ , la pression dans un fluide statique incompressible est définie par :

$$p(z) + \rho g z = cste \quad (\text{II.18})$$

## 3 Equation fondamentale de l'équilibre des fluides

Généralisons le problème en 3 dimensions, ne traitons pas que du cas où  $\vec{g}$  est colinéaire  $\vec{e}_z$ . Isolons un volume  $V$ , fermé par une surface  $S$ . Faisons le bilan des forces qui s'applique sur  $V$ .

### 3.A Force de surface

Soit  $\vec{n}$  la normale à la surface en un point  $M$  de cette surface, pointant vers l'extérieur de  $V$ . Les forces de surface sont :

$$\vec{F}_S = \int_S -p(x, y, z) \vec{n} dS \quad (\text{II.19})$$

Considérons un champ de vecteur quelconque  $\vec{A}$  constant sur  $V$  :

$$\vec{F}_S \cdot \vec{A} = \int_S -p(x, y, z) \vec{n} \cdot \vec{A} dS \quad (\text{II.20})$$

Or,  $S$  fermant  $V$ , d'après G-O, on a :

$$\int_S -p(x, y, z) \vec{n} \cdot \vec{A} dS = \int_V \text{div}(-p \vec{A}) dV \quad (\text{II.21})$$

Le divergent est un opérateur différentiel, qui subit les mêmes règles que "la dérivé" :

$$(u.f)' = u'.f + u.f' \quad (\text{II.22})$$

Donc :

$$\text{div}(-p \vec{A}) = -p \text{div}(\vec{A}) + \text{grad}(-p) \cdot \vec{A} \quad (\text{II.23})$$

Or  $\vec{A} = C\vec{s}te$ , donc  $\text{div}(\vec{A}) = 0$  :

$$\vec{F}_S \cdot \vec{A} = \int_V -\text{grad}(p) \cdot \vec{A} dV \quad (\text{II.24})$$

Et donc, en simplifiant par  $\vec{A}$  :

$$\vec{F}_S = - \int_V \text{grad}(p(x, y, z)) dV \quad (\text{II.25})$$

Cette expression de la force la résultante des forces de surface, malgré cette démonstration, est assez triviale. Si on isole un cube au sein d'un fluide, les forces de surfaces sont dues aux pressions sur chaque face. Si la pression est la même sur chaque face (le gradient est nul), la résultante de ces forces est nulle. Si la pression varie, la résultante des forces est due à la différence des pressions entre face, donc résulte du gradient de pression d'une face à l'autre.

### 3.B Force de volume

La force volumique élémentaire vaut, si on ne considère que le poids :

$$\vec{f}_V = \rho \vec{g} \quad (\text{II.26})$$

Donc, sur le volume complet :

$$\vec{F}_V = \int_V \rho \vec{g} dV \quad (\text{II.27})$$

### 3.C PFS

A l'équilibre, on arrive à :

$$\vec{F}_S + \vec{F}_V = \vec{0} \quad (\text{II.28})$$

Donc :

$$- \int_V \text{grad}(p) dV + \int_V \rho \vec{g} dV = \vec{0} \quad (\text{II.29})$$



#### Equation fondamentale de l'équilibre des fluides

En ramenant la dernière équation, intégrée sur  $V$ , à l'élément de volume, on obtient l'équation de la statique des fluides :

$$-\text{grad}(p(x, y, z)) + \rho(x, y, z) \vec{g} = \vec{0} \quad (\text{II.30})$$

## 4 Poussée d'Archimède

Soit un corps de masse volumique  $\rho_c$ , de volume  $V_c$ , immergé dans un fluide de masse volumique  $\rho_f$ .  $S_c$  la surface extérieure du corps,  $\vec{n}$  la normale en un point de cette surface.

Les forces exercées par le fluide sur l'objet sont des forces de contact :

$$\vec{F}_S = \int_{S_c} -p \vec{n} dS = - \int_{V_c} \text{grad}(p) dV \quad (\text{II.31})$$

Or la pression qu'exerce le fluide sur le corps, est la pression du fluide, de masse volumique  $\rho_f$ , au niveau de l'interface fluide/corps, qui vérifie :

$$-\text{grad}(p) + \rho_f \vec{g} = \vec{0} \quad (\text{II.32})$$

Donc :

$$\text{grad}(p) = \rho_f \vec{g} \quad (\text{II.33})$$

On en déduit :

$$\vec{F}_S = - \int_{V_c} \text{grad}(p) dV = - \int_{V_c} \rho_f \vec{g} dV \quad (\text{II.34})$$



### Poussée d'Archimède

Si la masse volumique du fluide est homogène autour du corps immergé, le fluide subit une poussée de la part du fluide donnée par :

$$\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{corps}} = -\rho_f V_c \vec{g} \quad (\text{II.35})$$

C'est la poussée d'Archimède<sup>a</sup>. On note que  $\rho_f V_c$  est la masse de fluide que le corps déplace (remplace), et que la force s'oppose à  $\vec{g}$ .

Un corps immergé est soumis à une force verticale ascendante égale au poids de liquide déplacé par ce corps.

<sup>a</sup>. Archimède de Syracuse est né à... Syracuse vers 287 av. J.-C. et mort au même endroit 75 ans plus tard, assassiné par un soldat romain. C'est un grand scientifique de Sicile, qui était à l'époque une île de la Grande Grèce (la Grèce + ses colonies/comptoirs en Méditerranée). Il était physicien, mathématicien et ingénieur. On le pense inventeur de l'écrou. Il démontra aussi que  $a^b a^c = a^{b+c}$ .

# CHAPITRE III

## Dynamique des fluides parfaits et point de vue d'Euler

### Sommaire

---

1	Introduction . . . . .	<b>34</b>
2	Equation de l'hydrodynamique des fluides parfaits . . . . .	<b>34</b>
2.A	Bilan des forces . . . . .	34
2.B	Principe fondamental de la dynamique (PFD) . . . . .	34
2.C	Accélération eulérienne . . . . .	35
2.D	Autres écritures de l'accélération . . . . .	36
3	Point de vue de Lagrange et point de vue d'Euler . . . . .	<b>37</b>
3.A	Fluide en mouvement de rotation pure . . . . .	37
3.B	Pourquoi ne pas toujours utiliser le point de vue de Lagrange? . . . . .	40

---

## 1 Introduction

Nous poursuivons l'introduction des outils de la MMC dans la mécanique des fluides avec la dynamique des fluides parfaits. A nouveau, certains étudiants auront déjà vu les équations finales démontrées ici, mais nous les redémontrons d'une autre manière, et de façon plus généralisée. Nous allons travailler sur les fluides parfaits. On rappelle que de tels fluides n'existent pas. Ils s'agit de fluides idéalisés, pour lesquels on considère la viscosité comme nulle. Cela implique que les forces de surfaces ne peuvent être que normales à la surface.

Dans la mesure où les fluides parfaits n'existent pas, on peut se demander quel est l'intérêt des équations qui vont être développées ici. Nous le verrons par la suite, ces équations permettent d'établir l'équation de Bernoulli, qui permet elle de regarder, par exemple, qualitativement, comment le champ de pression évolue dans un écoulement (par exemple l'effet Venturi). Elle permet aussi d'obtenir les ordres de grandeur de pression ou de vitesse dans un écoulement.

## 2 Equation de l'hydrodynamique des fluides parfaits

### 2.A Bilan des forces

On considère un volume  $V$ , contenant du fluide en mouvement, fermé par une surface  $S$ . En l'absence de viscosité, les forces de surfaces ne sont dues qu'à la pression sur la surface  $S$  (voir la Section 2.A du chapitre précédent) :

$$\vec{F}_S = \int_S -p \vec{n} dS = \int_V -g\vec{rad}(p) dV \quad (\text{III.1})$$

On ne traite que du poids en force de volume :

$$\vec{F}_V = \int_V \rho \vec{g} dV \quad (\text{III.2})$$

### 2.B Principe fondamental de la dynamique (PFD)

Le fluide est, cette fois-ci, en mouvement. On applique donc le PFD sur  $V$ , de masse  $m$  :

$$m \vec{\Gamma} = \sum \vec{F}_{ext} \quad (\text{III.3})$$

Donc :

$$m \vec{\Gamma} = \int_V \rho \vec{\Gamma} dV = \vec{F}_S + \vec{F}_V \quad (\text{III.4})$$

$$\int_V \rho \vec{\Gamma} dV = \int_V -g\vec{rad}(p) dV + \int_V \rho \vec{g} dV \quad (\text{III.5})$$



#### Equation générale de la dynamique des fluides parfaits

On transforme cette dernière équation en équation locale :

$$\rho \vec{\Gamma} = -g\vec{rad}(p) + \rho \vec{g} \quad (\text{III.6})$$

Ou, dans sa forme plus standard :

$$\vec{\Gamma} = -\frac{1}{\rho} g\vec{rad}(p) + \vec{g} \quad (\text{III.7})$$

C'est le PFD appliqué à un fluide parfait.

Si on traite de n'importe quelle force volumique (voir en Introduction la section 2.G.1), alors on a de manière générale  $\vec{f}_V$  (qu'on note aussi  $\vec{f}$ ) au lieu de  $\rho \vec{g}$  :

$$\rho \vec{\Gamma} = -\text{grad}(p) + \vec{f}_V \quad (\text{III.8})$$

Il nous reste à exprimer  $\vec{\Gamma}$ .

## 2.C Accélération eulérienne

Soit  $\vec{v}(x, y, z, t)$  la vitesse au point  $\{x, y, z\}$  à l'instant  $t$  :

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}} \quad (\text{III.9})$$

La variation de vitesse  $d\vec{v}$  d'une particule entre l'instant  $t$  où elle est passée en  $\{x, y, z\}$  et l'instant  $t + dt$  où elle est arrivée "ailleurs" (en  $x + dx, y + dy, z + dz$ ) peut être due à :

1. La variation de vitesse entre ces 2 points de l'écoulement (ex : la particule passe dans une chute d'eau) ;
2. La variation de la vitesse au cours de l'intervalle de temps  $dt$  (le débit change au cours du temps : pluie, lâché de barrage).

Pour la première partie, on a par exemple la variation de  $\vec{v}$  le long de  $dx$  :  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \Big|_{y,z,t} dx$  (même principe le long de  $dy$  et de  $dz$ ). Pour la seconde partie, on a la variation temporelle de  $\vec{v}$  :  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \Big|_{x,y,z} dt$ . On obtient donc :

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \Big|_{y,z,t} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \Big|_{x,z,t} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \Big|_{x,y,t} dz + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \Big|_{x,y,z} dt \quad (\text{III.10})$$

Et finalement, l'accélération :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \Big|_{y,z,t} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \Big|_{x,z,t} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \Big|_{x,y,t} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \Big|_{x,y,z} \quad (\text{III.11})$$

Durant l'intervalle de temps  $dt$ , une particule se déplace de  $dx$  selon  $\vec{e}_x$ , on en déduit donc que :

$$dx = v_x dt \text{ et de même } dy = v_y dt, dz = v_z dt \quad (\text{III.12})$$



### Expression de l'accélération : dérivée particulaire

On obtient finalement :

$$\vec{\Gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \Big|_{y,z,t} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \Big|_{x,z,t} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \Big|_{x,y,t} v_z + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \Big|_{x,y,z} = \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad (\text{III.13})$$

$\frac{D\vec{v}}{Dt}$  est appelé "dérivée particulaire" de la vitesse.

## 2.D Autres écritures de l'accélération

On a :

$$\overline{\text{grad}}(\vec{v}(x,y,z)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z} \quad (\text{III.14})$$

Et :

$$\overline{\text{grad}}(\vec{v}) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}} \quad (\text{III.15})$$

On reconnaît dans le terme de gauche sur chaque ligne :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}} \quad (\text{III.16})$$

### Autre expression de l'accélération

Avec la même observation pour  $v_y$  et  $v_z$  :

$$\vec{\Gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\overline{\text{grad}}(\vec{v})) \cdot \vec{v} \quad (\text{III.17})$$

Une dernière écriture permet de faire apparaître un rotationnel. Cette écriture est utile si l'écoulement est irrotationnel : cela nous débarrasse de ce terme.

Notons  $\overline{\vec{\Omega}}$  le tenseur tourbillon, tel que :

$$\overline{\vec{\Omega}} = \frac{1}{2} (\overline{\text{grad}} \vec{v} - \overline{\text{grad}}^T \vec{v}) \quad (\text{III.18})$$

On note que ce tenseur est l'analogie de  $\overline{\vec{\omega}}$  défini en "Solides Déformables", le tenseur antisymétrique qui correspond au rotation de corps rigide. C'est un tenseur de vitesse de rotation de corps rigide.

On admettra, sans le démontrer (ça peut être un bon exercice) :

$$(\overline{\text{grad}}^T \vec{v}) \cdot \vec{v} = \overline{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right) \quad (\text{III.19})$$

Avec  $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ ; et on admet aussi (de la même façon, c'est assez facile à démontrer) :

$$\bar{\bar{\Omega}} \cdot \vec{v} = \bar{\bar{\Omega}} \wedge \vec{v} \quad (\text{III.20})$$

$\bar{\bar{\Omega}}$  est le vecteur tourbillon :  $\bar{\bar{\Omega}} = \frac{1}{2} r \vec{\text{rot}}(\vec{v})$ . On obtient alors :

$$\left( \bar{\text{grad}}(\vec{v}) \right) \cdot \vec{v} = \left( \bar{\text{grad}}^T(\vec{v}) + 2\bar{\bar{\Omega}} \right) \cdot \vec{v} = \bar{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right) + 2\bar{\bar{\Omega}} \wedge \vec{v} \quad (\text{III.21})$$

### Autre expression de l'accélération en rotationnel

Finalelement :

$$\vec{\Gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \bar{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \left( r \vec{\text{rot}} \vec{v} \right) \wedge \vec{v} \quad (\text{III.22})$$

Si l'écoulement est irrotationnel ( $r \vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$ , et on rappelle que si  $v_i$  ne dépend que de  $x_i$  ceci est vérifié -ex :  $v_x$  ne dépend que de  $x$ -), alors :

$$\vec{\Gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \bar{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right) \quad (\text{III.23})$$

## 3 Point de vue de Lagrange et point de vue d'Euler

### 3.A Fluide en mouvement de rotation pure

On considère un fluide incompressible qui tourne autour d'un point fixe, à vitesse quelconque (non constante). Cela peut par exemple représenter du café qui tourne dans une tasse après qu'on a mélangé le café et le sucre (pour ceux qui prennent du sucre). Ceci est illustré par la Figure III.1.

#### 3.A.1 Point de vue de Lagrange

Dans le point de vue de Lagrange, on considère une particule de fluide  $P$ , dont la position est définie par le vecteur  $\vec{OP}$ , qui tourne autour du point  $O$  à altitude ( $z$ ) et distance ( $r$ ) fixes du point  $O$ . On a :

$$\vec{OP} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z \quad (\text{III.24})$$

Dans le point de vue de Lagrange, le repère cylindrique est associé à la particule et suit son mouvement. Les vecteurs de sa base (sauf  $\vec{e}_z$ ) ne sont donc pas fixes. La vitesse de la particule est donnée par :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OP}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} (r \vec{e}_r) + \frac{\partial}{\partial t} (z \vec{e}_z) = r \frac{\partial}{\partial t} (\vec{e}_r) \quad (\text{III.25})$$

Or :

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \quad (\text{III.26})$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{e}_r) = \frac{\partial}{\partial t} (\cos \theta) \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial t} (\sin \theta) \vec{e}_y = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_x + \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_y = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad (\text{III.27})$$

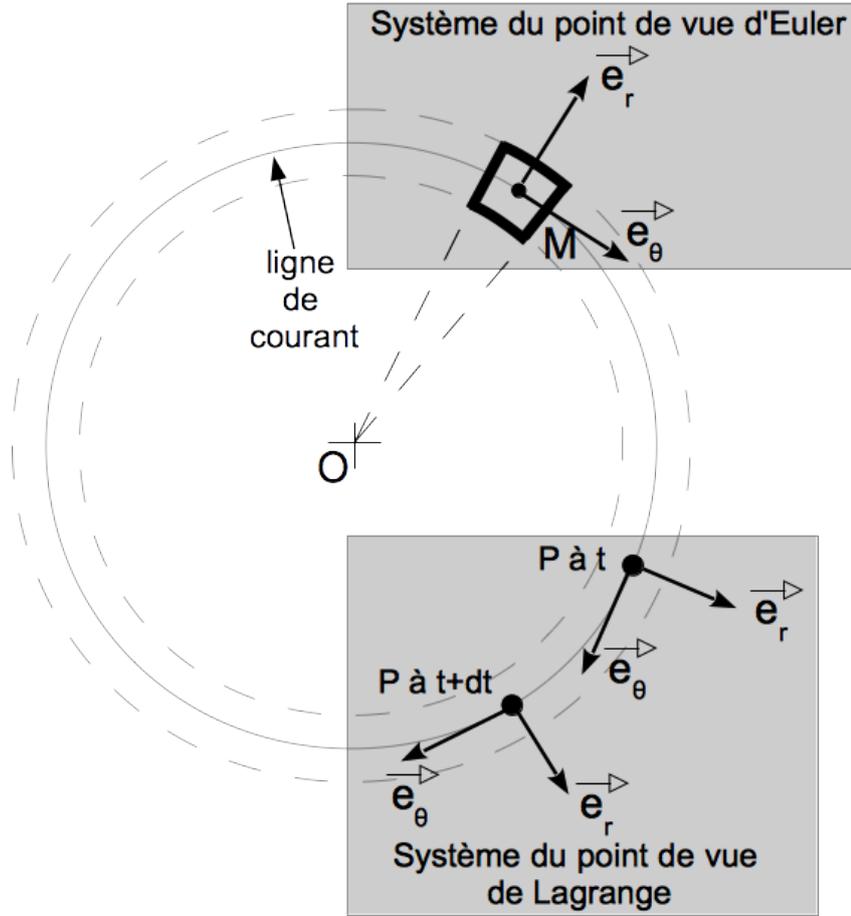


FIGURE III.1 — Différence entre le point de vue de Lagrange et celui d'Euler.

Et enfin :

$$\vec{v} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad (\text{III.28})$$

Du point de vue de Lagrange, l'accélération de la particule n'est rien d'autre que la dérivé de sa vitesse :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d}{dt} \vec{e}_\theta \quad (\text{III.29})$$

Or :

$$\frac{d}{dt} \vec{e}_\theta = -\vec{e}_r \quad (\text{III.30})$$

D'où :

$$\vec{a} = r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r \quad (\text{III.31})$$

### 3.A.2 Point de vue d'Euler

Dans le point de vue d'Euler, on isole un volume de l'espace, contenant du fluide et on garde ce volume comme référence. Soit un volume  $dV$ , centré sur un point  $M$  de coordonnées :

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z \quad (\text{III.32})$$

Dans le point de vue d'Euler,  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_z$  sont indépendants du temps. Le point  $M$  que je "surveille" sera toujours le même, mais entre l'instant  $t$  et l'instant  $t + dt$ , ce ne sera pas la même particule qui passera par ce point. Le repère est donc fixe. Le champ de vitesse n'est donc pas la vitesse d'une particule, c'est un champ qui décrit à l'instant  $t$  la vitesse de la particule qui passera en  $M$ . Le champ de vitesse pour une rotation autour de l'axe  $\vec{e}_z$  est défini comme :

$$\vec{v} = r \Omega \vec{e}_\theta \quad (\text{III.33})$$

Avec  $\Omega$  la vitesse angulaire ( $\text{rad.s}^{-1}$ ). L'accélération n'est pas juste la dérivée par rapport au temps de cette vitesse : cette dérivée ne donnerait que la différence de vitesse entre une particule qui passe en  $M$  à  $t$  et la suivante qui y passe en  $t + dt$ . L'accélération eulérienne se définit comme :

$$\vec{\Gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) + (\vec{rot} \vec{v}) \wedge \vec{v} \quad (\text{III.34})$$

Il y a quand même un terme de dérivé par rapport au temps, qui traduit le fait que dans le volume  $dV$  entourant  $M$ , la vitesse peut changer pendant qu'une particule traverse ce volume :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = r \dot{\Omega} \vec{e}_\theta \quad (\text{III.35})$$

Puis on a un second terme qui traduit le fait que la particule peut accélérer par un changement de trajectoire, par un changement de géométrie (conservation du débit volumique) :

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = r^2 \Omega^2 \text{ donc : } \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) = r \Omega^2 \vec{e}_r \quad (\text{III.36})$$

Et enfin :

$$\vec{rot} \vec{v} = 2\Omega \vec{e}_z \quad (\text{III.37})$$

Donc :

$$r \vec{rot} \vec{v} \wedge \vec{v} = -2r\Omega^2 \vec{e}_r \quad (\text{III.38})$$

En en déduit l'accélération :

$$\vec{\Gamma} = r \dot{\Omega} \vec{e}_\theta + r \Omega^2 \vec{e}_r - 2r\Omega^2 \vec{e}_r = r \dot{\Omega} \vec{e}_\theta - r\Omega^2 \vec{e}_r \quad (\text{III.39})$$

### 3.A.3 Comparaison

On remarque une certaine similitude, pour notre système, entre les deux points de vue :

$$\text{Lagrange : } \vec{a} = r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r \quad (\text{III.40})$$

$$\text{Euler : } \vec{\Gamma} = r \dot{\Omega} \vec{e}_\theta - r \Omega^2 \vec{e}_r \quad (\text{III.41})$$

Il suffirait de ce dire que  $\dot{\theta} = \Omega$ ... Pourquoi cette similitude? Dans le point de vue de Lagrange, la particule  $P$ , à l'instant  $t$  passe au point  $M$  observé par Euler. A l'instant  $t + dt$ , la particule  $P$ , suivie par Lagrange, n'est plus en  $M$ , c'est une nouvelle particule  $P'$  qui s'y trouve. Sauf que dans notre système, les particules tournent en rond, comme sur un manège. La particule  $P'$  arrivant en  $M$  à l'instant  $t + dt$  a exactement la même vitesse et accélération que la particule  $P$  à ce même instant, mais qui se trouve à un autre endroit. D'où la similitude des deux accélérations.

De manière plus simple :

- Dans le point de vue de Lagrange, on isole un ensemble de particules, on peut donc prendre toutes les particules.
- Dans le point de vue d'Euler, on isole un volume de l'espace, donc on peut prendre le volume qui englobe toutes les particules. Comme le fluide tourne en rond, ces deux points de vue isolent le même ensemble à tout instant. Ce qui ne serait absolument pas le cas si les particules allaient tout droit.

### 3.B Pourquoi ne pas toujours utiliser le point de vue de Lagrange ?

Dans le point de vue de Lagrange, on isole un ensemble de particules, comme illustré sur la Figure III.2 : le volume rouge isole un ensemble de particules. Si je veux connaître le devenir de ce système (l'ensemble de particules), je vais lui appliquer les principes fondamentaux de la dynamique, en prenant en compte les forces qui s'appliquent sur la surface du système (dues à la pression) et sur l'ensemble du volume (comme le poids).

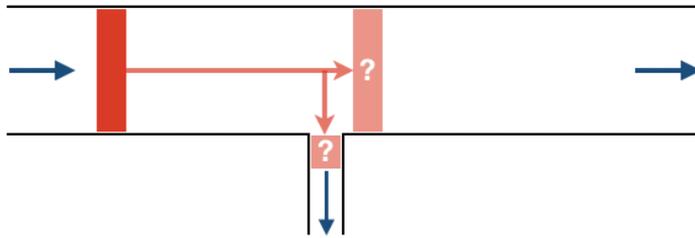


FIGURE III.2 — Exemple simple d'écoulement où le point de vue de Lagrange montre déjà ses limites

Le problème, comme l'illustre la Figure III.2, c'est que ce volume/système peut se scinder, ses contours évoluer de façon très complexe et l'ensemble devient très compliqué à mettre en équation. Tout devient encore pire quand l'écoulement est turbulent : le système peut rapidement se fractionner en de multiples sous-ensembles présentant des trajectoires très aléatoires.

