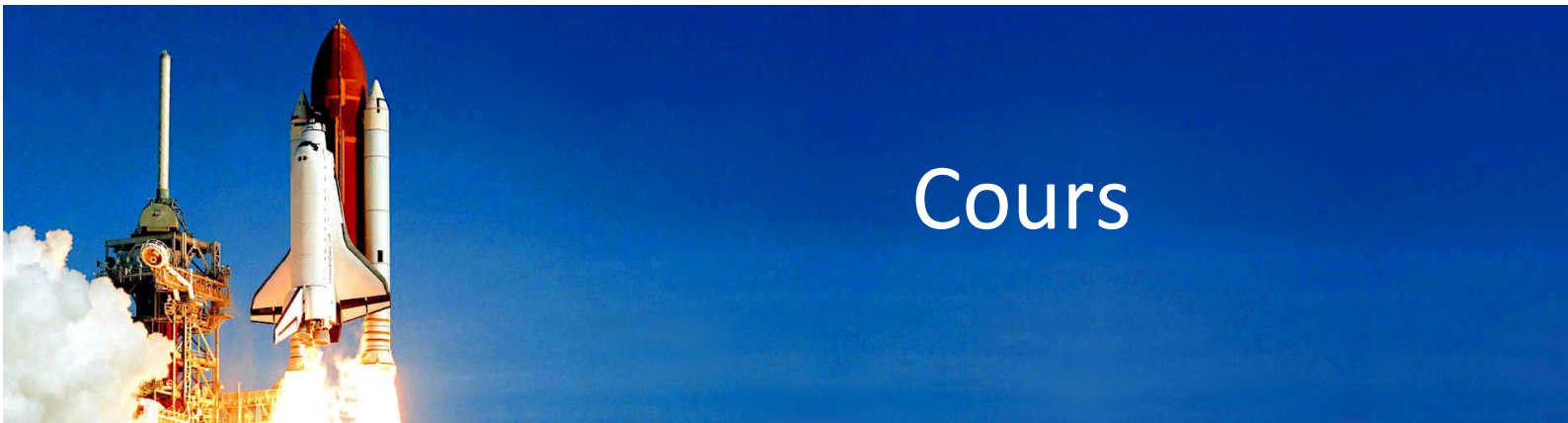


Sciences industrielles



Cours

- Des notations mathématiquement rigoureuses
- Des exemples industriels
- Des animations interactives

Simon LONNI

Professeur normalien agrégé
au Lycée Kléber de Strasbourg

Sommaire

INGENIERIE SYSTEME

1 Introduction	10
1.1 Contexte	10
1.2 Le cœur artificiel CARMAT	11
2 Décrire les fonctions et la structure d'un système en SysML	12
2.1 Systèmes pluri-technologiques	12
2.2 Frontière d'étude	12
2.3 Cycle de vie d'un système et démarche de l'ingénieur	13
2.4 Les outils de modélisation système	13
2.5 SysML	14
<i>Analyse du besoin</i>	14
<i>Fonction globale</i>	15
<i>Diagramme de cas d'utilisation (uc)</i>	15
<i>Diagramme des exigences (req)</i>	15
<i>Cahier des charges fonctionnel (CdCF)</i>	16
<i>Exigence de Design</i>	17
<i>Exigence d'écoconception</i>	17
2.6 Description structurelle en SysML	18
<i>Diagramme de définition de blocs (bdd)</i>	18
<i>Diagramme de blocs internes (ibd)</i>	18
3 Chaîne fonctionnelle	19
3.1 Energie et puissance	19
3.2 Chaîne de puissance	20
<i>Unité d'alimentation</i>	20
<i>Unité de stockage</i>	21
<i>Pré-actionneur</i>	21
<i>Actionneur</i>	22
<i>Transmetteur⁽²⁾</i>	23
<i>Effecteur</i>	23
3.3 Chaîne d'information	23
<i>Signal analogique, numérique, logique</i>	23
<i>Capteur⁽¹⁾</i>	24
<i>Interface homme - machine (IHM)</i>	24
<i>Unité de commande</i>	25
<i>Interface machine - homme (IMH)</i>	25
<i>Interface de communication</i>	25
3.4 Activité	26
3.5 Chaîne de puissance et chaîne d'information	26