Nous allons le voir, le point de vue d'Euler (qui pour la Figure III.2 correspondrait par exemple à l'ensemble du système dessiné) permet de s'affranchir de tout ces problèmes. Nous le verrons avec l'équation de Bernoulli généralisée, une simple connaissance du débit permet de traiter le problème.

Pour un système fermé (fluide qui "tourne en rond"), à écoulement non-turbulent, le point de vue de Lagrange permettrait de traiter simplement le problème. Par exemple, pour le fluide qui tourne en rond, s'il tourne autour de l'axe vertical, comme l'accélération du point de vue de Lagrange est :

$$\vec{a} = r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r \quad (\text{III.42})$$

Si la vitesse angulaire est constante :

$$\vec{a} = -r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r \quad (\text{III.43})$$

On en déduit donc aisément que la pression (la seule force de surface existante pour un fluide parfait) présente un gradient sur  $\vec{e}_r$  (qui génère cette accélération) et sur  $\vec{e}_z$  (pour contrebalancer le poids). Le point de vue de Lagrange resterait néanmoins limité à ce type de problème.

Le point de vue d'Euler, bien que moins trivial en apparence, permet de traiter beaucoup plus simplement de nombreux problèmes.

# CHAPITRE IV

## Equation de Bernoulli

### Sommaire

---

1	Introduction . . . . .	42
2	Simplification de l'équation de dynamique des fluides . . . . .	42
3	Relation de Bernoulli . . . . .	43
3.A	Energie potentielle de pesanteur . . . . .	43
3.B	Point de vue énergétique . . . . .	44
4	Pression motrice . . . . .	44
5	Pression dynamique . . . . .	45
6	Nombre de Froude . . . . .	45
7	Bernoulli sur une ligne de courant . . . . .	45
8	Conservation du débit . . . . .	47
9	Puissance mécanique d'un écoulement . . . . .	47

---

## 1 Introduction

L'équation du principe fondamentale de la dynamique, obtenue dans le chapitre précédent, donne pour un fluide parfait :

$$-\vec{grad} p + \vec{f}_V = \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) + (\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) \quad (\text{IV.1})$$

Il s'agit là de trois équations (une par composante de vecteurs) différentielles aux dérivées partielles, pas toujours faciles à résoudre, voire, parfois, impossibles (au sens où l'état actuelle des mathématiques ne permet pas de trouver de solution). Néanmoins, avec certaines hypothèses, on peut ramener ces équations à une unique équation scalaire plus simple : la relation de Bernoulli <sup>1</sup>.

Nous allons le voir lors des TD, l'équation de Bernoulli permet de traiter tous les problèmes d'écoulement dans des conduites, canaux, ou les problèmes où on ne cherche pas/n'a pas besoin à déterminer le champ de vitesse en tout point, mais seulement sur des lignes de courant. Cette relation ne donne qu'une vision "qualitative" de ce qui arrive à un fluide, puisqu'on en néglige la viscosité.

## 2 Simplification de l'équation de dynamique des fluides

On va simplifier ici l'équation générale de la dynamique des fluides parfaits pour des cas particuliers. On ne traite que du cas où :

1. Les forces volumiques ( $\vec{f}_V$ ) sont conservatives. Le travail d'une force conservative ne dépend pas du chemin suivi. Ce qui implique que le travail d'une force conservative est une différence de potentiel :

$$W_{AB} = U_A - U_B \quad (\text{IV.2})$$

Une force conservative dérive donc d'un potentiel :

$$\vec{f}_V = -\vec{grad} U \quad (\text{IV.3})$$

Il s'agit là de la force volumique élémentaire, la force de volume serait :

$$\vec{F}_V = \int_V -\vec{grad} U \, dV \quad (\text{IV.4})$$

On peut donc ré-écrire :

$$\rho \vec{\Gamma} = \vec{F}_S + \vec{F}_V = -\vec{grad} p - \vec{grad} U \quad (\text{IV.5})$$

Je mets des guillemets car ce n'est pas  $\vec{F}_V$  ou  $\vec{F}_S$ , mais leurs équivalents rapportés à l'unité de volume.

2. L'écoulement est permanent :  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ .

---

1. La famille de Bernoulli est famille illustre en science. Il s'agit ici de Daniel Bernoulli, suisse (1700-1782), mathématicien et physicien. Il était membre de l'Académie de Paris, et a reçu dix fois le prix annuel de l'Académie des sciences de Paris. C'était un ami de Leonhard Paul Euler, que son père, Jean Bernoulli (1667-1748), a formé. Jean Bernoulli est célèbre pour avoir résolu le problème de la chaînette (l'équation de la forme que prend une chaîne tenue par ses deux extrémités). Son frère, Nicolas était mathématicien, tout comme son oncle, plus renommé, Jacques, son cousin, s'appelant aussi Nicolas, ses neveux, Jacques et Jean (oui, il n'y a aucune originalité de prénom dans cette famille).

3. L'écoulement est irrotationnel :  $r\vec{\text{ot}} \vec{v} = \vec{0}$

On déduit des 2 dernières hypothèses que :

$$\vec{\Gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right) + (r\vec{\text{ot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right) \quad (\text{IV.6})$$

On obtient finalement :

$$\boxed{\rho \vec{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\vec{\text{grad}}(p + U)} \quad (\text{IV.7})$$

### 3 Relation de Bernoulli

Quelques autres simplifications permettent d'aboutir à une relation plus simple : la relation de Bernoulli. On considère toujours un écoulement irrotationnel et permanent. On ne traite, comme force volumique, que du poids. On se place, finalement, dans le cadre d'un fluide incompressible, qui vérifie donc :  $\vec{\text{grad}} \rho = \vec{0}$ . On a donc :

$$\rho \vec{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \vec{\text{grad}} \left( \rho \frac{v^2}{2} \right) = -\vec{\text{grad}}(p + U) \quad (\text{IV.8})$$

Et :

$$\vec{\text{grad}} \left( -p - U - \rho \frac{v^2}{2} \right) = \vec{0} \quad (\text{IV.9})$$

Quelque soient les points  $M$  et  $M'$ , on a donc :

$$\rho \frac{v(M)^2}{2} + p(M) + U(M) = \rho \frac{v(M')^2}{2} + p(M') + U(M') = \text{cste} \quad (\text{IV.10})$$

#### 3.A Energie potentielle de pesanteur

Le force volumique traitée ici (le poids) dérive d'un potentiel : elle dérive de l'énergie potentielle de pesanteur<sup>2</sup>. C'est l'énergie qu'un corps possède potentiellement du fait de son altitude :

$$E_p(z) = m g z \quad (\text{IV.11})$$

A une constante près. La seule force volumique qu'on traite est le poids, on a :

$$\vec{F}_V = \vec{P} = m \vec{g} = \int_V -\vec{\text{grad}} U dV \quad (\text{IV.12})$$

$$\int_V \rho \vec{g} dV = \int_V -\vec{\text{grad}} U dV \quad (\text{IV.13})$$

On se place dans le cas où :  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$  :

$$\rho \vec{g} = -\vec{\text{grad}} U = -\rho g \vec{e}_z \quad (\text{IV.14})$$

En projetant sur  $\vec{e}_z$  :

$$\rho g = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (\text{IV.15})$$

2. Ne pas confondre avec l'énergie potentielle gravitationnelle : l'énergie nécessaire à déplacer un corps dans un champ gravitationnel, donc en s'opposant au poids, donc de signe opposée à  $E_p$ .

Donc :

$$U(z) = \rho g z + Cste \quad (\text{IV.16})$$

Remarque :  $U$  est l'énergie potentielle de pesanteur volumique (ramené au volume élémentaire) :  $U = dE_p/dV$  ( $dE_p$  l'énergie potentiel de pesanteur d'une masse  $dm$ , de volume  $dV$ ).



### Equation de Bernoulli

On obtient finalement la relation de Bernoulli :

$$\rho \frac{v(M)^2}{2} + p(M) + \rho g z(M) = \rho \frac{v(M')^2}{2} + p(M') + \rho g z(M') = cste \quad (\text{IV.17})$$

Cette relation est vraie pour un écoulement permanent, irrotationnel, d'un fluide parfait incompressible, où seul le poids intervient en force volumique.

### 3.B Point de vue énergétique

Nous traitons, dans la relation de Bernoulli, de fluide parfait. Un fluide parfait ne subit pas de force tangentielle, donc pas de frottement. En d'autres termes, ce type de fluide ne dissipe pas d'énergie sous forme de chaleur. Son énergie mécanique est donc conservée. Reprenons l'équation de Bernoulli :

$$\rho \frac{v^2(z)}{2} + p(z) + \rho g z = cste \quad (\text{IV.18})$$

On considère un élément de ligne de courant  $d\vec{l}$ ,  $dS$  une section entourant la ligne de courant, telle que  $\vec{n}$ , la normale à  $dS$ , colinéaire à  $d\vec{l}$ . Multiplions l'équation de Bernoulli par le volume  $dV = d\vec{l} \cdot \vec{n} dS$ . On a  $\rho dV = dm$ , donc :

$$dm \frac{v^2}{2} + p dV + dm g z = cste \quad (\text{IV.19})$$

On reconnaît à gauche l'énergie cinétique, à droite l'énergie potentielle de pesanteur, et au centre le terme  $p dV$ . Ce terme correspond à ( $dl = d\vec{l} \cdot \vec{n}$ ) :

$$p dV = p dl dS = dF dl \quad (\text{IV.20})$$

Il s'agit du travail des forces de pression sur la surface  $dS$  : c'est le travail des forces produites par la pression.

La relation de Bernoulli souligne donc simplement la conservation de l'énergie mécanique du fluide.

## 4 Pression motrice

### Définition de la pression motrice

On appelle, en mécanique des fluides, "pression motrice" le terme  $p^*$  qui vérifie :

$$-g\vec{\text{rad}}(p) + \rho \vec{g} = -g\vec{\text{rad}}(p^*) \quad (\text{IV.21})$$

Pour  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$

$$p^*(z) = p(z) + \rho g z \quad (\text{IV.22})$$

D'où :

$$\rho \frac{v(z)^2}{2} + p^*(z) = \text{cste} \quad (\text{IV.23})$$

## 5 Pression dynamique

### Définition de la pression dynamique

On appelle parfois le reste de l'équation de Bernoulli (ce qui n'est pas la pression motrice) la "pression dynamique".  $\rho \frac{v(z)^2}{2}$  est donc la pression dynamique.

## 6 Nombre de Froude

### Nombre de Froude et prise en compte du poids

Dans l'équation de Bernoulli, on néglige souvent la pesanteur, pour simplifier les calculs. Cette approximation n'est valable que si l'énergie cinétique en tout point est largement supérieure à la variation d'énergie potentielle de pesanteur maximale entre le point le plus bas et le point le plus haut de l'écoulement, donc si :

$$\rho \frac{v^2}{2} \gg \rho g \Delta z \rightarrow v \gg \sqrt{g \Delta z} \quad (\text{IV.24})$$

(le facteur 2 ne joue pas pour grand chose ici) soit si :

$$\frac{v}{\sqrt{g \Delta z}} \gg 1 \quad (\text{IV.25})$$

Ce dernier nombre est appelé "Nombre de Froude". A noter qu'on le trouve parfois sous une autre forme, au carré :

$$\frac{v^2}{g \Delta z} \gg 1 \quad (\text{IV.26})$$

## 7 Bernoulli sur une ligne de courant

On a vu que Bernoulli est valide pour un écoulement irrotationnel entre n'importe quel point de l'écoulement. On va montrer ici, par l'exemple, que cette relation est vraie sur une ligne de courant d'un écoulement rotationnel, entre 2 points de cette ligne. On reprend l'équation

de la dynamique des fluides parfaits pour un écoulement rotationnel permanent d'un fluide incompressible :

$$-\vec{grad}(p) + \rho \vec{g} = \rho \left( \vec{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) + (\vec{rot} \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) \quad (\text{IV.27})$$

On considère l'écoulement suivant :

$$\vec{v} = r\Omega \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.28})$$

On identifie la ligne de courant : tout élément  $d\vec{l}$  de la ligne de courant vérifie :

$$d\vec{l} \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad (\text{IV.29})$$

Soit :

$$d\vec{l} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (\text{IV.30})$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ r\Omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\Omega c \\ 0 \\ r\Omega a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.31})$$

Donc  $a = c = 0$  et  $d\vec{l}$  est donc colinéaire à  $\vec{e}_\theta$ . Si on définit  $d\vec{l}$  comme l'élément de longueur parcouru durant  $dt$  :

$$d\vec{l} = \vec{v} dt = r \Omega dt \vec{e}_\theta \quad (\text{IV.32})$$

On a déjà calculé l'accélération pour ce champ de vitesse (section 3.A.2) :

$$\vec{\Gamma} = -r \Omega^2 \vec{e}_r \quad (\text{IV.33})$$

Et on en avait déjà déduit le champ de pression :

$$p(z, r) = -\rho g z + \rho \frac{r^2}{2} \Omega^2 + B \quad (\text{IV.34})$$

Sur une ligne de courant, d'après  $d\vec{l}$ , ni  $r$ , ni  $z$  ne varie puisque  $d\vec{l}$  est purement orthoradial. Or à  $r$  et  $z$  constant, la pression est constante, la vitesse est constante, et l'énergie potentielle de pesanteur est constante. Donc :

$$\rho \frac{v^2}{2} + p^* = cste \quad (\text{IV.35})$$

Est vrai sur n'importe quelle ligne de courant de cet écoulement.



### Equation de Bernoulli en écoulement irrotationnel

On acceptera donc que, pour un écoulement rotationnel, la relation de Bernoulli est vraie sur une ligne de courant.

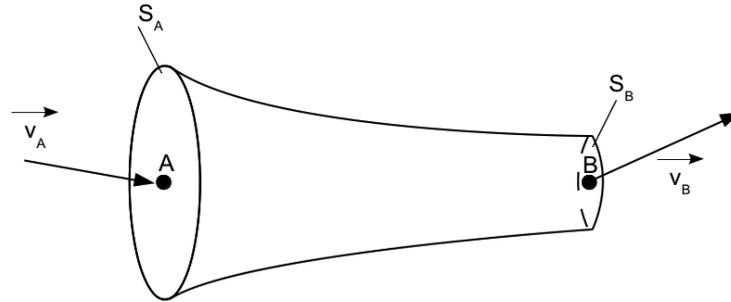


FIGURE IV.1 — Conservation du débit

## 8 Conservation du débit



### Conservation du débit volumique

Soit un écoulement permanent quelconque, d'un fluide parfait ou non, incompressible. Considérons une tube de courant de section  $S_A$  au point  $A$  de section  $S_B$  au point  $B$ . Si le fluide est incompressible, il rentre autant de fluide par la section  $S_A$  qu'il en sort par la section  $S_B$ , en masse comme en volume, en régime permanent. Donc :

$$q_{VA} = q_{VB} = \int_{S_A} \vec{v}_A \cdot \vec{n}_A dS_A = \int_{S_B} \vec{v}_B \cdot \vec{n}_B dS_B \quad (\text{IV.36})$$

Avec  $\vec{v}_A$  la vitesse en un point de la section  $S_A$ ,  $\vec{n}_A$  le vecteur normal à la surface  $S_A$ . Dans le cadre d'un écoulement droit de fluide parfait, la vitesse est constante sur la section, donc :

$$q_{VA} = q_{VB} = v_A S_A = v_B S_B \quad (\text{IV.37})$$

Avec  $\vec{v}_A \cdot \vec{n}_A = v_A$ .

## 9 Puissance mécanique d'un écoulement

Soit un écoulement permanent, d'un fluide incompressible. Soit une section droite dans cet écoulement, telle que la normale à cette section soit colinéaire au vecteur vitesse. Soit  $dS$  un élément de surface de  $S$  entourant localement une ligne de courant. L'énergie mécanique volumique sur la ligne de courant vaut ( $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$ ) :

$$p^* + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (\text{IV.38})$$

La puissance mécanique sur  $dS$  vaut :

$$W_{dS} = \left( p^* + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) v dS \quad (\text{IV.39})$$

On a bien des  $\text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^2$ , donc des :  $\text{J} \cdot \text{s}^{-1} = \text{W}$ .

 **Puissance d'un écoulement sur une section droite**

La puissance total de l'écoulement sur  $S$  vaut :

$$W_S = \int_S (p^* + \frac{1}{2} \rho v^2) v dS \text{ en W} \quad (\text{IV.40})$$

S'il s'agit d'un écoulement droit, la pression motrice étant constante sur  $S$ , tout comme la vitesse, la puissance mécanique de l'écoulement à travers  $S$  est :

$$W_S = (p^* + \frac{1}{2} \rho v^2) v S \quad (\text{IV.41})$$

# CHAPITRE V

## Dynamique des fluides parfaits et écoulement à potentiel de vitesse

### Sommaire

---

1	Introduction . . . . .	<b>50</b>
2	Principe de conservation de la masse : équation de continuité . . . . .	<b>50</b>
2.A	Première manière . . . . .	50
2.B	Deuxième manière . . . . .	51
2.C	Bilan : . . . . .	51
2.D	Cas particulier . . . . .	52
2.E	Exemple . . . . .	52
3	Écoulement à potentiel de vitesse . . . . .	<b>53</b>
3.A	Préambule . . . . .	53
3.B	Écoulement irrotationnel et couche limite . . . . .	54
3.C	Solution . . . . .	55
3.D	Potentiel de vitesse . . . . .	56
3.E	Intérêt . . . . .	56
3.F	Exemples de problèmes simples à potentiel de vitesse . . . . .	57
3.G	Écoulement potentiel plus complexe . . . . .	60
3.H	Écoulement autour d'un cylindre . . . . .	61
3.I	Écoulement autour d'un obstacle quelconque . . . . .	67
3.J	Profil de Joukovsky . . . . .	67
4	Théorème de la variation transversale . . . . .	<b>68</b>
5	Généralisation des équations de la dynamique avec d'autres forces volumiques	<b>69</b>
5.A	Référentiel non-inertiel . . . . .	70
5.B	Référentiel inertiel . . . . .	71
5.C	Point de vue de Lagrange . . . . .	72
5.D	Constante d'intégration : conservation du volume . . . . .	72

---

## 1 Introduction

Si la relation de Bernoulli permet de résoudre sommairement des problèmes simples, elle reste difficilement applicable pour résoudre en détail un problème quelconque plus complexe. Par exemple, pour un écoulement rotationnel, si on sait que la relation de Bernoulli reste applicable sur une ligne de courant... reste à identifier cette ligne de courant ! Pour un écoulement irrotationnel, il peut être excessivement fastidieux de déterminer le champ de vitesse et de pression en tout point à partir de l'équation de Bernoulli, celle-ci donnant la relation entre les deux, mais pas comment déterminer l'un ou l'autre auparavant.

On doit donc résoudre l'équation de la dynamique des fluides parfaits :

$$-\vec{grad} p + \vec{f}_V = \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) + (\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) \quad (\text{V.1})$$

En partant généralement de rien d'autre que de conditions aux limites (on connaît la pression et/ou la vitesse locale(s)).

Néanmoins, pour s'aider dans la résolution de cette équation, on peut s'appuyer sur d'autres relations : l'équation de continuité et l'équation de Laplace.

## 2 Principe de conservation de la masse : équation de continuité

Considérons un volume  $dV$  dans lequel rentre et sort une certaine quantité de fluide. S'il sort plus de fluide qu'il n'en rentre, le fluide, au sein de  $dV$  se détend (il est de moins en moins dense). S'il rentre plus de fluide qu'il n'en sort, le fluide se comprime (il est de plus en plus dense). Dans un cas comme dans l'autre, le fluide ne peut se comprimer/se détendre indéfiniment (sa masse volumique ne peut tendre vers l'infini ou vers zero). Si on considère un fluide incompressible, il est impossible qu'il se comprime ou qu'il se détende, il rentre donc autant de fluide qu'il n'en sort de  $dV$ . Mettons cela en équation.

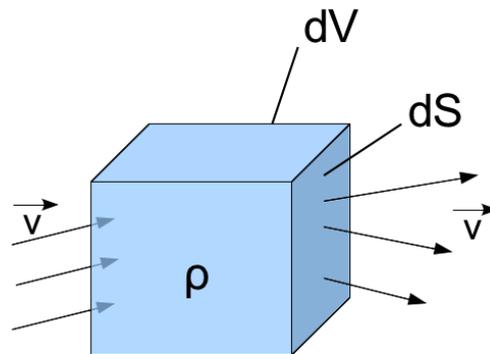


FIGURE V.1 — Conservation de la masse

Considérons un écoulement décrit par un champ de vitesse  $\vec{v}(x, y, z, t)$  et une masse volumique  $\rho(x, y, z, t)$ . Isolons un volume  $V$  quelconque de cet écoulement, fermé par une surface  $S$ . Comment évolue la masse contenue dans le volume  $V$  entre  $t$  et  $t + dt$  ?

### 2.A Première manière

Soit le débit sortant (d'où le signe  $-$ ) du volume  $dV$  :

$$q_m = -\frac{dm}{dt} \quad (\text{V.2})$$

D'où la variation de masse durant l'intervalle  $dt$  :

$$dm = -q_m dt = -\int_S \rho(x, y, z, t) \vec{v}(x, y, z, t) \cdot \vec{n} dS dt \quad (\text{V.3})$$

Remarque : Pourquoi "-" ?

Si  $\vec{v}(x, y, z, t) \cdot \vec{n} > 0$  en tout point ( $\vec{v}$  est colinéaire et dans le même sens que  $\vec{n}$ ) alors  $dm < 0$  : le volume  $dV$  perd de la masse.

On utilise G-O :

$$dm = -q_m dt = -\int_S \rho(x, y, z, t) \vec{v}(x, y, z, t) \cdot \vec{n} dS dt = -\int_V \text{div}(\rho \vec{v}) dV dt \quad (\text{V.4})$$

## 2.B Deuxième manière

La variation de la masse contenue dans  $V$  est donnée par la variation de la masse volumique du volume  $dV$ .  $dm$  est donné par la différence de masse volumique entre  $t$  et  $t + dt$  :

$$dm = \int_V [\rho(t + dt) - \rho(t)] dV \quad (\text{V.5})$$

Or :

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = \frac{\rho(t + dt) - \rho(t)}{dt} \quad (\text{V.6})$$

Donc :

$$dm = \int_V \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} dV dt \quad (\text{V.7})$$

## 2.C Bilan :

En combinant les équations V.4 et V.7, on obtient :

$$dm = -\int_V \text{div}(\rho \vec{v}) dV dt = \int_V \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} dV dt \quad (\text{V.8})$$

### Equation de continuité

Donc :

$$\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{V.9})$$

Cette équation est l'équation locale de continuité. On a déjà vu que l'opérateur  $\text{div}$  fait le bilan des entrées-sorties de fluide dans  $dV$ , si ce terme vient à être non-nul, il rentre plus de fluide qu'il en sort ou inversement. Dans ce cas, le terme de droite ( $\frac{\partial \rho(t)}{\partial t}$ ) contient l'évolution de la masse volumique de fluide dans  $dV$  du fait des différences d'entrées-sorties. Tout champ de vitesse postulé en mécanique des fluides doit valider l'hypothèse de continuité. Avant tout autre calcul, vous devez vérifier que l'équation de continuité est respectée.

Remarque : en mécanique des milieux continus, on appelle équation locale une équation qui se vérifie en tout point d'un volume considéré  $V$ . Une équation globale est une équation qui ne serait vérifiée que, ou au moins sur l'ensemble du volume  $V$ . On aurait, ici, par exemple, comme équation globale :

$$\int_V \left( \operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} \right) dV = 0 \quad (\text{V.10})$$

Il est facilement compréhensible que cette équation globale puisse se transformer en équation locale : cette dernière équation doit être vraie quelque soit le volume  $V$  considéré, donc même si  $V \rightarrow dV$ .

## 2.D Cas particulier

### 2.D.1 Écoulement stationnaire

On appelle "écoulement stationnaire" un écoulement où aucune des variables/propriétés n'est dépendante du temps. Dans ce cas :

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{V.11})$$

Et donc :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{V.12})$$

### 2.D.2 Écoulement incompressible

Si on fait l'hypothèse que l'écoulement est incompressible, la masse volumique ne dépend ni du temps ni de la position (de manière générale, le fluide étant incompressible, rien ne peut affecter sa masse volumique, qui est donc une constante) :  $\rho(x, y, z, t) = \rho$

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{V.13})$$

Donc :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \quad (\text{V.14})$$



### Equation de continuité d'un fluide incompressible

Pour un fluide incompressible, l'équation de continuité devient :

$$\operatorname{div}(\vec{v}(x, y, z)) = 0 \quad (\text{V.15})$$

## 2.E Exemple

En règle général, les écoulements que l'on va traiter sembleront "d'évidence" respecter l'équation de continuité : il ne sera pas nécessaire de résoudre l'équation pour vérifier qu'elle est respectée.

On considère l'écoulement suivant :  $\vec{v} = a x \vec{e}_x$ , valable entre  $x = 0$  et  $x = 1$ , inclus.

On voit tout de suite le problème de cette écoulement : si  $a > 0$ , en  $x = 0$  l'écoulement va moins vite ( $v_x = 0$ !) qu'en  $x > 0$  (en  $x = 1$  il vaut  $v_x = a$ ). Il n'y a pas de matière à rentrer en

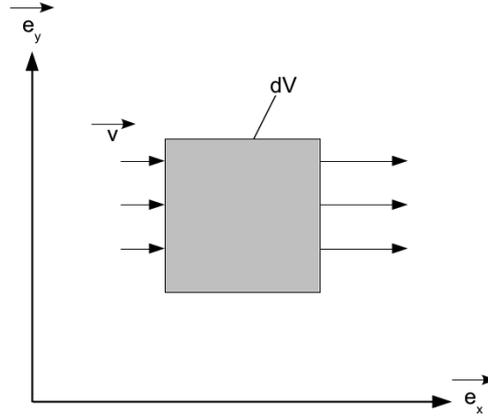


FIGURE V.2 — Conservation de la masse : exemple

$x = 0$ , alors qu'il en sort en  $x = 1$ . Cet écoulement n'est pas durable (il s'arrêtera quand il n'y aura plus de matière entre  $x = 0$  et  $x = 1$ ). Regardons ce que cela donne en équations.

Pour un écoulement incompressible on a :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \quad (\text{V.16})$$

Or :

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x(x)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v_z(x, y, z)}{\partial z} = a \neq 0 \quad (\text{V.17})$$

Cet écoulement est impossible pour un fluide incompressible.

Pour un écoulement stationnaire, on a :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{V.18})$$

$$\operatorname{div}(\rho(x)\vec{v}) = \frac{\partial \rho(x) v_x(x)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(x) v_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \rho(x) v_z(x, y, z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{V.19})$$

Qui se réduit à :

$$\operatorname{div}(\rho(x)\vec{v}) = a x \frac{\partial \rho(x)}{\partial x} + \rho(x) \frac{\partial a x}{\partial x} = a x \frac{\partial \rho(x)}{\partial x} + a \rho(x) = 0 \quad (\text{V.20})$$

Cette équation a pour solution :

$$\rho(x) = \frac{Cste}{x} \quad (\text{V.21})$$

Le champ de vitesse n'existe en  $x = 0$  que si la masse volumique  $\rho$  est infinie. Cet écoulement ne peut pas être stationnaire.

### 3 Écoulement à potentiel de vitesse

#### 3.A Préambule

Nous allons nous intéresser aux écoulements dits "à potentiel de vitesse". La théorie des écoulements à potentiel de vitesse a été développée en particulier (ce n'est pas sa seule applica-

tion) pour analyser l'écoulement autour d'un obstacle, sans surface libre<sup>1</sup>. Cette théorie permet d'évaluer les forces aéro/hydrodynamiques générées sur l'obstacle... dans certaines mesures.

Dans le cas des fluides incompressibles, l'équation de continuité donne :

$$\operatorname{div}(\vec{v}(x, y, z)) = 0 \quad (\text{V.22})$$

Si on cherche un écoulement irrotationnel, alors on doit vérifier :

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \vec{0} \quad (\text{V.23})$$

### 3.B Écoulement irrotationnel et couche limite

Il peut sembler assez "magique" de faire apparaître ici comme postulat un écoulement irrotationnel (qu'est-ce qu'on en sait s'il est rotationnel ou non ???).

Nous nous intéressons ici à l'écoulement autour d'un obstacle d'un fluide. Pour un fluide réel, nous le verrons, le fluide adhère aux parois de l'obstacle (donc a une vitesse nulle à la paroi -"adhésion" ou "non-glissement"). Cette adhésion produit un fort gradient de vitesse et un écoulement localement rotationnel, sur une certaine épaisseur autour de la paroi appelée "couche limite" (voir Figure V.3). En effet, supposons un écoulement dans la direction de  $\vec{e}_x$  dépendant de  $y$  (un gradient de vitesse depuis une surface de normale  $\vec{e}_y$ ) :

$$\vec{v} = v_x(y) \vec{e}_x \quad (\text{V.24})$$

Alors :

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad (\text{V.25})$$

Au delà de cette couche, le gradient de vitesse devenant bien plus faible, on peut considérer<sup>2</sup> l'écoulement comme irrotationnel. L'épaisseur de la couche limite peut être estimée à partir du nombre de Reynolds que nous verrons par la suite<sup>3</sup>.

En arrière de l'obstacle, il se forme un "sillage", une zone d'écoulement rotationnel plus ou moins longue, rapidement l'objet de turbulence. Schématiquement, ce sillage est dû au fait que le fluide passant autour de l'obstacle a tendance, de part son inertie à poursuivre son chemin "tout droit" sans suivre le contour arrière de l'obstacle (d'y rester "coller" : on appelle alors le phénomène un "décollement" du fluide). Ce faisant, il laisse une zone de dépression derrière l'obstacle "qui attire" le fluide, et peut générer des tourbillons. Nous verrons ce phénomène de sillage en détail lors des travaux pratiques.

Si on néglige la couche limite ainsi que le sillage (ce qui revient à négliger la viscosité), on ne traite plus qu'un écoulement irrotationnel. Cette approche permet de déterminer le champ de vitesse au-delà de ces domaines négligés, mais néglige aussi les forces produites dans ces domaines (en particulier les forces de frottement). C'est cette approche que nous allons étudier.

1. On considère le fluide comme un milieu infini, dans la mesure où les dimensions qui le caractérisent sont nettement plus grandes que celles de l'obstacle.

2. C'est l'expérience qui l'a montré.

3. La modélisation des phénomènes de couches limites est encore aujourd'hui l'objet de recherche intensive : vous comprendrez avec les TDs rapidement pourquoi -paradoxe d'Alembert-

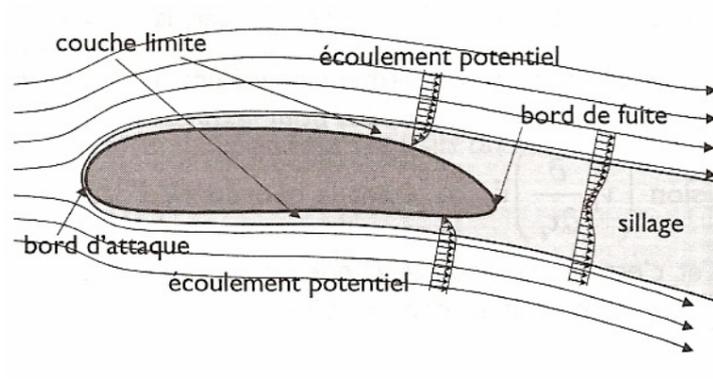


FIGURE V.3 — Écoulement laminaire autour d'un obstacle : couche limite et sillage

### 3.C Solution

Si on cherche un écoulement irrotationnel, on peut remarquer la propriété suivante : quelque soit la fonction scalaire  $\varphi$ ,  $\text{rot}(\text{grad } \varphi(x, y, z)) = \vec{0}$

En effet :

$$\text{rot}(\vec{g}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} \\ \frac{\partial g_x}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial x} \\ \frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{V.26})$$

Donc si  $\vec{g} = \text{grad } \varphi(x, y, z)$  :

$$\text{rot}(\text{grad } \varphi(x, y, z)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial^2 x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (\text{V.27})$$

Donc, quelque soit le champ de vitesse, si :

$$\vec{v}(x, y, z) = \text{grad } \varphi(x, y, z) \quad (\text{V.28})$$

Alors :

$$\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0} \quad (\text{V.29})$$

### Potentiel de vitesse, écoulement irrotationnel

S'il existe un champ de vitesse tel que  $\vec{v}(x, y, z) = \vec{grad} \varphi(x, y, z)$ , alors l'écoulement est irrotationnel.  $\varphi$  est appelé le "potentiel" de vitesse, et l'écoulement est alors dit "à potentiel de vitesse", ou par raccourci, "écoulement potentiel". Le terme "potentiel" vient du fait que le champ de vitesse dérive de  $\varphi$ , tout comme le poids dérive de l'énergie potentielle de pesanteur.

Réciproquement, si le champ de vitesse est irrotationnel, il dérive d'un potentiel.

### 3.D Potentiel de vitesse

Pour un écoulement à potentiel de vitesse, pour un fluide incompressible, l'équation de continuité :

$$\text{div}(\vec{v}(x, y, z)) = 0 \quad (\text{V.30})$$

Devient :

$$\text{div}(\vec{grad} \varphi(x, y, z)) = 0 \quad (\text{V.31})$$

Ce qui par définition est le laplacien du potentiel de vitesse. Donc

$$\Delta\varphi(x, y, z) = \frac{\partial^2\varphi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi(x, y, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{V.32})$$

### 3.E Intérêt

L'équation de la dynamique des fluides parfaits s'écrit :

$$-\vec{grad}(p) + \rho \vec{g} = \rho \vec{\Gamma} = \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) + (\text{rot } \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) \quad (\text{V.33})$$

Cette équation n'est pas toujours simple à résoudre, essentiellement parce qu'elle pose deux champs inconnus (hors conditions aux limites) : la pression et la vitesse.

### Equation de Laplace

Pour un fluide parfait incompressible, en postulant "simplement" que l'écoulement est irrotationnel, le champ de vitesse peut se déduire de la résolution de l'équation (dites "équation de Laplace") :

$$\Delta\varphi(x, y, z) = 0 \quad (\text{V.34})$$

en prenant en compte les conditions aux limites. Le champ de vitesse déduit, on peut par l'équation de la dynamique des fluides parfaits <sup>a</sup> déduire le champ de pression.

<sup>a</sup>. Ou autrement... La surprise en TD.

### 3.F Exemples de problèmes simples à potentiel de vitesse

#### 3.F.1 Écoulement droit

On peut partir du problème le plus simple possible, celui d'un problème stationnaire (indépendance en temps) 1D, où le problème ne dépend ni de  $y$ , ni de  $z$ , mais que de  $x$  :

$$\Delta\varphi(x, y, z) = \Delta\varphi(x) = 0 = \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2} \quad (\text{V.35})$$

Soit :

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} = A \quad (\text{V.36})$$

$$\varphi(x) = A x + B \quad (\text{V.37})$$

Or :

$$\vec{v}(x, y, z) = \vec{\text{grad}} \varphi(x) = A \vec{e}_x \quad (\text{V.38})$$

On voit que, si  $A > 0$  le champ de vitesse "pointe" vers  $\vec{e}_x$ , donc va des "petits" vers les "grands" potentiels.

#### 3.F.2 Écoulement avec puits ou source

Les deux exemples qui suivent sont des exemples simples (avant de passer aux choses sérieuses) de résolution d'un champ de vitesse à partir d'un potentiel. Ils sont simples car on impose des composantes nulles au champ de vitesse.

On parle d'écoulement avec puits ou source lorsque l'écoulement converge ou diverge à partir d'un point ou d'un domaine (le puits ou la source), ce qui pour un fluide incompressible signifie que le champ de vitesse diverge aux coordonnées du puits ou de la source (et uniquement en ce point ou ce domaine) :

$$\text{div}(\vec{v}) \neq 0 \quad (\text{V.39})$$

On rappelle que  $\text{div}(\vec{v}) = 0$  traduit littéralement le fait qu'au point où est calculé le divergent il ne peut rentrer plus de fluide qu'il n'en sort (et réciproquement). Pour un écoulement avec puits ou source  $\text{div}(\vec{v}) \neq 0$  traduit le fait qu'un puits absorbe du fluide ou une source en fournit ce qui explique le "déséquilibre" des flux entrants/sortants, mais qu'on n'a pas "envie" de modéliser où/comment le fluide apparaît ou disparaît dans ce puits/cette source.

Ce qu'on traduit éventuellement comme :

$$\text{div}(\vec{v}) = q \quad (\text{V.40})$$

Aux coordonnées du puits ( $q < 0$ ) ou de la source ( $q > 0$ ).

On cherche ici un champ de vitesse irrotationnel stationnaire en 2D pouvant avoir la forme :

$$\vec{v}(r) = v_r(r) \vec{e}_r \quad (\text{V.41})$$

Ce champ ne dépend pas de  $\theta$ , ce qui implique une symétrie de révolution autour de  $\vec{e}_z$  et ne dépend pas de  $z$  car est 2D. Le puits ou la source se situe en  $r = 0$ . S'il est irrotationnel, il dérive d'un potentiel :



FIGURE V.4 — Exemple d'écoulement pouvant être traité comme un écoulement avec un puits (loin du trou). Lac Covão dos Conchos au Portugal.

$$\vec{v}(r) = \vec{\text{grad}} \varphi(r, \theta, z) \quad (\text{V.42})$$

soit :

$$\begin{pmatrix} v_r(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi(r, \theta, z)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(r, \theta, z)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi(r, \theta, z)}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{V.43})$$

Donc,  $\varphi$  ne dépend ni de  $\theta$  ni de  $z$ . Il nous reste à résoudre :

$$\Delta \varphi(r) = 0 = \text{div}(\vec{\text{grad}} \varphi(r)) = 0 \quad (\text{V.44})$$

soit :

$$\text{div}(\vec{v}(r)) = 0 \quad (\text{V.45})$$

D'où le fait que je disais que c'était un problème simple, puisqu'on n'a pas vraiment à passer par le potentiel et l'équation de Laplace, on aurait pu écrire cette équation directement. Elle donne :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (\text{V.46})$$

Dont la solution est :

$$v_r(r) = \frac{C}{r} \quad (\text{V.47})$$

$C > 0$ , si c'est une source,  $C < 0$  si c'est un puits. On remarque que le champ de vitesse est indéfini en  $r = 0$ , ce qui est normal car  $\text{div}(\vec{v}(r)) = 0$  n'est pas vérifié en  $r = 0$ <sup>4</sup>. On peut calculer alors le potentiel pour le plaisir :

$$\frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} = \frac{C}{r} \quad (\text{V.48})$$

4.  $r = 0$  n'appartient pas au domaine de fluide qu'on traite.

soit :

$$\varphi(r) = C \ln r + B = C \ln r \quad (\text{V.49})$$

La constante  $B^5$  n'a aucun intérêt dans la résolution du problème, autant la poser comme nulle.  $C$  est généralement appelé "intensité de puits/source".

Avoir une source/un puits ponctuel(le) peut paraître déroutant, donc considérons désormais que le puits ou la source se situe en  $r < R$ . Auquel cas  $\text{div}(\vec{v}(r)) = 0$  s'applique toujours mais en  $r \geq R$  uniquement, donc :

$$v_r(r) = \frac{C}{r} \text{ si } r \geq R, \text{ indéfini sinon} \quad (\text{V.50})$$

Le flux de  $\vec{v}$  à travers la surface  $S$  en  $r = R$ , de normal  $\vec{e}_r$  (le flux qui "sort" de la zone  $r < R$ ) vaut (en 2D) :

$$\int_S \vec{v}(r=R) \cdot \vec{e}_r \, dS = \int_0^{2\pi} \frac{C}{R} R \, d\theta = \int_0^{2\pi} C \, d\theta = 2\pi C \quad (\text{V.51})$$

C'est le flux produit par la source ( $C > 0$ ) ou prélevé par le puits ( $C < 0$ ). On remarque immédiatement qu'on peut se placer en n'importe quelle surface en  $r > R$ , le flux sera toujours  $2\pi C$  : sur n'importe quelle surface loin de la source/du puits sort/rentre autant de fluide que la source/le puits n'en produit/absorbe à chaque instant (on respecte l'équation de continuité). On écrit plus souvent :

$$v_r(r) = \frac{C'}{2\pi r} \text{ si } r \geq R, \text{ indéfini sinon} \quad (\text{V.52})$$

où  $C'$  est donc le flux du puits/de la source.

### 3.F.3 Vortex irrotationnel

Plus complexe à conceptualiser maintenant, on cherche s'il existe un écoulement à potentiel de vitesse purement orthoradial (donc qui tourne autour de  $r = 0$ ) et indépendant de  $z$ ... donc, en résumé, un champ de vitesse qui tourne autour de l'axe  $\vec{e}_z$ , tout en étant irrotationnel.

On part donc de :

$$\vec{v}(r) = v_\theta(r) \vec{e}_\theta \quad (\text{V.53})$$

soit :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_\theta(r) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi(r, \theta, z)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(r, \theta, z)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi(r, \theta, z)}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{V.54})$$

Donc  $\varphi$  ne dépend ni de  $r$  ni de  $z$  :

$$v_\theta(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta} \quad (\text{V.55})$$

---

5. On peut considérer  $\varphi$  comme un "objet de calcul", et comme seule la vitesse nous intéresse, et qu'elle dérive du potentiel, cette constante ne nous sert à rien.

Or,  $v_\theta(r)$  ne dépendant pas de  $\theta$ ,  $\frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta}$  ne dépend pas de  $\theta$ , donc est une constante. Soit :

$$v_\theta(r) = \frac{C}{r} \quad (\text{V.56})$$

On doit vérifier (pour le plaisir) :

$$\Delta \varphi(\theta) = \text{div}(\vec{\text{grad}} \varphi(\theta)) = 0 = \text{div}(\vec{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta(r)}{\partial \theta} \quad (\text{V.57})$$

Ce qui est effectivement juste. Le champ de vitesse est donc à nouveau de la forme  $\frac{C}{r}$  (mais orthoradial) donc indéfini en  $r = 0$ ... On verra pourquoi en TD!

Pour le plaisir, on peut calculer le potentiel associé :

$$v_\theta(r) = \frac{C}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta} \quad (\text{V.58})$$

$$\varphi(\theta) = C \theta \quad (\text{V.59})$$

A une constante éventuelle près. Notons quand même qu'il existe bien un potentiel de vitesse donnant un champ de vitesse purement orthoradial mais, par définition, irrotationnel.

#### 3.F.4 Equipotentielle

On ne cherchera pas à le démontrer ici <sup>6</sup>, mais on constate avec ces exemples que le vecteur vitesse, en tout point, est orthogonal aux équipotentielles (courbe définie par  $\varphi = \text{cste}$ ).

### 3.G Écoulement potentiel plus complexe

Les écoulements de type "puits" ou "source" peuvent paraître d'usage (très) limité. En réalité, ceux-ci peuvent être utilisés comme des "briques" pour "construire" des écoulements plus complexes.



#### Superpositions d'écoulements

Soit  $n$  écoulements irrotationnels de fluides incompressibles, définis chacun par son potentiel  $\varphi_i$ . Chacun de ces écoulements vérifie :

$$\Delta \varphi_i = 0 \quad (\text{V.60})$$

Alors, de par les propriétés du laplacien <sup>a</sup>, si on définit un écoulement de potentiel  $\varphi$  tel que :

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \quad (\text{V.61})$$

alors cet écoulement est aussi irrotationnel :

$$\Delta \varphi = 0 \quad (\text{V.62})$$

<sup>a</sup>. Ce n'est qu'une somme de dérivés.

6. Ce n'est pas très dur à démontrer.

De ce fait, on peut "construire" un écoulement irrotationnel en sommant des écoulements de type puits et sources. Voici un exemple. Sur la Figure V.5 est représenté un écoulement irrotationnel construit à partir de la somme de deux potentiels, celui d'une source et celui d'un puits, de flux opposés. On le devine sur la Figure, le champ de vitesse montre qu'il n'y a qu'un simple échange de fluide depuis la source vers le puits (même si cela implique un long détour).

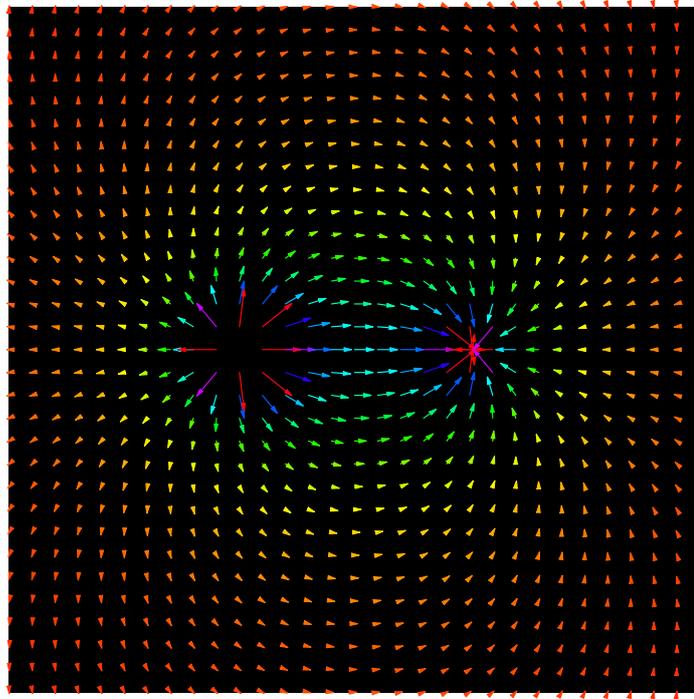


FIGURE V.5 — Champ de vitesse d'un écoulement avec source (à gauche) et puits (à droite).

On superpose maintenant à ce potentiel du couple puits/source le potentiel d'un écoulement uniforme, qui va de la gauche vers la droite. Le champ de vitesse correspondant est tracé sur la Figure V.6. Le puits et la source s'échangent toujours un flux de fluide, mais on devine que le fluide venant de la gauche contourne cette zone d'échange. Ceci est encore plus visible si on masque cette zone d'échange, ce qui est illustré par la Figure V.7 (c'est ce qu'on appelle "l'ovale de Rankine").

Avec ce simple jeu de 3 potentiels, on a pu construire un écoulement irrotationnel qui correspond à un fluide qui contourne un obstacle (ici un ovale).

### 3.H Écoulement autour d'un cylindre

La résolution du problème de l'écoulement autour d'un cylindre est la base des calculs d'aérodynamiques avant l'avènement du numérique. On se propose de résoudre le problème de l'écoulement d'un fluide autour d'un cylindre de rayon  $R$  (voir Figure V.8), avec un fluide ayant une vitesse infiniment loin du cylindre  $\vec{v} = v_\infty \vec{e}_x$  (ce qui revient aussi à considérer le fluide comme immobile loin du cylindre qui se déplace, lui, à une vitesse  $\vec{v} = -v_\infty \vec{e}_x$ ). Comme illustré sur la Figure V.8, le problème est symétrique par rapport au plan horizontale, et on le considère comme indépendant de  $z$ .