Questions de début de cours **28**

SYSTEMES ASSERVIS

1 Performances d'un système et performances d'un système asservi	31
1.1 Performance d'un système continu	31
1.2 Consignes unitaires	31
1.3 Consigne et réponse	32
1.4 Stabilité des systèmes	32
1.5 Rapidité des systèmes	33
1.6 Précision des systèmes asservis	34
2 Modéliser un SLCI	35
2.1 Fonction de transfert	35

<i>Hypothèses</i>	35
<i>Transformée de Laplace</i>	36
<i>Fonction de transfert</i>	37
<i>Forme canonique</i>	38
2.2 Prévoir le comportement en stabilité	39
<i>Condition de stabilité</i>	39
2.3 Prévoir le comportement en rapidité	39
2.4 Prévoir le comportement en précision	39
<i>Détermination de l'erreur en régime permanent</i>	39
3 Schéma-bloc	40
3.1 Système asservi	40
3.2 Consigne et réponse	41
3.3 Structure d'un système asservi	41
3.4 Chaîne directe et chaîne de retour	42
3.5 IHM	43
3.6 Modèle de connaissance	43
3.7 Simplifier un schéma-bloc	44
<i>Blocs en série</i>	44
<i>Blocs en parallèle</i>	44
<i>Fonction de transfert en boucle fermée : FTBF</i>	44
<i>Fonction de transfert en boucle ouverte : FTBO⁽¹⁾</i>	44
4 SLCI asservi perturbé	46
4.1 Perturbation	46
4.2 Schéma-bloc d'un système perturbé	46
4.3 Théorème de superposition	46
4.4 Stabilité d'un modèle perturbé	47
4.5 Précision d'un modèle perturbé	47
4.6 Schéma-bloc équivalent	48
5 Précision des systèmes asservis	49
5.1 Erreur statique d'un système non perturbé	49
6 Prévoir la réponse à un échelon	50
6.1 Modèle proportionnel	50
6.2 Modèle intégrateur	50
6.3 Modèle dérivateur	50
6.4 Réponse indicielle du 1 ^{er} ordre	51
6.5 Réponse à une rampe du 1 ^{er} ordre	52
6.6 Modèle du 2 ^{ème} ordre	52
<i>$z > 1$ Régime aperiodique (non oscillatoire amorti)</i>	52
<i>$z = 1$ Régime aperiodique critique</i>	52
<i>$0 < z < 1$ Régime pseudo-periodique (oscillatoire amorti)</i>	52
7 Identifier un modèle de comportement	55
7.1 Méthodologie	55
7.2 Identification temporelle d'un 1 ^{er} ordre	56
7.3 Identification temporelle d'un 2 ^{ème} ordre pseudo-periodique	56
7.4 Identification temporelle d'un 2 ^{ème} ordre aperiodique	58
7.5 Réduction de l'ordre d'un modèle	58
8 Analyse fréquentielle	59
8.1 Caractéristiques	59
8.2 Diagramme de Bode	60
8.3 Gain et phase	61
8.4 Filtre, pulsation de coupure et bande passante	62
8.5 Stabilité à partir du diagramme de Bode	62
8.6 Rapidité à partir du diagramme de Bode	63
8.7 Précision à partir du diagramme de Bode	63