On cherche un écoulement irrotationnel de fluide parfait incompressible. De ce fait, on cherche un potentiel de la forme :  $\varphi(r, \theta)$ , répondant à l'équation :

$$\Delta\varphi(r, \theta) = 0 \tag{V.63}$$

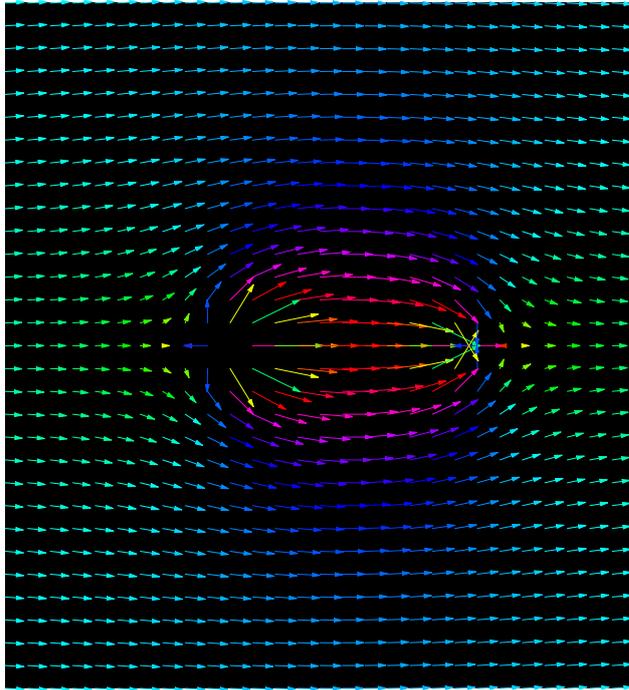


FIGURE V.6 — *Champ de vitesse d'un écoulement avec source (à gauche) et puits (à droite), auquel on superpose un écoulement uniforme (de gauche à droite)*

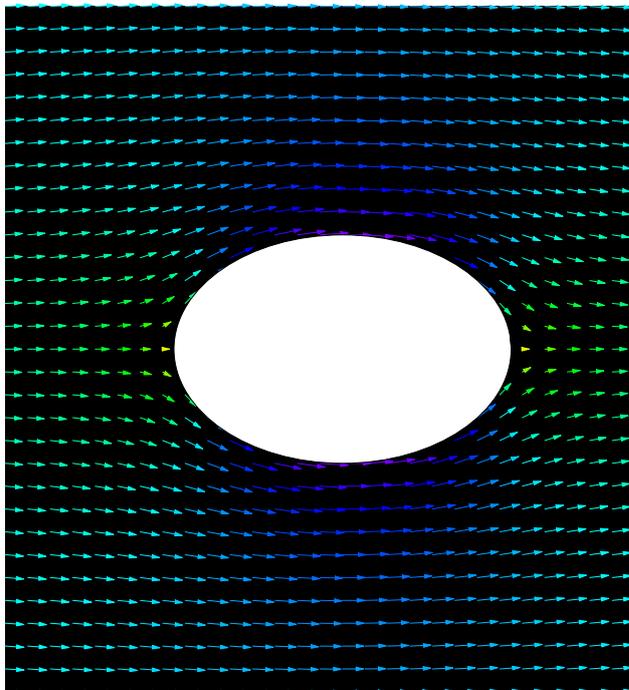
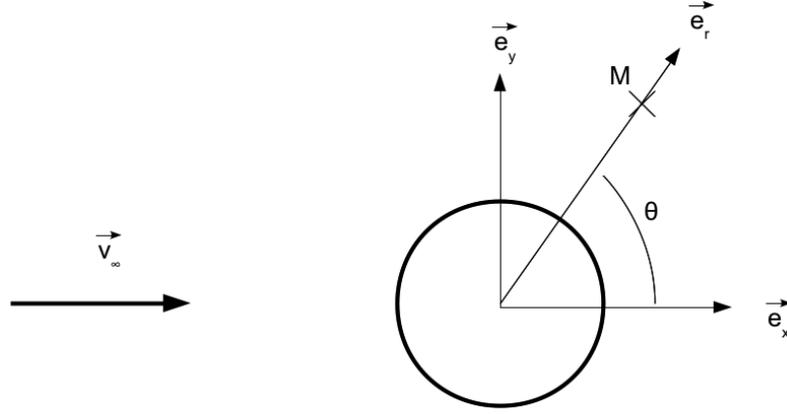


FIGURE V.7 — *Champ de vitesse d'un écoulement avec source (à gauche) et puits (à droite), auquel on superpose un écoulement uniforme (de gauche à droite), mais pour lequel le puits et la source sont masqués*

FIGURE V.8 — Écoulement autour du cylindre de rayon  $R$ .

La solution générale de cette équation<sup>7</sup> est :

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) = & (C_0 + D_0 \times \theta)(A'_0 \ln r + B'_0) \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i r^i + B_i r^{-i}) \cos(i\theta) \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} (C_i r^i + D_i r^{-i}) \sin(i\theta) \end{aligned} \quad (\text{V.64})$$

### 3.H.1 Condition de symétrie

Du fait de la symétrie du problème, on pourra noter que à  $r$  donné :

$$\varphi(r, \theta) = \varphi(r, -\theta) \quad (\text{V.65})$$

Ce qui permet d'éliminer le terme  $D_0$ <sup>8</sup>, et de ré-écrire la solution sous la forme :

$$\varphi(r, \theta) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i r^i + B_i r^{-i}) \cos(i\theta) + \sum_{i=1}^{\infty} (C_i r^i + D_i r^{-i}) \sin(i\theta) \quad (\text{V.66})$$

Comme  $\cos(i\theta) = \cos(-i\theta)$  et que  $A_0 \ln r + B_0$  est indépendant de  $\theta$ , l'égalité  $\varphi(r, \theta) = \varphi(r, -\theta)$  revient à :

$$\sum_{i=1}^{\infty} (C_i r^i + D_i r^{-i}) \sin(i\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} (C_i r^i + D_i r^{-i}) \sin(-i\theta) \quad (\text{V.67})$$

Or :  $\sin(-i\theta) = -\sin(i\theta)$ .

$$\sum_{i=1}^{\infty} (C_i r^i + D_i r^{-i}) \sin(i\theta) = -\sum_{i=1}^{\infty} (C_i r^i + D_i r^{-i}) \sin(i\theta) \quad (\text{V.68})$$

Devant être vérifié pour tout  $r$  et tout  $\theta$  :  $C_i = D_i = 0, \forall i$ .

7. On l'obtient par la méthode de séparation de variable, comme illustré là (attention, il y a une faute de frappe dans la solution proposée dans ce lien, le "×" est un "+" dans l'équation (2)).

8. On l'a vu en étudiant le vortex :  $D_0 \times \theta$  est le potentiel de vortex, qui n'a pas la symétrie voulue.

### 3.H.2 Condition aux limites à l'infini

On sait que  $r \rightarrow +\infty$  le champ de vitesse est  $\vec{v} = v_\infty \vec{e}_x$ , soit, en  $r \rightarrow +\infty$  :

$$\vec{v} = v_\infty \vec{e}_x = \text{grad}(v_\infty x + K) \quad (\text{V.69})$$

$K$  une constante. Soit, en coordonnée cylindrique :

$$\vec{v} = \text{grad}(v_\infty r \cos\theta + K) \quad (\text{V.70})$$

En effet :

$$\text{grad}(v_\infty r \cos\theta + K) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(v_\infty r \cos\theta + K)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(v_\infty r \cos\theta + K)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial(v_\infty r \cos\theta + K)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_\infty \cos\theta \\ -v_\infty \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = v_\infty \vec{e}_x \quad (\text{V.71})$$

Le potentiel a la forme :

$$\varphi(r, \theta) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i r^i + B_i r^{-i}) \cos(i\theta) \quad (\text{V.72})$$

Mais doit tendre en  $r \rightarrow +\infty$  vers :

$$\varphi(r, \theta) = v_\infty r \cos\theta + K \quad (\text{V.73})$$

On peut déjà noter que les 2 constantes  $K$  et  $B_0$  sont inutiles à notre problème  $K = B_0 = 0$ . On a également  $A_0 = 0$ , et tous les termes  $A_i$  nuls, sauf pour  $i = 1$  pour pouvoir obtenir la forme linéaire en  $r$  du potentiel à l'infini. Ceci impose également  $A_1 = v_\infty$ . Donc :

$$\varphi(r, \theta) = \left( v_\infty r + \frac{B_1}{r} \right) \cos(\theta) + \sum_{i=2}^{\infty} B_i r^{-i} \cos(i\theta) \quad (\text{V.74})$$

### 3.H.3 Condition aux limites à la paroi

La dernière condition aux limites est que les vecteurs vitesse sont tangents au contour du cylindre en  $r = R$ <sup>9</sup>, ce qui se traduit par le fait que  $v_r$  est nulle en  $r = R$ , quel que soit  $\theta$ . Donc :

$$v_r(r = R, \theta) = 0 \quad (\text{V.75})$$

Or :

$$v_r(r = R, \theta) = \left. \frac{\partial \varphi(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (\text{V.76})$$

Donc :

$$\left. \frac{\partial \varphi(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=R} = \left( v_\infty - \frac{B_1}{R^2} \right) \cos(\theta) + \sum_{i=2}^{\infty} (-i B_i R^{-(1+i)}) \cos(i\theta) = 0 \quad (\text{V.77})$$

9. Le fluide ne peut pas traverser la paroi du cylindre, ce qui est logique... mais ni s'en éloigner radialement, ce qui n'est pas forcément trivial.

Qui impose  $B_i = 0, \forall i > 1$  (pour que cette équation soit vraie en tout  $\theta$ ), et  $B_1 = v_\infty R^2$ .  
Donc, finalement :

$$\varphi(r, \theta) = \left( v_\infty r + \frac{v_\infty R^2}{r} \right) \cos(\theta) = v_\infty \left( r + \frac{R^2}{r} \right) \cos(\theta) \quad (\text{V.78})$$

Ce potentiel est représenté sur la Figure V.9.

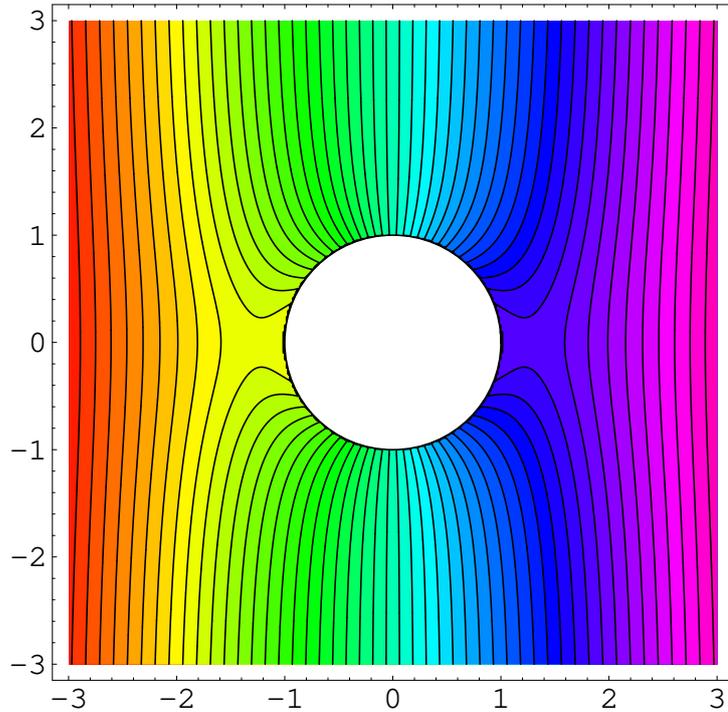


FIGURE V.9 — Potentiel de l'écoulement d'un fluide parfait autour d'un cylindre. Les courbes noires sont les équipotentiels (les vecteurs vitesse sont orthogonaux à ces courbes). Le rouge indique les faibles potentiels, les roses les forts. Le champ de vitesse va des faibles vers les forts potentiels. Les axes indiquent la position relative par rapport au rayon.

#### 3.H.4 Champ de vitesse final

Du potentiel, on peut déduire le champ de vitesse :

$$\vec{v}(r, \theta) = \vec{grad}(\varphi(r, \theta)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi(r, \theta)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(r, \theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi(r, \theta)}{\partial z} \end{pmatrix} = v_\infty \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos(\theta) \\ -\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.79})$$

Etant donné que :

$$\vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y \quad (\text{V.80})$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y \quad (\text{V.81})$$

On a :

$$\begin{aligned} \vec{v}(r, \theta) = & v_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos(\theta) [\cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y] \\ & - v_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin(\theta) [-\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y] \end{aligned} \quad (\text{V.82})$$

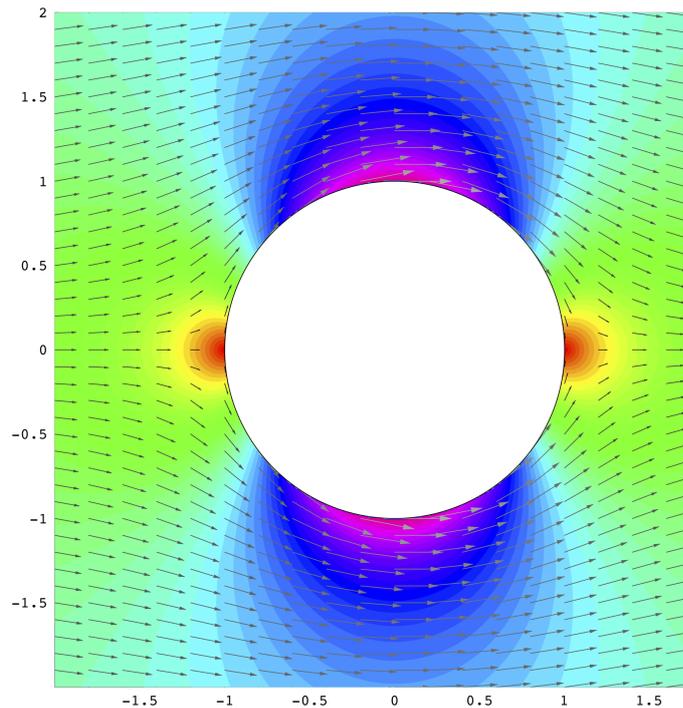


FIGURE V.10 — Champ de vitesse autour d'un cylindre. Les couleurs indiquent la norme des vecteurs vitesse du rouge (norme nulle) au rose (norme maximale). Les axes indiquent la position normalisée par le rayon  $R$ .



### Champ de vitesse autour d'un cylindre en écoulement potentiel

Après d'habiles manipulations de nos formules trigonométriques préférées, on peut réussir à obtenir :

$$\vec{v}(r, \theta) = v_\infty \left(1 - \cos(2\theta) \left(\frac{R}{r}\right)^2\right) \vec{e}_x - v_\infty \left(\sin(2\theta) \left(\frac{R}{r}\right)^2\right) \vec{e}_y \quad (\text{V.83})$$

Qu'on laissera pour le moment sous cette forme, qui permet de bien "visualiser" le champ de vitesse en  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi/2$  et  $\theta = \pi$ . Ce champ de vitesse est représenté sur la Figure V.10.

#### 3.H.5 Et ?

A partir de là, on peut déterminer le champ de pression (à partir de l'équation de la dynamique des fluides) et les forces s'exerçant sur le cylindre, mais ce sera pour le TD!

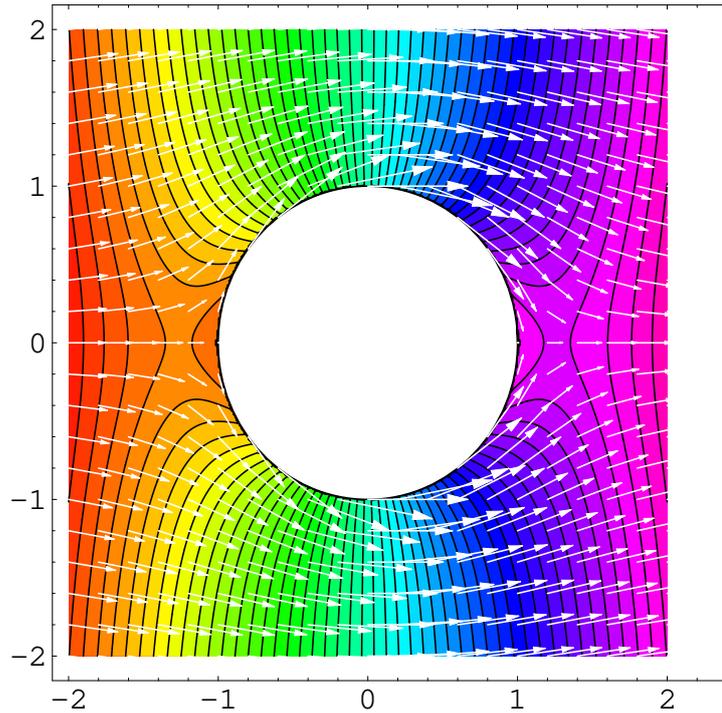


FIGURE V.11 — Superposition du champ de vitesse et des équipotentiels.

### 3.I Écoulement autour d'un obstacle quelconque

Pour un obstacle quelconque, pour un problème à potentiel indépendant de  $z$  (2D), on reste sur la solution générale (en enlevant le terme de vortex) :

$$\varphi(r, \theta) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i r^i + B_i r^{-i}) \cos(i\theta) + \sum_{i=1}^{\infty} (C_i r^i + D_i r^{-i}) \sin(i\theta) \quad (\text{V.84})$$

On conserve notre condition aux limites à l'infini. En  $r \rightarrow +\infty$  :

$$\varphi(r, \theta) = v_{\infty} r \cos \theta + K \quad (\text{V.85})$$

On a donc à nouveau  $A_0 = B_0 = K = 0$ . Pour avoir cette forme linéaire, on doit avoir :

$$\varphi(r, \theta) = \left( A_1 r + \frac{B_1}{r} \right) \cos(\theta) + \left( C_1 r + \frac{D_1}{r} \right) \sin(\theta) + \sum_{i=2}^{\infty} B_i r^{-i} \cos(i\theta) + \sum_{i=2}^{\infty} D_i r^{-i} \sin(i\theta) \quad (\text{V.86})$$

En revanche, pour un profil quelconque, nous n'avons plus nécessairement la symétrie horizontale, ni la possibilité d'écrire de manière simple le fait que le contour soit une ligne de courant (comme  $v_r(r = R) = 0$ ). C'est là toute la complexité de la résolution de ce type de problème.

### 3.J Profil de Joukovsky

On peut se demander l'usage qu'à pu avoir les écoulements à potentiel de vitesse dans la mesure où il semble dur de les extrapoler à une géométrie de profil quelconque. Néanmoins, il existe une transformation, dite "transformation de Joukovsky"<sup>10</sup> qui permet de transformer un cercle en profils d'ailes d'avion particuliers (dit "profils de Joukovsky")<sup>11</sup>. Nous ne nous étendrons pas

10. Nikolai Joukovski, savant soviétique, 1847-1921

11. Vous pouvez déjà voir ici pour en savoir plus, si cela vous intéresse, et ici.

sur cette transformation cette année, mais la transformation qui s'applique au cercle s'applique aussi au champ de vitesse (au potentiel), ce qui permet ainsi de le définir analytiquement et d'établir ainsi le champ de pression puis la portance de l'aile (pas la traînée, comme nous le verrons en TD).

Dans les faits, si le travail de Joukovsky permet de déterminer des profils d'aile théoriques pour obtenir une portance voulue, en pratique l'usage reste limité : l'hypothèse de fluide parfait à écoulement à potentiel de vitesse limite l'usage de cette méthodologie aux faibles vitesses (faible nombre de Reynolds). Après moult recherche, je n'ai pas trouvé d'avion militaire ou civil utilisant un profil d'aile de Joukovski<sup>12</sup>... Mais Nikolaï Joukovski était soviétique, on ne sait sans doute pas tout de son travail.

Le développement des méthodes numériques permettant de prendre en compte les problème de turbulence, et autres problématiques complexes de fluides, a rendu l'usage des écoulements à potentiels de vitesse très restreint.

#### 4 Théorème de la variation transversale

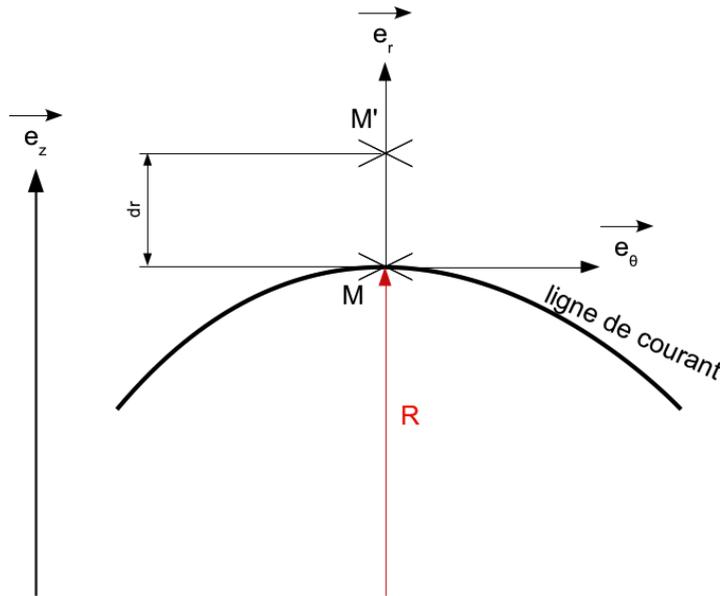


FIGURE V.12 — *Écoulement à courbure locale*

Soit une ligne de courant définie par une courbure locale  $R$ , pour un fluide parfait incompressible. Par définition de la ligne de courant :

$$\vec{v} = v_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta \quad (\text{V.87})$$

On vérifie :

$$\rho \vec{\Gamma} = -\vec{grad}(p^*) \quad (\text{V.88})$$

Et en écoulement permanent :

$$\rho \left( \vec{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) + (\vec{rot} \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) = -\vec{grad}(p^*) \quad (\text{V.89})$$

12. Le profil type le plus répandu est le profil NACA.

On a déjà montré que si  $\vec{v} = r \Omega \vec{e}_\theta = v_\theta(r) \vec{e}_\theta$ , alors :

$$\vec{\Gamma} = -r\Omega^2 \vec{e}_r \quad (\text{V.90})$$

D'où ( $\Omega = v_\theta/r$ ) :

$$\vec{\Gamma} = -\frac{v_\theta^2}{r} \vec{e}_r \quad (\text{V.91})$$

On admet donc ici que :

$$\rho \vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_r = -\rho \frac{v^2}{R} \quad (\text{V.92})$$

D'où :

$$-\vec{grad}(p^*) \cdot \vec{e}_r = -\rho \frac{v^2}{R} \quad (\text{V.93})$$

Et donc :

$$\boxed{\frac{\partial p^*}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{R}} \quad (\text{V.94})$$

Si les lignes de courants sont des droites, et donc que  $R \rightarrow +\infty$ , alors :

$$\boxed{\frac{\partial p^*}{\partial r} = 0} \quad (\text{V.95})$$



### Théorème des variations transversales

Dans les sections droites d'un écoulement droit, la pression motrice est constante. Entre deux points  $A$  et  $B$  d'une même section droite (de normale colinéaire à la vitesse) d'un écoulement droit, d'un fluide parfait incompressible, je peux donc écrire :

$$p_A + \rho g z_A = p_B + \rho g z_B \quad (\text{V.96})$$

Si l'écoulement est droit, il est irrotationnel, donc je peux écrire Bernoulli entre  $A$  et  $B$  :

$$\rho \frac{v_A^2}{2} + p_A + \rho g z_A = \rho \frac{v_B^2}{2} + p_B + \rho g z_B \quad (\text{V.97})$$

Donc :  $v_A = v_B$ .

Pour un fluide parfait, incompressible, si l'écoulement est localement droit, alors la vitesse sur une section droite, de normale  $\vec{n}$  colinéaire à  $\vec{v}$ , est constante. L'écoulement est alors dit "uniforme".

## 5 Généralisation des équations de la dynamique avec d'autres forces volumiques

On considère un récipient cylindrique tournant autour de son axe de révolution et contenant un fluide considéré comme parfait. Théoriquement, le vase, en tournant, ne peut pas entraîner le fluide, puisque s'il est parfait, il n'a pas de viscosité, donc il n'existe pas de force tangentielle pouvant entraîner le fluide. On passera outre ce constat, et on considère le fluide comme entraîné par le cylindre tournant.

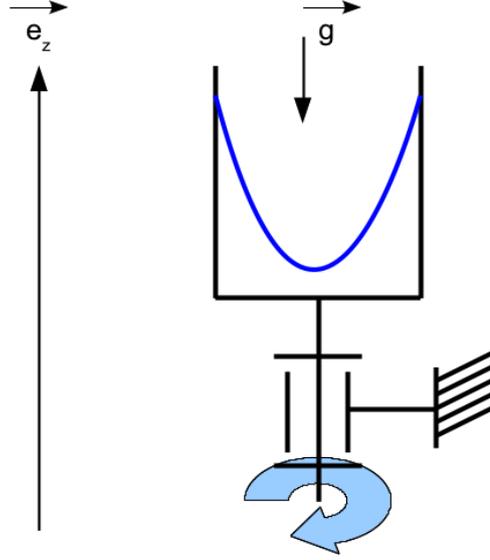


FIGURE V.13 — Vase tournant

### 5.A Référentiel non-inertiel

On se place dans le référentiel non-inertiel du cylindre (non-galiléen), dans lequel le fluide est immobile. On a des forces de surfaces qui s'exercent sur le fluide. Elles sont définies par :

$$\vec{F}_S = \int_V -g \vec{rad}(p) dV \quad (\text{V.98})$$

On a comme forces de volume, le poids du fluide :

$$\vec{P} = \int_V \rho \vec{g} dV \quad (\text{V.99})$$

Mais, comme on considère un référentiel non-inertiel, on a aussi une force volumique qui est la force centrifuge :

$$\vec{F}_c = m r \Omega^2 \vec{e}_r = \int_V \rho r \Omega^2 \vec{e}_r dV \quad (\text{V.100})$$

Et donc, si on applique le PFS :

$$\vec{F}_S + \vec{P} + \vec{F}_c = \vec{0} = \int_V -g \vec{rad}(p) dV + \int_V \rho \vec{g} dV + \int_V \rho r \Omega^2 \vec{e}_r dV \quad (\text{V.101})$$

Et donc, en tout point du fluide, avec  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$

$$-g \vec{rad}(p) - \rho g \vec{e}_z + \rho r \Omega^2 \vec{e}_r = \vec{0} \quad (\text{V.102})$$

Cette équation nous permet de déduire le champ de pression dans le fluide :

$$g \vec{rad}(p) = -\rho g \vec{e}_z + \rho r \Omega^2 \vec{e}_r \quad (\text{V.103})$$

Donc :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \text{ et } \frac{\partial p}{\partial r} = \rho r \Omega^2 \quad (\text{V.104})$$

On en déduit, en intégrant sur  $z$  :

$$p(z, r) = -\rho g z + C(r) \quad (\text{V.105})$$

A priori, la constante peut être une fonction de  $r$  puisque  $\frac{\partial p}{\partial r}$  est non nul. Et on a, finalement :

$$p(z, r) = -\rho g z + \rho \frac{r^2}{2} \Omega^2 + B \quad (\text{V.106})$$

$B$  est une constante inconnue pour l'instant.

### 5.B Référentiel inertiel

On peut également traiter le problème en se plaçant dans un référentiel galiléen. Dans ce référentiel, le fluide imprime un mouvement de vitesse purement orthoradiale (comme on l'a vu plus haut) :

$$\vec{v} = v_\theta(r) \vec{e}_\theta \quad (\text{V.107})$$

La vitesse en  $r = 0$  est nulle, et par adhésion du fluide sur les parois, on vérifie :  $v_\theta(R) = \Omega R$ . Le fluide suit également la vitesse du fond du récipient. Tout ceci nous permet d'obtenir :

$$\vec{v} = v_\theta(r) \vec{e}_\theta = r \Omega \vec{e}_\theta \quad (\text{V.108})$$

Dans ce référentiel, il n'y a pas d'autre force volumique que le poids, on peut reprendre l'équation de l'hydrodynamique des fluides parfaits :

$$\vec{\Gamma} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(p) + \vec{g} \quad (\text{V.109})$$

Avec :

$$\vec{\Gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) + (r \vec{\text{ot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} \quad (\text{V.110})$$

On commence par le plus simple, l'écoulement étant stationnaire :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \quad (\text{V.111})$$

Puis on a, comme déjà vu plus haut :

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = r^2 \Omega^2 \text{ donc : } \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) = r \Omega^2 \vec{e}_r \quad (\text{V.112})$$

Et enfin :

$$r \vec{\text{ot}} \vec{v} = 2 \Omega \vec{e}_z \quad (\text{V.113})$$

Donc :

$$r \vec{\text{ot}} \vec{v} \wedge \vec{v} = -2r \Omega^2 \vec{e}_r \quad (\text{V.114})$$

En en déduit l'accélération :

$$\vec{\Gamma} = \vec{0} + r \Omega^2 \vec{e}_r - 2r \Omega^2 \vec{e}_r = -r \Omega^2 \vec{e}_r \quad (\text{V.115})$$

Et on retombe sur la même expression que pour le référentiel non-inertiel :

$$\text{grad}(p) = -\rho g \vec{e}_z + \rho r \Omega^2 \vec{e}_r \quad (\text{V.116})$$

### 5.C Point de vue de Lagrange

On a noté qu'on pouvait traiter ce problème par le point de vue de Lagrange. L'accélération du point de vue de Lagrange est :

$$\vec{a} = -r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -r \Omega^2 \vec{e}_r \quad (\text{V.117})$$

Du point de vue d'Euler où de Lagrange, les forces appliquées s'expriment toujours :

$$\sum \vec{F} = \int_V -g \vec{r} \text{ad}(p) dV + \int_V \rho \vec{g} dV \quad (\text{V.118})$$

Si on choisit d'isoler un volume  $dV$  (mobile dans le référentiel galiléen), de masse volumique  $\rho$  :

$$m \vec{a} = \sum \vec{F} \rightarrow -\rho r \Omega^2 \vec{e}_r = -g \vec{r} \text{ad}(p) + \rho \vec{g} \quad (\text{V.119})$$

On retombe donc exactement sur la même équation à résoudre. C'est assez trivial, car si on se place dans le référentiel non-galiléen d'une particule de fluide, choisie au hasard, on aura un problème de statique des fluides à résoudre, car dans le référentiel d'une particule, pour ce problème, toutes les particules sont immobiles. Auquel cas le point de vue d'Euler et de Lagrange sont, par le PFD, indissociables.

En termes simples, s'ils existent un référentiel pour lequel toutes les particules de fluides sont immobiles, alors le point de vue de Lagrange aboutit à des équations aussi simples à résoudre que celles du point de vue d'Euler.

### 5.D Constante d'intégration : conservation du volume

L'expression de la pression est :

$$p(r, z) = -\rho g z + \rho \frac{r^2}{2} \Omega^2 + \rho D \quad (\text{V.120})$$

(On met  $B = \rho D$  en constante d'intégration pour avoir  $\rho$  en facteur partout). Pour un fluide incompressible, le volume de fluide en rotation est le même que le volume de fluide au repos. Soit  $R$  le rayon du cylindre,  $h_0$  la hauteur de fluide au repos. Le volume de fluide vaut :

$$V = \pi R^2 h_0 \quad (\text{V.121})$$

En rotation, la surface de fluide est à pression atmosphérique  $p_0$ , et donc la surface du fluide est définie par les points d'altitude  $z_0(r)$  tels que :

$$z_0(r) = -\frac{p_0}{\rho g} + \frac{1}{g} \left( \frac{\Omega^2 r^2}{2} + D \right) \quad (\text{V.122})$$

Pour trouver l'inconnue manquante,  $D$ , on utilise le fait que le fluide est incompressible, et le volume de fluide est le même au repos ou en rotation :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R z(r) r dr d\theta = \pi R^2 h_0 \quad (\text{V.123})$$

D'où on tire finalement :

$$D = g h_0 + \frac{p_0}{\rho} - \frac{\Omega^2 R^2}{4} \quad (\text{V.124})$$

En simplifiant, on a :

$$z_0(r) = h_0 + \frac{(2r^2 - R^2) \Omega^2}{4g} \quad (\text{V.125})$$



# CHAPITRE VI

## Dynamique des fluides réels

### Sommaire

---

1	Introduction . . . . .	76
2	Expérience de Reynolds . . . . .	76
2.A	Problèmes . . . . .	76
2.B	Nombre de Reynolds . . . . .	76
2.C	Mesure de viscosité . . . . .	77
3	Ecoulement laminaire simple : Ecoulement de Poiseuille . . . . .	79
3.A	L'écoulement considéré . . . . .	79
3.B	Système isolé . . . . .	80
3.C	Perte de pression . . . . .	83
4	Théorème des variations transversales . . . . .	84
5	Perte de puissance . . . . .	84
5.A	Vitesse moyenne et coefficient de Coriolis . . . . .	84
5.B	Perte de puissance . . . . .	85
6	Bernoulli généralisé . . . . .	86
6.A	Valeur du coefficient de Coriolis . . . . .	86
6.B	Débit volumique . . . . .	87
6.C	Coefficient de perte de charge régulière . . . . .	87
7	Perte de charge singulière . . . . .	88
7.A	Exemples de $\kappa$ . . . . .	89
8	Section non-circulaire . . . . .	89
9	Pompes et turbines . . . . .	90
9.A	Perte de puissance . . . . .	90
9.B	Pompes . . . . .	90
9.C	Turbines . . . . .	91
9.D	Relation de Bernoulli avec pompe et turbine . . . . .	91
10	Ecoulement turbulent . . . . .	91
10.A	Pourquoi utilise-t-on un abaque? . . . . .	92

---

## 1 Introduction

Nous avons traité la dynamique de fluide idéalisé, car considéré comme parfait. Nous allons ici traiter des fluides réels, donc visqueux. La dynamique des fluides réelles se traite par les équations de Navier<sup>1</sup>-Stokes<sup>2</sup>. Ces équations ne seront pas traitées cette année. Nous allons traiter ici d'une approche simplifiée, permettant d'aboutir à une équation de Bernoulli généralisée aux fluides réelles.

## 2 Expérience de Reynolds

En analysant des écoulements, O. Reynolds<sup>3</sup> constate qu'ils existe deux types d'écoulements :  
 — laminaire à faibles vitesses,  
 — turbulent à grandes vitesses.

La turbulence est provoquée par les forces de frottement dues à la viscosité :

$$F = \eta S \frac{dv}{dx} \quad (\text{VI.1})$$

Dans un fluide réel, la turbulence apparaît quand un frottement interne, dû à la viscosité, devient suffisant pour la générer.

### 2.A Problèmes

Dans un fluide parfait, l'équation de Bernoulli est une équation de conservation d'énergie mécanique :

$$p^*(z) + \rho \frac{v^2(z)}{2} = cste \quad (\text{VI.2})$$

Dans un fluide réel, il n'y a pas de conservation de l'énergie mécanique : pertes par frottement.

#### Comment généraliser Bernoulli en prenant en compte les pertes ?

Dans un fluide réel, l'écoulement peut être laminaire, on verra alors qu'on peut généraliser Bernoulli.

L'écoulement peut aussi devenir turbulent : on devra faire alors appel à des équations empiriques.

#### Comment définir la transition entre régime laminaire et régime turbulent ?

### 2.B Nombre de Reynolds

---

1. Claude Louis Marie Henri Navier, (1785-1836). Il est ingénieur et inspecteur divisionnaire des Ponts et Chaussées, mathématicien, physicien et économiste.

2. George Gabriel Stokes est un mathématicien et physicien britannique (1819-1903).

3. Osborne Reynolds : ingénieur irlandais (1842-1912). A priori rien à voir avec Milton Reynolds (1892-1976), le créateur de la société Reynolds International Pen Company qui fabrique des stylos.

### 📌 Définition du nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est un critère de passage de régime laminaire à turbulent :

$$\mathcal{R}_e = \frac{\rho v D}{\eta} \quad (\text{VI.3})$$

$\mathcal{R}_e$  : nombre de Reynolds,

$\rho$  : masse volumique du fluide,  $[M].[L]^{-3}$

$v$  : norme de la vitesse  $[L].[T]^{-1}$ ,

$D$  : longueur caractéristique de l'écoulement (par exemple le diamètre d'une conduite)  $[L]$ ,

$\eta$  : viscosité du fluide  $[M].[L]^{-1}.[T]^{-1}$  ( $\text{Pa.s} = \text{N.m}^{-2}.\text{s} = \text{kg.m.s}^{-2}.\text{m}^{-2}.\text{s}$ ).

La dimension de  $\mathcal{R}_e$  est :

$$\mathcal{R}_e = \frac{[M].[L]^{-3}.[L].[T]^{-1}.[L]}{[M].[L]^{-1}.[T]^{-1}} = \text{sans dimension} \quad (\text{VI.4})$$

Le nombre de Reynolds peut se voir comme un rapport entre force d'inertie et force de frottement. Ce nombre se déduit de l'équation de Navier-Stokes. Expérimentalement, on observe que :

$$\mathcal{R}_e < 2000 \rightarrow \text{Ecoulement laminaire} \quad (\text{VI.5})$$

$$\mathcal{R}_e > 3000 \rightarrow \text{Ecoulement turbulent} \quad (\text{VI.6})$$

Entre les deux, on a un régime transitoire (ou intermédiaire), l'apparition de turbulence est très aléatoire, et dépend très largement des conditions d'expérience, particulièrement des qualités de surfaces (de conduite par exemple). Le ligne de courant sont instables, irrégulières mais toujours continues (contrairement au régime turbulent où les lignes de courants peuvent se rompre). Par exemple, quand on vide une baignoire, initialement, l'écoulement est laminaire, puis à la fin un tourbillon se forme, on passe en régime turbulent. Néanmoins, ce tourbillon est, au début de sa formation, très instable.

## 2.C Mesure de viscosité

Pour déterminer le nombre de Reynolds, il faut pouvoir mesurer la viscosité. La méthode la plus répandue est basée sur la mesure de Couette<sup>4</sup>.

### 2.C.1 Couette plan

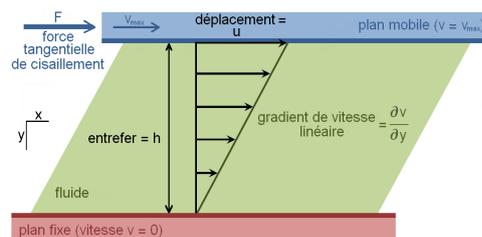


FIGURE VI.1 — Couette plan

4. Rien à voir avec la coiffure : Maurice Couette était un physicien français (1858-1943)

On mesure la force pour entraîner le plan mobile à une vitesse  $v$  constante, et connaissant la surface  $S$  :

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{v}{e} \quad (\text{VI.7})$$

En théorie efficace, en pratique très difficile à mettre en place.

### 2.C.2 Couette rotatif

En pratique, la méthode de mesure de viscosité la plus répandue pour les fluides newtoniens est celle du viscosimètre à cylindres rotatifs, dit "viscosimètre de Couette" ou "à cylindre coaxiaux"<sup>5</sup>. Le fluide est versé dans un récipient cylindrique (le premier cylindre, de rayon intérieur  $R_e$ , voir Figure VI.2), dans lequel on plonge entièrement un second cylindre (de rayon  $R_i$ , de hauteur  $h$ ). On fait alors tourner l'un des deux cylindres à vitesse angulaire constante ( $\Omega$  en  $\text{rad.s}^{-1}$ ), et on mesure le couple ( $C$ ) induit/nécessaire à maintenir cette vitesse. On a lors la relation :

$$\eta = \frac{C}{4\pi h \Omega} \left( \frac{R_e^2 - R_i^2}{R_e^2 R_i^2} \right) \quad (\text{VI.8})$$

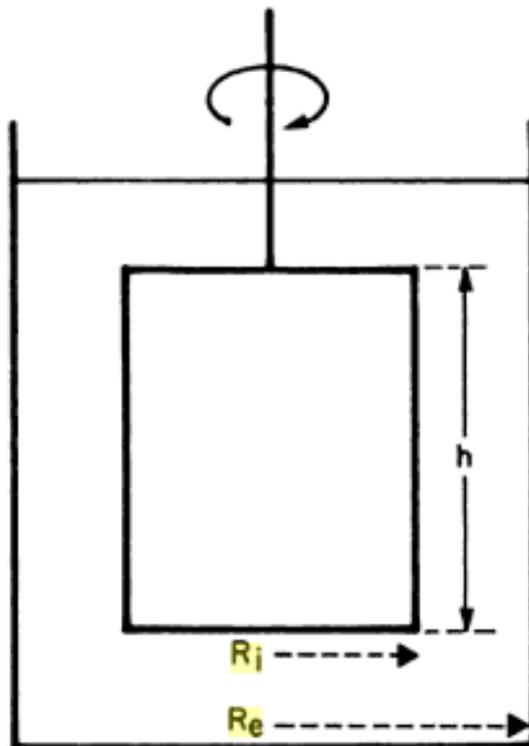


FIGURE VI.2 — Schéma de principe d'un rhéomètre de Couette à cylindre rotatif.

$\eta$  la viscosité. Dans la réalité, il faut calibrer le système avec un fluide connu pour prendre en compte les frottements des liaisons pivot et les effets de bord du cylindre plongeant. Il existe deux configurations standards :

- Couette "classique" : un cylindre tourne, on contrôle sa vitesse de rotation, et on mesure le couple appliqué sur l'autre.

5. "Viscosimètre rotatif" pour les intimes.

- Searle : Le cylindre intérieur tourne, on contrôle sa vitesse de rotation et le couple sur ce même cylindre (configuration la plus courante).

La Figure VI.3 montre un viscosimètre de Couette à cylindre rotatif basique, en configuration Searle.



FIGURE VI.3 — Rhéomètre de Couette à cylindre rotatif standard.

Les viscosimètres de Couette à cylindre rotatif mesurent des viscosités typiquement comprise entre  $10^{-3}$  Pa.s et  $10^3$  Pa.s.

### 3 Écoulement laminaire simple : Écoulement de Poiseuille

Jean-Léonard-Marie Poiseuille est un physicien français (1797-1869), diplômé de Polytechnique. Il donne son nom à une unité de viscosité, le Poise, qui ne devrait normalement plus être utilisé (sauf par les anglais, qui sont encore capable d'utiliser des unités de mesure de viscosité en livre-force seconde par pouce carré). 1 *Po* vaut 0,1 Pa.s.

#### 3.A L'écoulement considéré

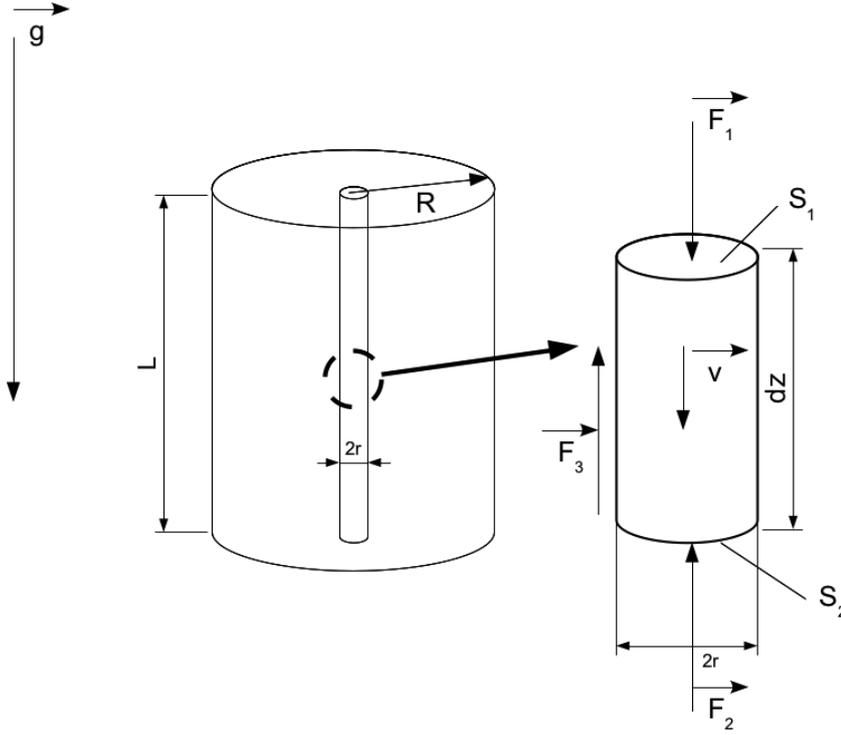
On considère un tube cylindrique, de rayon  $R$ , dans lequel s'écoule un fluide réel incompressible. L'écoulement est symétrique de révolution autour de l'axe  $\vec{e}_z$ . Le champ de vitesse est tel que :

$$\vec{v} = v_z(r, z) \vec{e}_z \quad (\text{VI.9})$$

Par symétrie du problème, il ne dépend pas de  $\theta$ . On a aussi :

$$\vec{g} = -g \vec{e}_z \quad (\text{VI.10})$$

On considère qu'il n'y a pas de glissement aux parois du tube, en  $r = R$ , donc  $v_z(R, z) = 0$ . On se place en régime permanent, en écoulement laminaire, et on admet que la pression est homogène dans une section horizontale, toujours par symétrie du problème. On pose le fluide comme incompressible et visqueux.

FIGURE VI.4 — *Écoulement de Poiseuille*

### 3.B Système isolé

On isole, au sein de cet écoulement le cylindre, centré en  $r = 0$ , de rayon  $r$ , dont l'altitude est comprise entre  $z_2$  (en dessous) et  $z_1$  (au dessus), telles que  $z_1 - z_2 = dz$ .

#### 3.B.1 Bilan des forces

Il s'exerce, sur ce cylindre, de volume  $V$ , une force volumique, le poids du cylindre :

$$\vec{F}_V = \rho V \vec{g} = -\rho g \pi r^2 (z_1 - z_2) \vec{z} \quad (\text{VI.11})$$

Il s'exerce des forces de pression sur les surfaces. Il y a une force de pression sur la surface latérale, qui, par symétrie du problème, est de résultante nulle. Il y a une force de pression sur la surface supérieure :

$$\vec{F}_1 = -p_1 \pi r^2 \vec{z} \quad (\text{VI.12})$$

Il y a une force de pression sur la surface inférieure :

$$\vec{F}_2 = p_2 \pi r^2 \vec{z} \quad (\text{VI.13})$$

On peut déjà faire ici un bilan de ces forces :

$$\vec{F}_V + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (\rho g \pi r^2 (z_2 - z_1) - p_1 \pi r^2 + p_2 \pi r^2) \vec{z} \quad (\text{VI.14})$$

$$\vec{F}_V + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (-p_1 - \rho g z_1 + p_2 + \rho g z_2) \pi r^2 \vec{z} \quad (\text{VI.15})$$

En remplaçant les expressions  $p_i + \rho g z_i$  par  $p_i^*$ , la pression motrice, on a :

$$\vec{F}_V + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (p_2^* - p_1^*) \pi r^2 \vec{z} \quad (\text{VI.16})$$

On pose  $dp^* = p_1^* - p_2^*$  (la variation de pression le long de  $\vec{e}_z$  est la pression du haut - la pression du bas). Donc on peut écrire :  $p_2^* - p_1^* = -\frac{dp^*}{dz} dz$ . On obtient :

$$\vec{F}_V + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\frac{dp^*}{dz} dz \pi r^2 \vec{z} \quad (\text{VI.17})$$

Il reste enfin une troisième force, qui est la force de frottement, due à la viscosité, qui s'oppose à la vitesse, et qui s'applique sur les surfaces latérales :

$$\vec{F}_3 = \tau \times S \vec{z} \quad (\text{VI.18})$$

$\tau$  est la contrainte tangentielle,  $S$  la surface latérale :

$$\vec{F}_3 = \tau \times 2 \pi r dz \vec{z} \quad (\text{VI.19})$$

Le bilan de toutes les forces donne :

$$\vec{F}_V + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \left( -\frac{dp^*}{dz} dz \pi r^2 + \tau \times 2 \pi r dz \right) \vec{z} \quad (\text{VI.20})$$

### 3.B.2 Accélération

On a :

$$\vec{v} = v_z(r, z) \vec{e}_z \quad (\text{VI.21})$$

Mais, par l'équation de continuité, pour un écoulement permanent, d'un fluide incompressible, on doit vérifier :

$$\text{div } \vec{v} = 0 = \frac{\partial v_z(r, z)}{\partial z} \quad (\text{VI.22})$$

Donc :

$$\vec{v} = v_z(r) \vec{e}_z \quad (\text{VI.23})$$

L'expression de l'accélération, en régime permanent, est donnée par :

$$\vec{\Gamma} = \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) + (r \vec{\otimes} \vec{v}) \wedge \vec{v} \quad (\text{VI.24})$$

On a :

$$r \vec{\otimes} \vec{v} = -\frac{\partial v_z(r)}{\partial r} \vec{e}_\theta \quad (\text{VI.25})$$

Qui donne :

$$(r \vec{\otimes} \vec{v}) \wedge \vec{v} = -\frac{\partial v_z(r)}{\partial r} v_z(r) \vec{e}_r \quad (\text{VI.26})$$

Puis :

$$\text{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial v_z^2(r)}{\partial r} \vec{e}_r \quad (\text{VI.27})$$

On remarque donc que :

$$\vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_z = 0 \quad (\text{VI.28})$$

Ce qu'on peut aussi facilement déduire de la conservation du débit volumique.