9 Réponse fréquentielle	63
9.1 Modèle proportionnel	63
9.2 Modèle intégrateur	63
9.3 Modèle intégrateur de degré 2	63
9.4 Modèle dérivateur	64
9.5 Modèle du 1 ^{er} ordre	64
9.6 Modèle du 1 ^{er} ordre inverse	64
9.7 Modèle du 2 ^{ème} ordre	65
<i>Résonance, pulsation de résonance et facteur de surtension</i>	66
<i>Cas particulier où $z > 1$</i>	66
9.8 Cas général	67
<i>Propriétés des diagrammes de Bode</i>	67
9.9 Méthodologie	67
<i>Méthode de tracé d'un diagramme de Bode</i>	67
<i>Méthode pour identifier un diagramme de Bode</i>	68
9.10 Bilan du comportements temporel et fréquentiel d'un modèle du 2ème ordre	68
Questions de début de cours	69
CINEMATIQUE DES SYSTEMES DE SOLIDES INDEFORMABLES	
1 Introduction	71
1.1 Contexte	71
1.2 La Bugatti Chiron	71
2 Modèle cinématique	72
2.1 Mécanisme	72
2.2 Equivalence solide, repère, espace	72
2.3 Mouvement	72
2.4 Vecteur rotation	73
2.5 Mouvements élémentaires	73
<i>Rotation</i>	73
<i>Translation</i>	73
2.6 Paramètres	73
2.7 Schéma cinématique et graphe des liaisons	73
<i>Modèle cinématique d'un mouvement élémentaire</i>	73
<i>Axe et direction</i>	73
<i>Modèle cinématique</i>	74
<i>Graphe de structure</i>	74
<i>Schéma cinématique</i>	75
3 Trajectoire	75
3.1 Trajectoire	75
4 Mécanique du point	76
4.1 Point coïncident	76
5 Vecteurs position, vitesse et accélération	76
5.1 Vecteur position	76
5.2 Vecteur vitesse	76
5.3 Vecteur accélération	77
5.4 Relation de dérivation vectorielle	77
5.5 Loi horaire	78
5.6 Champ d'un solide indéformable	78
5.7 Mouvement de rotation	79
5.8 Mouvement plan	79
5.9 Champ des vecteurs vitesse d'un solide en translation à trajectoire rectiligne	79
5.10 Méthodologie pour calculer une vitesse	79
6 Torseur	80
6.1 Torseur cinématique	80

6.2	Torseurs particuliers	80
7	Composition des mouvements	81
7.1	Somme des vecteurs vitesse	81
7.2	Somme des vecteurs rotation	81
7.3	Somme des torseurs cinématiques	81
8	Loi entrée-sortie géométrique et cinématique	82
8.1	Paramètres du mouvement	82
8.2	Fermeture angulaire	83
8.3	Fermeture géométrique	83
8.4	Loi entrée-sortie en vitesse	84
8.5	Fermeture cinématique	84
8.6	Linéarisation	84
9	Contacts et liaisons	85
9.1	Liaison	85
9.2	Degré de liberté	85
9.3	Liaisons usuelles	85
9.4	Liaison équivalente	86
9.5	Les contacts	87
9.6	Cinématique du contact ponctuel	87
9.7	Contacts particuliers	88
9.8	Méthodologie pour tracer un schéma cinématique	89
10	Transmission de puissance avec transformation de mouvement	89
10.1	Pignon-crémaillère, pignons-chaînes, poulies-courroie, roue, tambour-câble	89
10.2	Vis-écrou	90
11	Transmission de puissance sans transformation de mouvement	90
11.1	Rapport de transmission	90
11.2	Roues de friction	90
11.3	Poulies-courroie et pignons-chaîne	91
11.4	Engrenage	91
11.5	Train d'engrenages simple	93
11.6	Train épicycloïdal	93
11.7	Accouplements mécaniques	95
ANNEXE		96
	Produit scalaire	96
	Figure de calcul	96
	Produit vectoriel	97
	Produit mixte	97
	Champ vectoriel	97
	Torseur	98
	Applications	98
	Questions de début de cours	99
	ACTIONS MECANIQUES	
1	Modélisation des AM	102
1.1	Concept d'action mécanique	102
1.2	Graphe de structure	102
1.3	Modélisation globale des AM	103
1.4	Modéliser les AM usuelles	104
2	Statique	108
2.1	Théorème de l'équilibre	108
2.2	Théorème d'un système soumis à 2 torseurs glisseurs	108
2.3	Théorème d'un solide soumis à 3 torseurs glisseurs	109
2.4	Hypothèse problème plan	109

2.5	Méthodologie pour une étude statique	110
3	Loi entrée-sortie en effort	111
3.1	Loi entrée-sortie en effort d'un transmetteur	111
3.2	Hypothèses	111
3.3	Loi entrée-sortie des transmetteurs usuels sans transformation de mouvement	111
3.4	Loi entrée-sortie des transmetteurs usuels avec transformation de mouvement	112
4	Modélisation des AM avec frottement	112
4.1	Phénomène de frottement	112
4.2	Modélisation globale des AM sans frottement	112
4.3	Modélisation globale des AM avec frottement	113
5	Modélisation locale des AM	116
5.1	AM à distance et de contact	116
5.2	Modèle local d'une AM à distance	117
5.3	Modèle local d'une AM de contact	117
5.4	Relation entre le modèle local et le modèle global	118
	Questions de début de cours	119

SYSTEMES A EVENEMENTS DISCRETS

1	Diagramme d'état (stm)	122
1.1	Présentation	122
1.2	État et ses activités associées	123
1.3	Franchissement des transitions	123
1.4	Evènement	124
1.5	Garde	124
	<i>Equation logique</i>	125
1.6	Effet	125
1.7	Pseudos-états	125
1.8	Pseudo-état initial 	125
1.9	Pseudo-état final 	125
1.10	Pseudo-état jonction 	125
1.11	Pseudo-état décision 	126
1.12	État composite	126
1.13	Historique d'un état composite	127
1.14	État composite orthogonal	127
2	Diagramme de séquence (sd)	128
2.1	Diagramme de séquence	128
3	Mesurer et coder une position angulaire	129
3.1	Familles de capteurs	129
3.2	Vocabulaire de métrologie	130
3.3	Les codeurs	130
	<i>Codeur incrémental (ou roue codeuse)</i>	130
	<i>Codeur absolu (ou numérique)</i>	131
	<i>Code binaire</i>	132
	<i>Code Gray</i>	132
3.4	Systèmes de numération	132

THEORIE DES MECANISMES

1	Paramétrage	134
1.1	Poser les variables	134
1.2	Mobilité et degré de liberté	134
2	Approche cinématique	134
2.1	Nombre de cycles indépendants	134
2.2	Nombre d'équations	135

2.3	Nombre d'inconnues	135
2.4	Indice de mobilité	135
2.5	Degré de mobilité	136
2.6	Degré de statisme	136
2.7	Interpétation et remédiation	138
3	Approche dynamique	138
3.1	Nombre d'équations	138
3.2	Nombre d'inconnues	138
3.3	Indice de mobilité	138
3.4	Degré de statisme	139
3.5	Degré de mobilité	139
4	Approche globale	141
4.1	Synthèse	141
4.2	Quelle approche privilégier ?	141
4.3	Isostatisme et hyperstatisme	142
4.4	Exemple de rédaction	142
	Questions de début de cours	143
	DYNAMIQUE ET ENERGETIQUE DES SYSTEMES DE SOLIDES INDEFORMABLES	
1	Contexte	145
1.1	Gyroscope de précision de Dr Nozman (feat Squeezie)	145
1.2	Modèle cinématique	145
2	Inertie	146
2.1	Masse	146
2.2	Moment d'inertie	146
	<i>Mécanique du point</i>	146
	<i>Définition scalaire</i>	146
	<i>Changement d'axe de rotation</i>	147
2.1	Opérateur d'inertie	147
	<i>Définition vectorielle d'un moment d'inertie</i>	147
	<i>Matrice associée à l'opérateur d'inertie</i>	147
	<i>Axes principaux d'inertie</i>	148
	<i>Changement de point</i>	148
	<i>Changement de base</i>	149
	<i>Solides de formes élémentaires</i>	149
3	Quantité de vitesse et quantité d'accélération	151
	<i>Mécanique du point</i>	151
3.1	Torseur cinétique	151
3.2	Torseur dynamique	152
	<i>Du torseur cinétique au torseur dynamique</i>	152
3.3	Système de solides indéformables	153
3.4	Méthodologie	153
	<i>Cas particuliers</i>	153
4	Energie cinétique	154
	<i>Mécanique du point</i>	154
4.1	Expression générale	154
	<i>Solide en translation</i>	155
	<i>Solide en rotation autour d'un axe immobile dans R</i>	155
4.2	Système de solides indéformables	155
4.3	Masse et moment d'inertie équivalent	156
5	Dynamique des solides	156
5.1	Principe fondamental de la dynamique	156
5.2	Théorème des actions réciproques	157
5.3	Théorèmes de l'équilibre	157