### 3.B.3 Principe fondamental de la dynamique

En projetant le PFD sur  $\vec{e}_z$  on obtient :

$$\left( -\frac{dp^*}{dz} dz \pi r^2 + \tau \times 2 \pi r dz \right) = 0 \quad (\text{VI.29})$$

On peut en déduire l'expression de la contrainte de cisaillement :

$$\frac{dp^*}{dz} dz \pi r^2 = \tau \times 2 \pi r dz \quad (\text{VI.30})$$

$$\tau = \frac{r}{2} \frac{dp^*}{dz} \quad (\text{VI.31})$$

### 3.B.4 Champ de vitesse

Par définition de la viscosité, la contrainte de cisaillement vaut aussi :

$$\tau = \eta \frac{dv_z(r)}{dr} \quad (\text{VI.32})$$

Donc :

$$\frac{dv_z(r)}{dr} = \frac{r}{2\eta} \frac{dp^*}{dz} \quad (\text{VI.33})$$

Et finalement :

$$dv_z(r) = \frac{r}{2\eta} \frac{dp^*}{dz} dr \quad (\text{VI.34})$$

On en déduit le champ de vitesse sur l'ensemble du tube, entre  $r = R$  où la vitesse est nulle, et un point de coordonné  $r$ , où sa vitesse vaut  $v_z(r)$  :

$$v_z(r) = \int_0^{v_z(r)} dv_z(r) = \int_R^r \frac{r}{2\eta} \frac{dp^*}{dz} dr \quad (\text{VI.35})$$

$$v_z(r) = -\frac{1}{2\eta} \frac{dp^*}{dz} \left( \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) \quad (\text{VI.36})$$

On pose  $v_0$  la vitesse maximale, en  $r = 0$  :

$$v_0 = -\frac{1}{2\eta} \frac{dp^*}{dz} \frac{R^2}{2} \quad (\text{VI.37})$$

Il y a un signe "–" car la vitesse s'oppose a-priori à  $\vec{e}_z$ . Si  $\frac{dp^*}{dz} > 0$  la pression motrice est plus forte en haut qu'en bas, et le fluide circule des hautes vers les basses pressions motrices (vers le bas). Si  $\frac{dp^*}{dz} < 0$ , la pression motrice diminue en augmentant l'altitude et le fluide remonte contre la gravité : on a imposé une pression en bas suffisamment forte pour que le fluide remonte.

### 📌 Champ de vitesse de l'écoulement de Poiseuille

On a finalement :

$$v_z(r) = v_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (\text{VI.38})$$

Remarque : L'hypothèse qui est faite, pour la suite, et qu'on a toujours un écoulement de Poiseuille :

$$v_z(r) = v_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (\text{VI.39})$$

que  $\vec{g}$  soit colinéaire  $\vec{e}_z$  ou pas. En réalité, si  $\vec{g}$  a une composante dans une direction perpendiculaire, l'écoulement de Poiseuille est "déformé", mais l'équation de  $v_z$  devient trop complexe. Pour la suite, que  $\vec{g}$  soit colinéaire  $\vec{e}_z$  ou pas, ce qu'on appelle "pression motrice" dans la formulation de l'écoulement de Poiseuille est toujours :

$$p^*(z) = p(z) + \rho g z \quad (\text{VI.40})$$

Avec  $z$  qui est bien l'altitude, et qui rentre dans  $v_0$  :

$$v_0 = -\frac{1}{2\eta} \frac{dp^*}{dz} \frac{R^2}{2} = -\frac{1}{2\eta} \left( \frac{dp}{dz} + \rho g \right) \frac{R^2}{2} \quad (\text{VI.41})$$

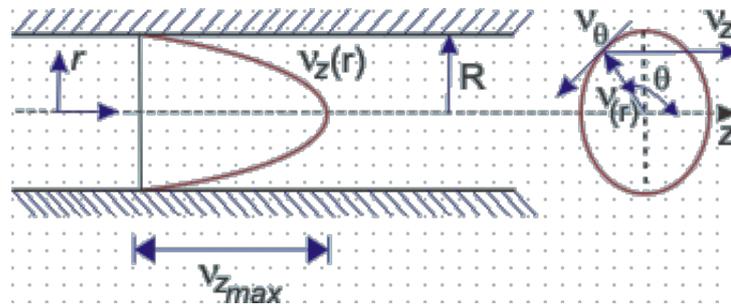


FIGURE VI.5 — Champ de vitesse dans l'écoulement de Poiseuille.

### 3.C Perte de pression

On remarque que dans notre écoulement, la vitesse est constante le long de  $z$ , mais dépend d'une variation de pression le long de  $z$ . Si on néglige la pesanteur, pour un fluide parfait, l'équation de Bernoulli donne, le long de  $z$  (sur une ligne de courant) :

$$\frac{d}{dz} \left( p + \rho \frac{v_z^2}{2} \right) = 0 = \frac{dp}{dz} \quad (\text{VI.42})$$

Or, pour un fluide réel, l'écoulement implique que  $\frac{dp}{dz} \neq 0$  (sinon, l'écoulement de Poiseuille donne une vitesse nulle!). Il y a une perte de pression dans un écoulement réel, qui est due à la dissipation par frottement. Nous allons, dans la suite de ce chapitre, exprimer cette perte de pression.

## 4 Théorème des variations transversales

Nous avons vu, pour un fluide parfait, que si l'écoulement est droit, alors la pression motrice sur la section est constante. Cela se démontre par les équations de Navier-Stokes : il en va de même pour un écoulement de Poiseuille où  $\vec{v} = v_z(r) \vec{e}_z$ .



### Théorème des variations transversales des fluides réels

La pression motrice dans la section droite d'un écoulement droit de fluide réel est constante.

## 5 Perte de puissance

On considère toujours le même écoulement, dans une conduite cylindrique à rayon constant.

En un point quelconque, de coordonnée  $(r, z)$ , sur la surface  $dS$  de normale  $\vec{e}_z$ , entourant ce point, la puissance mécanique vaut, que le fluide soit réel ou non, compressible ou non :

$$W_{dS}(r, z) = \left( p^*(r, z) + \frac{1}{2} \rho v_z(r)^2 \right) v_z(r) dS \quad (\text{VI.43})$$



### Puissance d'un écoulement de fluide réel

Par le théorème des variations transversales, la pression motrice est constante dans chaque section droite de la conduite (le long de  $\vec{e}_r$ ), si l'écoulement est droit :  $p^*(r, z) \rightarrow p^*(z)$ .  
Donc :

$$W_{dS}(r, z) = \left( p^*(z) + \frac{1}{2} \rho v_z(r)^2 \right) v_z(r) r dr d\theta \quad (\text{VI.44})$$

La puissance mécanique sur l'ensemble de la section transverse  $S$  en  $z$  vaut :

$$W_S(z) = \int_S W_{dS}(r, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( p^*(z) + \frac{1}{2} \rho v_z(r)^2 \right) v_z(r) r dr d\theta \quad (\text{VI.45})$$

La pression motrice étant constante sur la section, on peut la sortir de l'intégrale :

$$W_S(z) = p^*(z) \int_0^{2\pi} \int_0^R v_z(r) r dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{2} \rho v_z(r)^3 r dr d\theta \quad (\text{VI.46})$$

### 5.A Vitesse moyenne et coefficient de Coriolis

Le profil de vitesse ( $v(r)$ ) est généralement plus complexe à mesurer expérimentalement que le débit volumique ( $q_V$ ), en particulier si on a un écoulement turbulent. On préfère donc que ces équations s'écrivent en fonction du débit volumique. A partir du débit volumique, on identifie la vitesse moyenne.



### Vitesse moyenne

La vitesse moyenne est la vitesse définie par la relation

$$v_{\text{moy}} = \frac{q_V}{S} \quad (\text{VI.47})$$

Or :

$$q_V = \int_0^{2\pi} \int_0^R v_z(r) r dr d\theta \quad (\text{VI.48})$$

On peut donc déjà écrire :

$$\begin{aligned} W_S(z) &= p^*(z)q_V + \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{2}\rho v_z(r)^3 r dr d\theta \\ &= p^*(z)v_{moy}S + \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{2}\rho v_z(r)^3 r dr d\theta \end{aligned} \quad (\text{VI.49})$$



### Coefficient de Coriolis

On introduit un paramètre de correction des écoulements non-uniforme, dit également -rarement- "coefficient de Coriolis",  $\alpha$  :

$$\alpha = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z(r)^3 r dr d\theta}{v_{moy}^3 S} \quad (\text{VI.50})$$

Et donc :

$$W_S(z) = p^*(z)v_{moy}S + \frac{1}{2}\rho \alpha v_{moy}^3 S = \left( p^*(z) + \frac{1}{2}\rho \alpha v_{moy}^2 \right) v_{moy}S \quad (\text{VI.51})$$

Ou :

$$W_S(z) = \left( p^*(z) + \frac{1}{2}\rho \alpha v_{moy}^2 \right) q_V \quad (\text{VI.52})$$

## 5.B Perte de puissance

Entre deux sections transverses d'aires identiques, séparées de  $dz$  (l'écoulement va dans la direction de  $\vec{e}_z$ ), la variation de puissance vaut :

$$dW_S = \frac{dW_S}{dz} dz = \frac{d}{dz} \left( p^*(z) + \frac{1}{2}\rho \alpha v_{moy}^2 \right) q_V dz \quad (\text{VI.53})$$

La vitesse (donc la vitesse moyenne) ne dépend pas de  $z$ , par conservation du débit volumique, la section étant constante :

$$dW_S = \frac{dp^*(z)}{dz} q_V dz \quad (\text{VI.54})$$

Or, on a :

$$v_z(r) = -\frac{1}{2\eta} \frac{dp^*(z)}{dz} \frac{R^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (\text{VI.55})$$

Comme  $v_z(r)$  ne dépend pas de  $z$ ,  $\frac{dp^*(z)}{dz}$  ne dépend pas de  $z$ . Donc  $\frac{dp^*(z)}{dz}$  est constant. Soit un point  $A$  sur une section en amont de l'écoulement,  $B$  un point sur une section en aval de l'écoulement.  $A$  et  $B$  distant de  $L_{AB}$ .

### Perte de charge

On a la perte de puissance entre  $A$  et  $B$  deux points d'une conduite à section régulière espacés de  $L_{AB}$  dans la direction de l'écoulement :

$$\Delta W_{AB} = \int_0^{L_{AB}} \frac{dp^*(z)}{dz} q_V dz = \frac{\Delta p_{AB}^*}{L_{AB}} q_V L_{AB} = \Delta p_{AB}^* q_V \quad (\text{VI.56})$$

$\Delta p_{AB}^*$  est la perte de pression motrice le long de la conduite, à section régulière. On l'appelle : "perte de charge régulière".

## 6 Bernoulli généralisé

On peut écrire, avec  $W_{SA}$  la puissance sur la section en  $A$  et  $W_{SB}$  la puissance sur la section en  $B$  :

$$W_{SA} = W_{SB} + \Delta W_{AB} \quad (\text{VI.57})$$

Donc :

$$\left( p_A^* + \frac{1}{2} \rho \alpha v_{moy-A}^2 \right) q_V = \left( p_B^* + \frac{1}{2} \rho \alpha v_{moy-B}^2 \right) q_V + \Delta W_{AB} \quad (\text{VI.58})$$

Le débit volumique est constant entre  $A$  et  $B$  (conservation du débit) :

$$p_A^* + \frac{1}{2} \rho \alpha v_{moy-A}^2 = p_B^* + \frac{1}{2} \rho \alpha v_{moy-B}^2 + \frac{\Delta W_{AB}}{q_V} \quad (\text{VI.59})$$

### Equation de Bernoulli généralisée

On obtient finalement l'équation de Bernoulli généralisée :

$$p_A^* + \frac{1}{2} \rho \alpha v_{moy-A}^2 = p_B^* + \frac{1}{2} \rho \alpha v_{moy-B}^2 + \Delta p_{AB}^* \quad (\text{VI.60})$$

On peut donc directement écrire la relation de Bernoulli généralisée sur un tube de courant droit en utilisant non pas la vitesse locale, mais la vitesse moyenne, à condition de prendre en compte le coefficient de Coriolis.

### 6.A Valeur du coefficient de Coriolis

Le coefficient de Coriolis vaut :

$$\alpha = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v(r)^3 r dr d\theta}{v_{moy}^3 S} \quad (\text{VI.61})$$

Pour un écoulement de type Poiseuille, on a :

$$v(r) = v_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (\text{VI.62})$$

Et donc :

$$q_V = \frac{1}{2} \pi R^2 v_0 \text{ et } v_{moy} = \frac{1}{2} v_0 \quad (\text{VI.63})$$

Ce qui donne :

$$\alpha = \frac{v_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^3 r dr d\theta}{\frac{1}{8} v_0^3 S} \quad (\text{VI.64})$$

### Coefficient de Coriolis pour un écoulement de Poiseuille

Pour un écoulement laminaire de type Poiseuille, le coefficient de Coriolis est donné par :

$$\alpha = 2 \quad (\text{VI.65})$$

Dans nombreux ouvrages de mécanique de fluides, il est fait l'approximation que  $\alpha \sim 1$ . En toute rigueur, c'est une erreur, puisque pour un écoulement laminaire on a  $\alpha = 2$ . L'approximation  $\alpha \sim 1$  se justifie mal, et son unique vrai but est d'avoir une équation de Bernoulli généralisée semblable à l'équation de Bernoulli (fluide parfait).

## 6.B Débit volumique

Nous allons essayer d'exprimer la perte de charge en fonction d'une donnée facilement accessible expérimentalement : le débit volumique. On a un écoulement laminaire de type Poiseuille.

$$q_V = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R v_z(r) r dr d\theta \quad (\text{VI.66})$$

$$\vec{n} = -\vec{e}_z$$

$$q_V = -2\pi \int_0^R v_0 r \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] dr = -2\pi \left[ \int_0^R v_0 r dr - \int_0^R \frac{r^3 v_0}{R^2} dr \right] \quad (\text{VI.67})$$

$$q_V = -2\pi \left[ \frac{R^2}{2} v_0 - \frac{1}{R^2} \frac{R^4}{4} v_0 \right] = \frac{\pi R^4}{8 \eta} \frac{dp^*}{dz} \quad (\text{VI.68})$$

Or le gradient de pression motrice est uniforme, et si  $L_{AB}$  est la distance séparant  $A$  de  $B$  :

$$\frac{dp^*}{dz} = \frac{\Delta p_{AB}^*}{L_{AB}} \quad (\text{VI.69})$$

### Lien entre débit et perte de charge régulière

Pour un écoulement de Poiseuille, la relation entre le débit et la perte de charge régulière est donc donnée par :

$$q_V = \frac{\pi R^4}{8 \eta} \frac{\Delta p_{AB}^*}{L_{AB}} \quad (\text{VI.70})$$

## 6.C Coefficient de perte de charge régulière

### Coefficient de perte de charge régulière

On appelle "coefficient de perte de charge régulière" le terme  $\lambda$ , tel que :

$$\Delta p_{AB}^* = \lambda \frac{L_{AB}}{D} \rho \frac{v_{moy}^2}{2} \quad (\text{VI.71})$$

Avec  $L_{AB}$  toujours la distance entre  $A$  et  $B$ ,  $D$  le diamètre de la conduite de fluide.

On a :

$$\lambda = \frac{64}{\mathcal{R}_e} \quad (\text{VI.72})$$

On peut démontrer cette dernière relation. On a :

$$q_V = v_{moy} S = v_{moy} \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi R^4}{8 \eta} \frac{\Delta p_{AB}^*}{L_{AB}} \quad (\text{VI.73})$$

$$v_{moy} \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi D^4}{128 \eta L_{AB}} \Delta p_{AB}^* \quad (\text{VI.74})$$

Donc :

$$\Delta p_{AB}^* = \frac{32 \eta L_{AB}}{D^2} v_{moy} = \lambda \frac{L_{AB}}{D} \rho \frac{v_{moy}^2}{2} \quad (\text{VI.75})$$

On en déduit l'expression de  $\lambda$  :

$$\lambda = \frac{\frac{32 \eta L_{AB}}{D^2} v_{moy}}{\frac{L_{AB}}{D} \rho \frac{v_{moy}^2}{2}} = 64 \frac{\eta}{\rho v_{moy} D} \quad (\text{VI.76})$$

$$\boxed{\lambda = \frac{64}{\mathcal{R}_e}} \quad (\text{VI.77})$$

On remarque que le coefficient de perte de charge est sans unité. Cette équation du coefficient n'a de sens que pour un écoulement laminaire, donc pour  $\mathcal{R}_e < 2000$ .

## 7 Perte de charge singulière

### Perte de charge singulière

Nous avons vu la perte de charge régulière, qui se produit le long d'un tube à section régulière, du fait des frottements. Dans le cas où le tube n'a pas une section régulière ou s'il change brutalement de direction, cela produit d'autres pertes de charge que l'on appelle "perte singulière", caractérisées par un coefficient de perte de charge singulière.

L'équation de Bernoulli devient :

$$p_A^* + \rho \alpha \frac{v_A^2}{2} = p_B^* + \rho \alpha \frac{v_B^2}{2} + \Delta p_{AB}^* \quad (\text{VI.78})$$

$$p_A^* + \rho \alpha \frac{v_A^2}{2} = p_B^* + \rho \alpha \frac{v_B^2}{2} + \lambda_1 \rho \frac{L_1}{D_1} \frac{v_{1moy}^2}{2} + \lambda_2 \rho \frac{L_2}{D_2} \frac{v_{2moy}^2}{2} + \kappa \rho \frac{v_\kappa^2}{2} \quad (\text{VI.79})$$

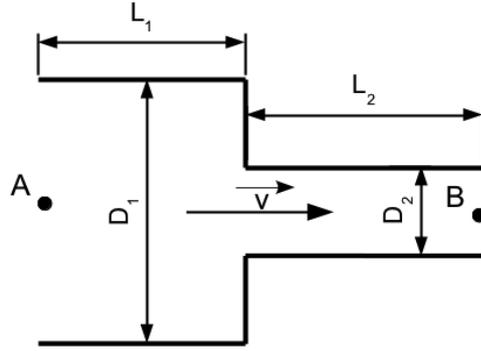


FIGURE VI.6 — Singularité d'un écoulement

En rouge, les pertes régulières, et bleu, la perte singulière.  $v_\kappa$  est la vitesse moyenne sur la singularité. Il existe des abaques qui prennent en compte comme vitesse moyenne sur la singularité la vitesse amont, mais la majorité des abaques utilisent la vitesse maximale (donc  $v_{2moy}$  ici). Nous utiliserons la vitesse maximale<sup>6</sup>.  $\kappa$  est appelé "coefficient de perte de charge singulière".

### 7.A Exemples de $\kappa$

Si la section passe brutalement de  $S_1$  à  $S_2$  alors :

$$\kappa = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \quad (\text{VI.80})$$

Si la section passe progressivement, avec un angle  $\alpha$  de  $S_1$  à  $S_2$  alors :

$$\kappa = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \sin \alpha \quad (\text{VI.81})$$

La plupart du temps  $\kappa$  n'est en réalité pas constant : il dépend du nombre de Reynolds. Il a souvent tendance à atteindre une valeur fixe qu'en écoulement turbulent.

## 8 Section non-circulaire

Nous avons jusque là travaillé sur la base d'une conduite circulaire. Cette condition de conduite circulaire n'apparaît, dans l'équation de Bernoulli généralisée aux fluides réels, que dans la perte de charge régulière, notamment car ce terme contient le nombre de Reynolds :

$$\mathcal{R}_e = \frac{\rho v D}{\eta} \quad (\text{VI.82})$$

### Diamètre hydraulique

Si la conduite n'est pas circulaire, on utilise un diamètre équivalent, qu'on appelle le "diamètre hydraulique" ( $D_H$ ) :

$$D_H = 4 \frac{S}{P} \quad (\text{VI.83})$$

Où  $S$  est l'aire traversée par le fluide (et non la section de la conduite), et  $P$  le périmètre mouillé par le fluide (et non le périmètre de conduite).

6. La plupart du temps la question ne se pose pas : les vitesses amont, aval ou maximale sont les mêmes, comme pour une vanne, un robinet...

Le nombre de Reynolds se définit toujours de la même façon :

$$\boxed{\mathcal{R}_e = \frac{\rho v D_H}{\eta}} \quad (\text{VI.84})$$

Par exemple, pour une conduite de section rectangulaire (voir Figure VI.7), de côtés  $a$  et  $b$ , si le fluide remplit le tuyau :

$$D_H = 4 \frac{ab}{2a + 2b} = 2 \frac{ab}{a + b} \quad (\text{VI.85})$$

Et si le fluide ne remplit pas le tuyau (voir Figure VI.7) :

$$P = b + 2h \text{ et } S = h \times b \quad (\text{VI.86})$$

$$D_H = 4 \frac{b h}{b + 2h} \quad (\text{VI.87})$$

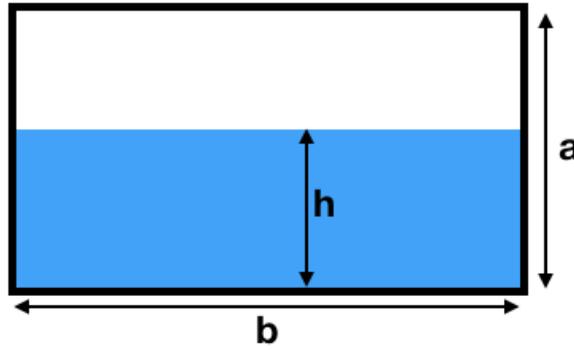


FIGURE VI.7 — Conduite à section non circulaire et non-pleine.

## 9 Pompes et turbines

### 9.A Perte de puissance

On rappelle que la perte de puissance hydraulique d'un écoulement réel sur une longueur  $L$ , due à son frottement, est le produit de son débit par sa perte de charge :

$$\Delta W = q_V \Delta p^* = q_V \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{v_{moy}^2}{2} \quad (\text{VI.88})$$

### 9.B Pompes

Une pompe, d'une puissance hydraulique fournit de la puissance à l'écoulement : sa puissance hydraulique  $P_h$ . L'énergie volumique  $\Delta X_p$  fournie par la pompe est le rapport entre sa puissance et son débit :

$$\Delta X_p = \frac{P_h}{q_V} \quad (\text{VI.89})$$

Or, par définition :

$$P_h = q_V \Delta p \quad (\text{VI.90})$$

Où  $\Delta p$  est la différence absolue de pression entre l'entrée et la sortie de la pompe. Dans les données techniques de la pompe, c'est généralement la puissance hydraulique qui est fournie. Une pompe d'une certaine puissance peut fournir soit un gros débit à faible différence de pression, soit un faible débit à grande différence de pression.

$$\Delta X_p = \Delta p \quad (\text{VI.91})$$

### 9.C Turbines

Une turbine, d'une puissance hydraulique prélève de la puissance à l'écoulement : sa puissance hydraulique  $P_h$ . L'énergie volumique  $\Delta X_t$  prélevée par la turbine est le rapport entre sa puissance et son débit :

$$\Delta X_t = \frac{P_h}{q_V} \quad (\text{VI.92})$$

Donc :

$$\Delta X_t = \Delta p \quad (\text{VI.93})$$

Où  $\Delta p$  est la différence absolue de pression entre l'entrée et la sortie de la turbine.

### 9.D Relation de Bernoulli avec pompe et turbine

Soit une conduite d'entrée  $e$ , de sortie  $s$ , dans laquelle sont placées une pompe et une turbine. La relation de Bernoulli s'écrit :

$$p_s^* + \rho\alpha \frac{v_s^2}{2} = p_e^* + \rho\alpha \frac{v_e^2}{2} - \Delta p_{reguliere}^* - \Delta p_{singuliere}^* + \Delta X_p - \Delta X_t \quad (\text{VI.94})$$

La pompe fournit un gain de charge, la turbine ajoute une perte de charge.



#### Equation de Bernoulli généralisée avec pompe et turbine

En présence de pompe et de turbine, l'équation de Bernoulli généralisée s'écrit :

$$p_s^* + \rho\alpha \frac{v_s^2}{2} = p_e^* + \rho\alpha \frac{v_e^2}{2} - \Delta p_{reguliere}^* - \Delta p_{singuliere}^* + \frac{P_{hp}}{q_V} - \frac{P_{ht}}{q_V} \quad (\text{VI.95})$$

Avec  $P_{hp}$  la puissance hydraulique fournie au fluide par la pompe et  $P_{ht}$  la puissance hydraulique prélevée au fluide par la turbine.

## 10 Écoulement turbulent

L'écoulement turbulent se produit quand  $\mathcal{R}_e > 3000$ . Pour un écoulement laminaire, sans perte singulière, sans pompe et sans turbine, on avait :

$$p_A^* + \rho\alpha \frac{v_A^2}{2} = p_B^* + \rho\alpha \frac{v_B^2}{2} + \Delta p_{AB}^* \quad (\text{VI.96})$$

Soit :

$$p_A^* + \rho\alpha \frac{v_A^2}{2} = p_B^* + \rho\alpha \frac{v_B^2}{2} + \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{v_{moy}^2}{2} \quad (\text{VI.97})$$

### Equation de Bernoulli généralisée en écoulement turbulent

Pour un écoulement turbulent, l'expression de l'équation de Bernoulli généralisée écrite précédemment reste valide :

$$p_s^* + \rho\alpha \frac{v_s^2}{2} = p_e^* + \rho\alpha \frac{v_e^2}{2} - \Delta p_{reguliere}^* - \Delta p_{singuliere}^* + \frac{P_{hp}}{q_V} - \frac{P_{ht}}{q_V} \quad (\text{VI.98})$$

Sauf que :

$$\alpha \neq 2 \quad (\text{VI.99})$$

Pour un écoulement turbulent, on montre expérimentalement que  $1,04 < \alpha < 1,15$ . On fait souvent l'approximation  $\alpha \sim 1$ . On a également, dans l'expression de  $\Delta p_{reguliere}^*$  :

$$\Delta p_{reguliere}^* = \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{v_{moy}^2}{2} \quad (\text{VI.100})$$

on a le coefficient de perte de charge régulière :

$$\lambda \neq \frac{64}{\mathcal{R}_e} \quad (\text{VI.101})$$

Pour un écoulement turbulent,  $\lambda$  est donné par des abaques. Il dépend de la rugosité de la conduite, notée  $\epsilon$  ou plus exactement de la rugosité relative  $\epsilon/D$ . On utilise le diagramme de Moody pour déterminer  $\lambda$ .

Sur le diagramme de Moody, on a un "friction factor" : c'est le coefficient de perte de charge régulière. En effet :

$$\Delta p^* = \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{v_{moy}^2}{2} \quad (\text{VI.102})$$

Donc :

$$\lambda = \frac{2 D}{\rho v_{moy}^2 L} \Delta p^* \quad (\text{VI.103})$$

## 10.A Pourquoi utilise-t-on un abaque ?

Les courbes du diagramme de Moody sont définies par une équation empirique (=fondée sur l'expérience et non un modèle physique), dont la plus utilisée est celle de Colebrook<sup>7</sup> (1939) :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{\mathcal{R}_e \sqrt{\lambda}} \right) \quad (\text{VI.104})$$

On ne peut pas exploiter cette équation, car elle n'a malheureusement pas de solution analytique. C'est la raison pour laquelle on doit passer par des abaques.

Il existe d'autres équations plus complexes mais plus précises, ou moins complexes et moins précises :

Haaland, Swamee-Jain, Serghides, Goudar-Sonnad...

On notera qu'en écoulement turbulent à  $\mathcal{R}_e < 10^5$  on utilise souvent la formule de Blasius :

$$\lambda = 0,316 \mathcal{R}_e^{-0,25} \quad (\text{VI.105})$$

7. Cyril Frank Colebrook (1910-1997) était un physicien britannique.

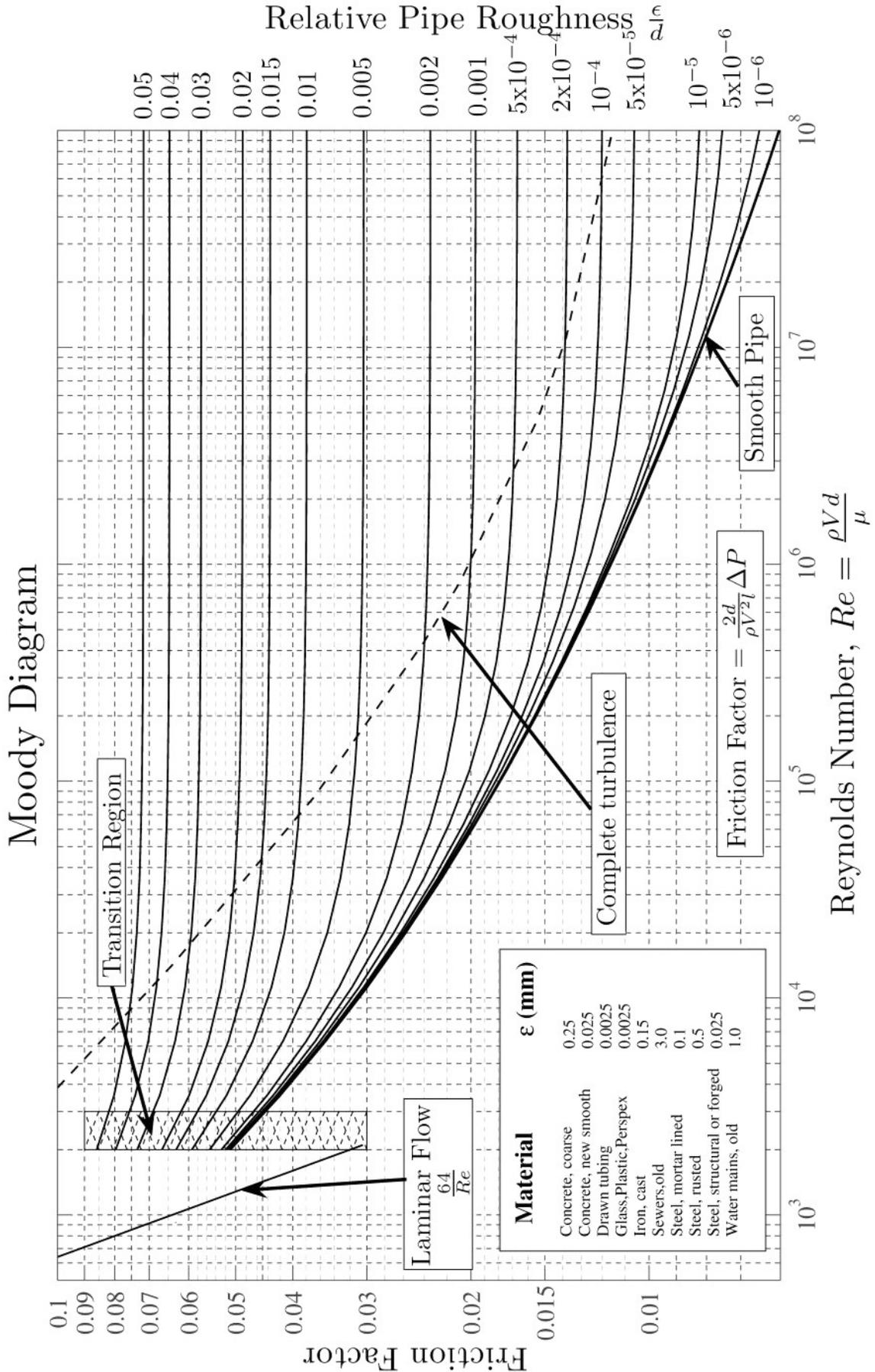


FIGURE VI.8 — Diagramme de Moody

### OBILAN

On considère un fluide incompressible (parfait ou non), pour un écoulement permanent. La conservation du débit entraîne :

$$q_V = \vec{v}_{moy} \cdot \vec{n} S = cste \quad (VI.106)$$

Si l'écoulement est droit, la pression motrice est constante sur la section.

L'écoulement est droit. On a, entre deux points  $A$  et  $B$  distant de  $L$  (on oublie ici pompes et turbines), avec  $N - 1$  irrégularités séparant  $N$  portions régulières de longueur  $L_i$  :

$$p_A^* + \rho \alpha \frac{v_{A \text{ moy}}^2}{2} = p_B^* + \rho \alpha \frac{v_{B \text{ moy}}^2}{2} + \sum_{i=1}^N \left( \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \rho \frac{v_{i \text{ moy}}^2}{2} \right) + \sum_{i=1}^{N-1} \left( \kappa_i \rho \frac{v_{i \text{ max}}^2}{2} \right) \quad (VI.107)$$

- Si le fluide est considéré comme parfait :  $\lambda = 0$ ,  $\kappa = 0$ ,  $\alpha = 1$
- Si le fluide est visqueux et  $\mathcal{R}_e < 2000$  :  $\lambda = 64/\mathcal{R}_e$ ,  $\kappa \neq 0$ ,  $\alpha = 2$
- Si le fluide est visqueux et  $\mathcal{R}_e > 3000$  :  $\lambda \rightarrow$  Diagramme de Moody,  $\kappa \neq 0$ ,  $\alpha \sim 1$
- Si le fluide est visqueux et  $2000 < \mathcal{R}_e < 3000$  : il faut voir expérimentalement s'il y a turbulence ou pas.

# CHAPITRE VII

## Théorème des quantités de mouvement ou théorème d'Euler

### Sommaire

---

1	Introduction . . . . .	96
2	Nouvelle expression de l'accélération . . . . .	96
3	Projection . . . . .	97
4	Quatre outils pour simplifier l'accélération . . . . .	97
4.A	Equation de continuité . . . . .	97
4.B	Divergent . . . . .	97
4.C	Première simplification . . . . .	97
4.D	Intégration par partie . . . . .	98
4.E	Green-Ostrogradski . . . . .	98
5	Théorème des quantités de mouvement . . . . .	98
6	Théorème d'Euler sur un tube de courant . . . . .	99

---

## 1 Introduction

Le théorème des quantités de mouvement ou théorème d'Euler est un théorème fort utile, qui permet de calculer les actions d'un fluide sur un "domaine" (un structure, une conduite...) sans avoir à connaître le champ de vitesse en tout point, mais simplement sur quelques surfaces frontières du domaine. C'est en cela qu'il est très intéressant.

Notons qu'Euler ayant pondu pas mal de théorèmes, le nom "théorème d'Euler" pour le théorème des quantités de mouvement est assez peu utilisé, du fait des confusions possibles.

## 2 Nouvelle expression de l'accélération

On repart d'une des expressions de l'accélération :

$$\vec{\Gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\overline{grad}(\vec{v})) \cdot \vec{v} \quad (\text{VII.1})$$

On utilise l'opérateur "nabla" ( $\vec{\nabla}$ ) :

$$\vec{\nabla} = \overline{grad} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}} \quad (\text{VII.2})$$

Donc :

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{VII.3})$$

Et finalement :

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \quad (\text{VII.4})$$

Attention,  $\vec{\nabla}$  est un opérateur différentiel ! Il suit les mêmes règles que la dérivé. On a :

$$\left( g(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) (f(x)) \neq \left( \frac{\partial}{\partial x} g(x) \right) (f(x)) \quad (\text{VII.5})$$

De même :

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \neq (\vec{\nabla} \vec{v}) \cdot \vec{v} \quad (\text{VII.6})$$

On remarque que :

$$\left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z \end{pmatrix} = \overline{grad}(\vec{v}) \cdot \vec{v} \quad (\text{VII.7})$$

Donc :

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{grad}) \vec{v} = \vec{grad}(\vec{v}) \cdot \vec{v} \quad (\text{VII.8})$$

On peut donc aussi écrire l'accélération :

$$\vec{\Gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \quad (\text{VII.9})$$

### 3 Projection

On considère une masse  $m$  de fluide en accélération :

$$m \vec{\Gamma} = \int_V \rho \vec{\Gamma} dV \quad (\text{VII.10})$$

Projetons cette équation. Soit l'accélération :

$$\vec{\Gamma} = \Gamma_x \vec{e}_x + \Gamma_y \vec{e}_y + \Gamma_z \vec{e}_z \quad (\text{VII.11})$$

Avec  $i = \{x, y, z\}$ , on a :

$$m \Gamma_i = \int_V \rho \Gamma_i dV = \int_V \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_i \right) dV \quad (\text{VII.12})$$

On voit que le seul terme restant avec des vecteurs et un produit scalaire, dont le résultat est donc, comme le nom l'indique, un scalaire.

## 4 Quatre outils pour simplifier l'accélération

### 4.A Equation de continuité

On vérifie :

$$\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{VII.13})$$

C'est l'équation de continuité.

### 4.B Divergent

On donne la relation suivante (qui rappelle fortement la dérivé d'un produit, sauf qu'il ne s'agit pas d'un produit de scalaires) :

$$\text{div}(f \vec{u}) = f \text{div}(\vec{u}) + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) f \quad (\text{VII.14})$$

### 4.C Première simplification

$$\text{div}(v_i \rho \vec{v}) = v_i \text{div}(\rho \vec{v}) + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_i \quad (\text{VII.15})$$

D'où :

$$\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_i = \text{div}(v_i \rho \vec{v}) - v_i \text{div}(\rho \vec{v}) \quad (\text{VII.16})$$

On a donc :

$$m \Gamma_i = \int_V \rho \Gamma_i dV = \int_V \left( \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + [\operatorname{div}(v_i \rho \vec{v}) - v_i \operatorname{div}(\rho \vec{v})] \right) dV \quad (\text{VII.17})$$

Or, par l'équation de continuité :

$$-v_i \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{VII.18})$$

Donc :

$$m \Gamma_i = \int_V \rho \Gamma_i dV = \int_V \left( \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \operatorname{div}(v_i \rho \vec{v}) + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV \quad (\text{VII.19})$$

#### 4.D Intégration par partie

On connaît la formule de l'intégration par partie :

$$\int_a^b u v' dx + \int_a^b u' v dx = [u v]_a^b \quad (\text{VII.20})$$

Cela vient en fait de :

$$\frac{d(u v)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \quad (\text{VII.21})$$

D'où l'intégration par partie, car :

$$d(u v) = u dv + v du \quad (\text{VII.22})$$

Dans notre cas, on en déduit que :

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} \quad (\text{VII.23})$$

On aboutit donc à :

$$m \Gamma_i = \int_V \left( \operatorname{div}(v_i \rho \vec{v}) + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} \right) dV \quad (\text{VII.24})$$

#### 4.E Green-Ostrogradski

Soit  $S$  fermant  $V$ , le volume contenant  $m$  :

$$\int_V \operatorname{div}(v_i \rho \vec{v}) dV = \int_S \rho v_i \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (\text{VII.25})$$

On aboutit à :

$$m \Gamma_i = \int_V \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV + \int_S \rho v_i \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (\text{VII.26})$$

### 5 Théorème des quantités de mouvement

Soit un volume de fluide  $V$  fermé par  $S$ , de masse  $m$ . Le PFD donne :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{\Gamma} \quad (\text{VII.27})$$

Donc :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \int_V \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV + \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad (\text{VII.28})$$

Remarque : il n'y a ici ni hypothèse sur la compressibilité, ni sur la viscosité du fluide.



### Théorème des quantités de mouvements en écoulement stationnaire

Dans le cas d'un écoulement stationnaire, ni  $\vec{v}$ , ni  $\rho$  ne dépendent du temps, donc :

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} = 0 \quad (\text{VII.29})$$

On en déduit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad (\text{VII.30})$$

Que le fluide soit réel ou parfait, incompressible ou non.

Le théorème d'Euler permet de calculer la force qu'exerce un fluide sur un corps du fait de son mouvement. On en fera l'exemple dans la section suivante.

## 6 Théorème d'Euler sur un tube de courant

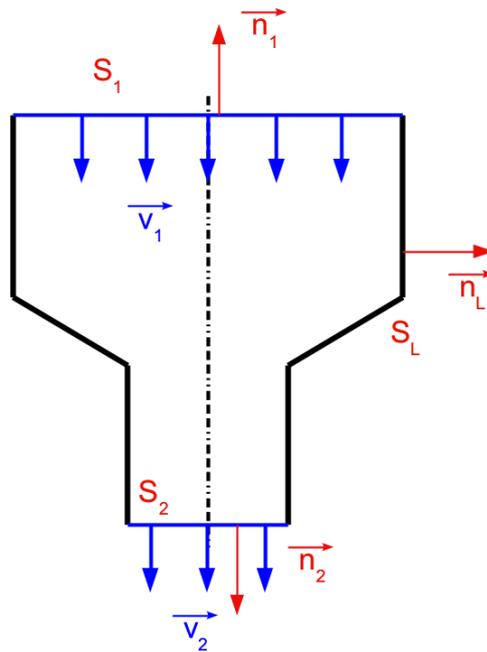


FIGURE VII.1 — Théorème d'Euler sur un tube de courant

On se place en écoulement stationnaire :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad (\text{VII.31})$$

Le volume de fluide isolé pour appliquer le théorème est le tube complet, entre la surface du point 1 et celle du point 2. On a donc :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \int_{S_1} \rho \vec{v}_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1) dS + \int_{S_L} \rho \vec{v}_L (\vec{v}_L \cdot \vec{n}_L) dS + \int_{S_2} \rho \vec{v}_2 (\vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2) dS \quad (\text{VII.32})$$

On a :

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = -v_1, \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 = v_2 \quad \text{et} \quad \vec{v}_L \cdot \vec{n}_L = 0 \quad (\text{VII.33})$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \int_{S_1} \rho \vec{v}_1 (-v_1) dS + \int_{S_2} \rho \vec{v}_2 (v_2) dS \quad (\text{VII.34})$$

Les forces extérieures sont :

— Les forces de pression sur les surfaces  $S_1$  et  $S_2$ , si les pressions sont homogènes :

$$\vec{F}_1 = -p_1 S_1 \vec{n}_1 \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = -p_2 S_2 \vec{n}_2 \quad (\text{VII.35})$$

— La force de volume, le poids :

$$\vec{P} = \rho V \vec{g} \quad (\text{VII.36})$$

— La force qu'exerce la paroi du tube sur le fluide  $\vec{F}_3$  : elle est notre inconnue.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{P} = \int_{S_1} \rho \vec{v}_1 (-v_1) dS + \int_{S_2} \rho \vec{v}_2 (v_2) dS \quad (\text{VII.37})$$

Donc :

$$\vec{F}_3 = \int_{S_1} \rho \vec{v}_1 (-v_1) dS + \int_{S_2} \rho \vec{v}_2 (v_2) dS + p_1 S_1 \vec{n}_1 + p_2 S_2 \vec{n}_2 - \rho V \vec{g} \quad (\text{VII.38})$$

On prend l'exemple simple d'un fluide parfait, où  $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$  et on néglige le poids du fluide :

$$\vec{F}_3 = \int_{S_1} \rho \vec{v}_1 (-v_1) dS + \int_{S_2} \rho \vec{v}_2 (v_2) dS - p_1 S_1 \vec{n}_2 + p_2 S_2 \vec{n}_2 \quad (\text{VII.39})$$

On fait l'approximation que la vitesse est homogène dans la section. Cela correspond par exemple par un entonnoir : le fluide y rentre par une large section droite, qui plus loin se resserre plus ou moins brutalement, avant de finir par une tube de plus petite section. Le fluide rentre avec une vitesse quasi-parallèle à l'axe de l'entonnoir, et ressort avec une vitesse quasi-parallèle à l'entonnoir

$$\vec{F}_3 = \rho \vec{v}_1 (-v_1) S_1 + \rho \vec{v}_2 (v_2) S_2 + (p_2 S_2 - p_1 S_1) \vec{n}_2 \quad (\text{VII.40})$$

Or  $q_m = \rho v S$ , et pour un écoulement permanent, le débit massique est conservé :

$$\vec{F}_3 = -q_m \vec{v}_1 + q_m \vec{v}_2 + (p_2 S_2 - p_1 S_1) \vec{n}_2 \quad (\text{VII.41})$$

$$\vec{F}_3 = q_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + (p_2 S_2 - p_1 S_1) \vec{n}_2 \quad (\text{VII.42})$$

Si le fluide rentre dans le tube à pression ambiante et sort à pression ambiante :

$$\vec{F}_3 = q_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + p_0 (S_2 - S_1) \vec{n}_2 \quad (\text{VII.43})$$

C'est l'action du tube sur le fluide, on en déduit l'action du fluide sur le tube :

$$\vec{F}_{fluide \rightarrow tube} = -\vec{F}_3 = q_m (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + p_0 (S_1 - S_2) \vec{n}_2 \quad (\text{VII.44})$$

On remet le poids, ce n'est pas compliqué :

$$\vec{F}_{fluide \rightarrow tube} = q_m (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + p_0 (S_1 - S_2) \vec{n}_2 + \rho V \vec{g} \quad (\text{VII.45})$$

# CHAPITRE VIII

## Concepts de base en aéro/hydrodynamisme

### Sommaire

---

1	Profil d'aile . . . . .	102
2	Résultante aérodynamique . . . . .	102
3	Moment aérodynamique . . . . .	103
4	Coefficients aérodynamiques . . . . .	103
5	Evaluation des coefficients aérodynamiques . . . . .	104
6	Similitude d'écoulement . . . . .	106

---

Ce chapitre vise à donner quelques concepts en aérodynamisme, et le vocabulaire associé.

## 1 Profil d'aile

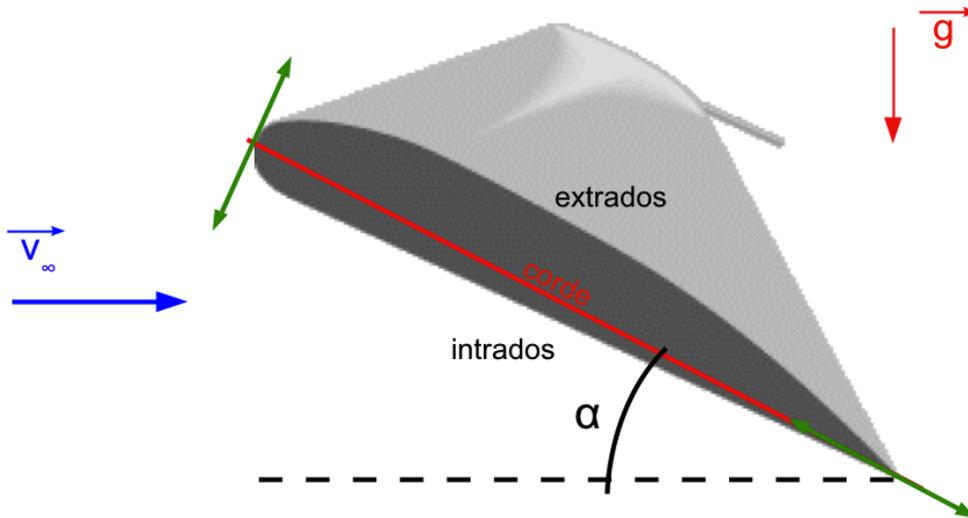


FIGURE VIII.1 — Profil d'aile bidimensionnel

$\alpha$  est l'angle d'incidence entre la corde et  $\vec{v}_\infty$ . A l'avant de l'aile, le bord d'attaque, à l'arrière, le bord de fuite.

## 2 Résultante aérodynamique

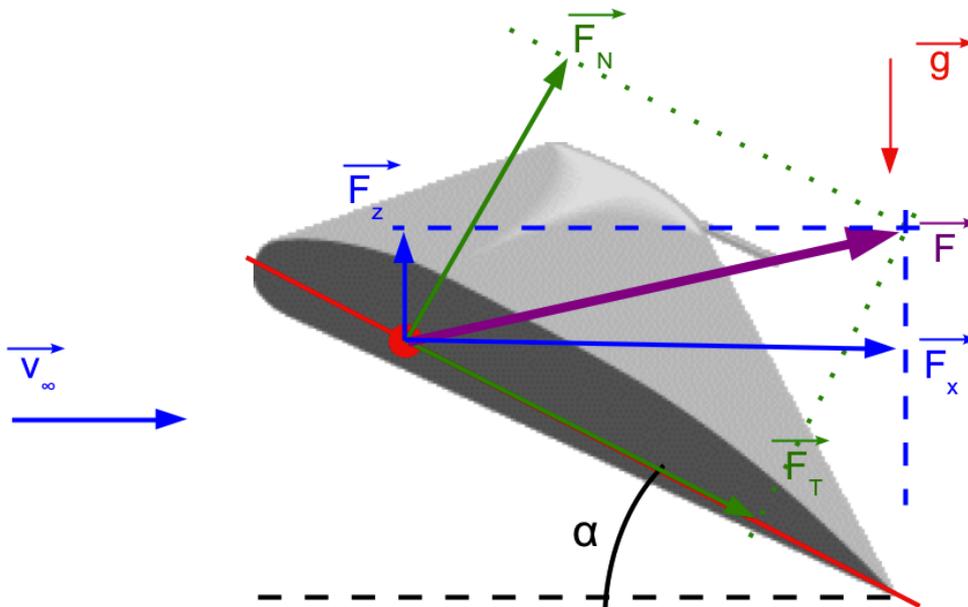


FIGURE VIII.2 — Résultante aérodynamique

- $\vec{F}$  : résultante aérodynamique,
- $C$  : centre de poussé. C'est le point d'application de  $\vec{F}$ , c'est à dire le point où le moment de  $\vec{F}$  est nul.
- $\vec{F}_T$  : composante de  $\vec{F}$  tangente à la corde.

- $\vec{F}_N$  : composante de  $\vec{F}$  normale à la corde.
- $\vec{F}_z$  : composante de  $\vec{F}$  normale à  $\vec{v}_\infty$  : c'est la **portance**.
- $\vec{F}_x$  : composante de  $\vec{F}$  colinéaire à  $\vec{v}_\infty$  : c'est la **trainée**.

### 3 Moment aérodynamique

$C$  ne coïncide pas nécessairement avec le centre d'inertie du profil. Il en résulte un moment aérodynamique :  $\vec{M}_{aéro}$ .

Si :

- $\vec{M}_{aéro}$  fait augmenter  $\alpha$ , il est **cabreur** ;
- $\vec{M}_{aéro}$  fait diminuer  $\alpha$ , il est **piqueur**.

### 4 Coefficients aérodynamiques

- Coefficient de portance :

$$C_z = \frac{\|\vec{F}_z\|}{\frac{1}{2}\rho_\infty v_\infty^2 S} \quad (\text{VIII.1})$$

$S$  est la surface projetée de l'aile (envergure  $\times$  longueur de corde).  $\rho_\infty$  : masse volumique du fluide loin de l'aile.

- Coefficient de trainée :

$$C_x = \frac{\|\vec{F}_x\|}{\frac{1}{2}\rho_\infty v_\infty^2 S} \quad (\text{VIII.2})$$

- Coefficient de moment aérodynamique :

$$C_M = \frac{\|\vec{M}_{aéro}\|}{\frac{1}{2}\rho_\infty v_\infty^2 S L} \quad (\text{VIII.3})$$

$L$  : longueur de la corde.

Ces coefficients sont adimensionnels.

- finesse aérodynamique :

$$f = \frac{C_z}{C_x} \quad (\text{VIII.4})$$

- Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds de l'écoulement autour d'une aile vaut :

$$\mathcal{R}_e = \rho \frac{v_\infty}{\eta} L \quad (\text{VIII.5})$$

$L$  : la longueur de la corde.

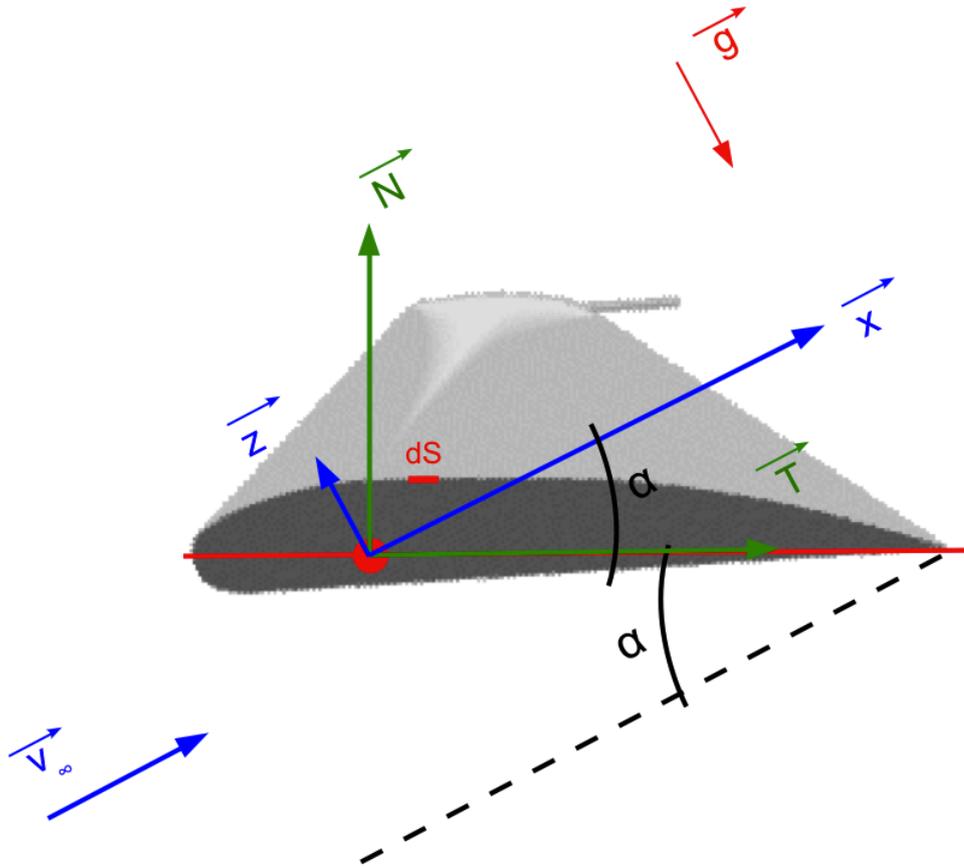


FIGURE VIII.3 — Profil d'aile bidimensionnel

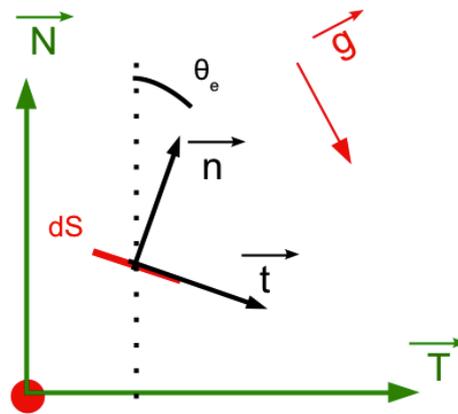


FIGURE VIII.4 — Action sur la surface de l'extrados

## 5 Evaluation des coefficients aérodynamiques

Action de l'air sur un élément de surface de l'extrados :

L'évolution de  $\theta_e$  avec la position sur l'extrados est une fonction purement dépendante de la géométrie de l'aile.

$$\vec{n} = \cos\theta_e \vec{N} + \sin\theta_e \vec{T} \quad (\text{VIII.6})$$

$$\vec{t} = -\sin\theta_e \vec{N} + \cos\theta_e \vec{T} \quad (\text{VIII.7})$$

La force s'exerçant sur  $dS$  est  $d\vec{F}$  :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_n + d\vec{F}_t \quad (\text{VIII.8})$$

$d\vec{F}_n$  est la composante normale,  $d\vec{F}_t$  la composante tangentielle :

$$d\vec{F}_n = -p_{air} \vec{n} dS \quad (\text{VIII.9})$$

$$d\vec{F}_t = \tau \vec{t} dS \quad (\text{VIII.10})$$

$\tau$  est la contrainte visqueuse liée aux frottement de l'air sur l'aile. Donc :

$$d\vec{F}_e = (-p_e \vec{n} + \tau_e \vec{t}) dS \quad (\text{VIII.11})$$

L'indice  $e$  indique qu'on parle de l'extrados. Projétons maintenant sur  $\vec{N}$  et  $\vec{T}$  :

$$d\vec{F}_e = d\vec{F}_{Ne} + d\vec{F}_{Te} \quad (\text{VIII.12})$$

Avec :

$$dF_{Ne} = d\vec{F}_{ne} \cdot \vec{N} + d\vec{F}_{te} \cdot \vec{N} \quad (\text{VIII.13})$$

Et donc :

$$\boxed{dF_{Ne} = -p_e dS \cos \theta_e - \tau_e \sin \theta_e dS} \quad (\text{VIII.14})$$

$$dF_{Te} = d\vec{F}_{ne} \cdot \vec{T} + d\vec{F}_{te} \cdot \vec{T} \quad (\text{VIII.15})$$

Et donc :

$$\boxed{dF_{Te} = -p_e dS \sin \theta_e + \tau_e \cos \theta_e dS} \quad (\text{VIII.16})$$

Action de l'air sur un élément de surface de l'intrados :

L'évolution de  $\theta_i$  avec la position sur l'extrados est une fonction purement dépendante de la géométrie de l'aile.

$$\vec{n} = -\cos \theta_i \vec{N} - \sin \theta_i \vec{T} \quad (\text{VIII.17})$$

$$\vec{t} = -\sin \theta_i \vec{N} + \cos \theta_i \vec{T} \quad (\text{VIII.18})$$

Dont on déduit :

$$\boxed{dF_{Ni} = p_i dS \cos \theta_i - \tau_i \sin \theta_i dS} \quad (\text{VIII.19})$$

$$\boxed{dF_{Ti} = p_i dS \sin \theta_i + \tau_i \cos \theta_i dS} \quad (\text{VIII.20})$$

Finalement, on a :

$$\boxed{F_N = \int_{S_e} dF_{Ne} + \int_{S_i} dF_{Ni}} \quad (\text{VIII.21})$$

$$\boxed{F_T = \int_{S_e} dF_{Te} + \int_{S_i} dF_{Ti}} \quad (\text{VIII.22})$$

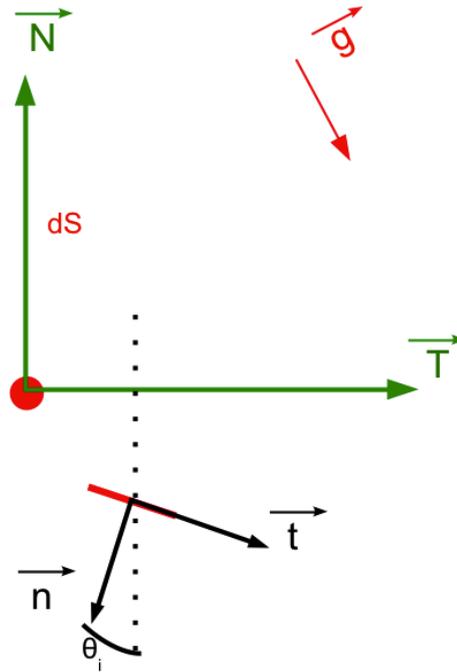


FIGURE VIII.5 — Action sur la surface de l'intrados

## 6 Similitude d'écoulement

Deux écoulements à nombre de Reynolds égaux sont dits similaires si les géométries sont équivalentes.

Conséquence : si on souhaite réaliser un modèle réduit d'un avion, à l'échelle 1/10 par exemple.

$$L_{mr} = L/10 \quad (\text{VIII.23})$$

$L_{mr}$  la longueur de corde du modèle réduit, et  $L$  la longueur de corde de l'avion réel. L'écoulement sera similaire si on trouve un fluide, ou un couple fluide/vitesse, tel que :

$$\rho \frac{v_\infty}{\eta} L = \rho_{mr} \frac{v_{\infty mr}}{\eta_{mr}} L_{mr} \quad (\text{VIII.24})$$

Si on travaille avec les mêmes vitesses, on vérifie :

$$\boxed{\frac{\rho_{mr}}{\eta_{mr}} = \frac{\rho}{\eta} \frac{L}{L_{mr}}} \quad (\text{VIII.25})$$

## Table des figures

I.1	Gradient d'un champ scalaire : $p(x_1) = p_0 - \rho g x_1$ . . . . .	6
I.2	Champ de vitesse : $\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = a x_1 \vec{e}_1 + b \vec{e}_2 + c \vec{e}_3$ . . . . .	7
I.3	Champ de vitesse $\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = a \vec{e}_1$ . . . . .	9
I.4	Champ de vitesse $\vec{v}(r, \theta, z) = \Omega r \vec{e}_\theta$ . . . . .	10
I.5	Champ de vitesse : $\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = a x_1 \vec{e}_1 + b \vec{e}_2$ . Il semble tourner, mais il suffit de la tracer pour $x_1 < 0$ pour voir que non. . . . .	11
I.6	Flux de vitesse dans un cube à travers les faces orientées par $\pm \vec{e}_x$ . . . . .	11
I.7	Champ de vitesse : $\vec{v} = a \vec{e}_x + b \vec{e}_y$ . . . . .	13
I.8	Champ de vitesse : $\vec{v}(r, \theta, z) = a \vec{e}_r$ . . . . .	13
I.9	Champ de vitesse : $\vec{v}(r, \theta, z) = a \vec{e}_\theta$ . . . . .	13
I.10	Coupure fictive . . . . .	20
I.11	Viscosité . . . . .	22
I.12	Viscosité newtonienne . . . . .	24
I.13	Débit massique . . . . .	24
I.14	G-O . . . . .	25
II.1	Pression autour d'un volume de fluide . . . . .	28
III.1	Différence entre le point de vue de Lagrange et celui d'Euler. . . . .	38
III.2	Exemple simple d'écoulement où le point de vue de Lagrange montre déjà ses limites . . . . .	40
IV.1	Conservation du débit . . . . .	47
V.1	Conservation de la masse . . . . .	50
V.2	Conservation de la masse : exemple . . . . .	53
V.3	Écoulement laminaire autour d'un obstacle : couche limite et sillage . . . . .	55
V.4	Exemple d'écoulement pouvant être traité comme un écoulement avec un puits (loin du trou). Lac Covão dos Conchos au Portugal. . . . .	58
V.5	Champ de vitesse d'un écoulement avec source (à gauche) et puits (à droite). . . . .	61
V.6	Champ de vitesse d'un écoulement avec source (à gauche) et puits (à droite), auquel on superpose un écoulement uniforme (de gauche à droite) . . . . .	62
V.7	Champ de vitesse d'un écoulement avec source (à gauche) et puits (à droite), auquel on superpose un écoulement uniforme (de gauche à droite), mais pour lequel le puits et la source sont masqués . . . . .	62
V.8	Écoulement autour du cylindre de rayon $R$ . . . . .	63

V.9	Potentiel de l'écoulement d'un fluide parfait autour d'un cylindre. Les courbes noires sont les équipotentiels (les vecteurs vitesse sont orthogonaux à ces courbes). Le rouge indique les faibles potentiels, les roses les forts. Le champ de vitesse va des faibles vers les forts potentiels. Les axes indiquent la position relative par rapport au rayon. . . . .	65
V.10	Champ de vitesse autour d'un cylindre. Les couleurs indiquent la norme des vecteurs vitesse du rouge (norme nulle) au rose (norme maximale). Les axes indiquent la position normalisée par le rayon $R$ . . . . .	66
V.11	Superposition du champ de vitesse et des équipotentiels. . . . .	67
V.12	Écoulement à courbure locale . . . . .	68
V.13	Vase tournant . . . . .	70
VI.1	Couette plan . . . . .	77
VI.2	Schéma de principe d'un rhéomètre de Couette à cylindre rotatif. . . . .	78
VI.3	Rhéomètre de Couette à cylindre rotatif standard. . . . .	79
VI.4	Écoulement de Poiseuille . . . . .	80
VI.5	Champ de vitesse dans l'écoulement de Poiseuille. . . . .	83
VI.6	Singularité d'un écoulement . . . . .	89
VI.7	Conduite à section non circulaire et non-pleine. . . . .	90
VI.8	Diagramme de Moody . . . . .	93
VII.1	Théorème d'Euler sur un tube de courant . . . . .	99
VIII.1	Profil d'aile bidimensionnel . . . . .	102
VIII.2	Résultante aérodynamique . . . . .	102
VIII.3	Profil d'aile bidimensionnel . . . . .	104
VIII.4	Action sur la surface de l'extrados . . . . .	104
VIII.5	Action sur la surface de l'intrados . . . . .	106

## Liste des Points Clés

Bilan sur les gradients, *page 7*  
Divergent, *page 12*  
Définition d'un fluide, *page 14*  
Fluide et liquide, *page 14*  
Cisaillement, *page 15*  
Compressibilité, *page 15*  
Mécanique des milieux continus, *page 15*  
Particule et VER, *page 16*  
Point de vue d'Euler, *page 17*  
Ecoulement laminaire, *page 18*  
Ecoulement turbulent, *page 18*  
Force volumique élémentaire du poids, *page 19*  
Force résultante de la pression, *page 20*  
Contrainte dans un fluide immobile, *page 21*  
Viscosité, *page 22*  
Définition du fluide parfait, *page 23*  
Définition du fluide newtonien, *page 23*  
Définition du débit massique, *page 25*  
Définition du débit volumique, *page 25*  
Théorème de Green-Ostrogradski, *page 26*  
Equation de la statique des fluides, *page 30*  
Equation fondamentale de l'équilibre des fluides, *page 31*  
Poussée d'Archimède, *page 32*  
Equation générale de la dynamique des fluides parfaits, *page 34*  
Expression de l'accélération : dérivée particulaire, *page 35*  
Autre expression de l'accélération, *page 36*  
Autre expression de l'accélération en rotationnel, *page 37*  
Equation de Bernoulli, *page 44*  
Définition de la pression motrice, *page 45*  
Définition de la pression dynamique, *page 45*  
Nombre de Froude et prise en compte du poids, *page 45*  
Equation de Bernoulli en écoulement irrotationnel, *page 46*  
Conservation du débit volumique, *page 47*  
Puissance d'un écoulement sur une section droite, *page 48*  
Equation de continuité, *page 51*  
Equation de continuité d'un fluide incompressible, *page 52*  
Potentiel de vitesse, écoulement irrotationnel, *page 56*  
Equation de Laplace, *page 56*  
Superpositions d'écoulements, *page 60*  
Champ de vitesse autour d'un cylindre en écoulement potentiel, *page 66*  
Théorème des variations transversales, *page 69*  
Définition du nombre de Reynolds, *page 77*  
Champ de vitesse de l'écoulement de Poiseuille, *page 83*  
Théorème des variations transversales des fluides réels, *page 84*  
Puissance d'un écoulement de fluide réel, *page 84*  
Vitesse moyenne, *page 84*  
Coefficient de Coriolis, *page 85*  
Perte de charge, *page 86*

Equation de Bernoulli généralisée, *page 86*

Coefficient de Coriolis pour un écoulement de Poiseuille, *page 87*

Lien entre débit et perte de charge régulière, *page 87*

Coefficient de perte de charge régulière, *page 88*

Perte de charge singulière, *page 88*

Diamètre hydraulique, *page 89*

Equation de Bernoulli généralisée avec pompe et turbine, *page 91*

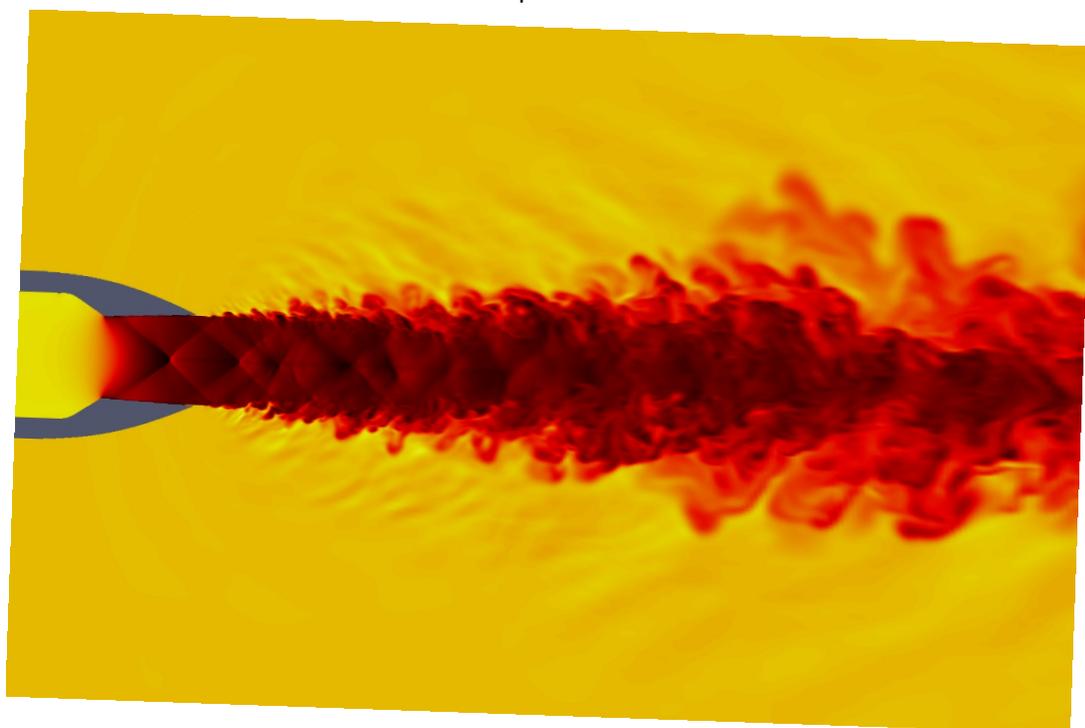
Equation de Bernoulli généralisée en écoulement turbulent, *page 92*

BILAN, *page 94*

Théorème des quantités de mouvements en écoulement stationnaire, *page 99*



Mécanique de



Yann Gueguen