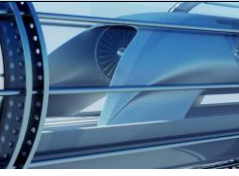
5.4	Equilibrage	160
6	Puissance	160
6.1	Puissance d'une action mécanique	160
6.2	Puissance des interefforts	161
6.3	Rendement	161
6.4	Puissance des interefforts de liaison	161
7	Théorème de la puissance cinétique	161
7.1	1 solide	161
7.2	2 solides	162
7.3	n solides	163
ANNEXE		164
	Applications	164
	Notations	164
	Questions de début de cours	164
	PERFORMANCES DES SYSTEMES ASSERVIS	
1	Systèmes commandés, systèmes asservis et perturbations	166
1.1	Schéma-bloc d'une grandeur asservie perturbée	166
1.2	FTBO et FTBF	167
2	Stabilité des systèmes	168
2.1	Conditions de stabilité – critère algébrique	168
	<i>Condition nécessaire et suffisante de stabilité</i>	168
2.2	Réduction de l'ordre d'un modèle	169
	<i>Condition nécessaire de stabilité</i>	169
2.3	Conditions de stabilité – critère graphique	169
	<i>Point critique</i>	169
	<i>Critère du revers dans le plan de Black – hors programme</i>	170
2.4	Marge de phase et marge de gain des systèmes asservis	170
3	Rapidité des systèmes	171
3.1	Détermination graphique du temps de réponse à 5%	171
3.2	Temps de réponse d'un 1 ^{er} ordre	172
3.3	Temps de réponse d'un 2 nd ordre	172
4	Précision des systèmes asservis	173
4.1	Erreur statique d'un système non perturbé	173
4.2	Erreur statique due à la perturbation	174
5	Améliorer les performances en corrigeant la commande	174
5.1	Correcteur proportionnel P	175
5.2	Correcteur intégral I	176
5.3	Correcteur proportionnel intégral PI	176
5.4	Correcteur à retard de phase (ou correcteur PI réel)	177
5.5	Correcteur dérivé D et proportionnel dérivé PD	178
5.6	Correcteur à avance de phase (ou correcteur PD réel)	179
5.7	Correcteur proportionnel intégral dérivé PID	179
5.8	Bilan des performances des correcteurs	180
	Questions de début de cours	181

Ingénierie système

1 Introduction

1.1 Contexte





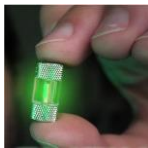
9 milliards d'hommes et de femmes vivront en 2050, dont 75% dans les villes.
 Les grands enjeux du 21^{ème} siècle seront :

Accès à la santé	Accès à l'énergie	Accès à la communication	Accès à l'eau et à la nourriture	Accès aux transports
				
Robot Davinci	Hydrolienne	Projet Starlink	Projet Agricol	Projet Hyperloop




Nous consomons des densités énergétiques de plus en plus grandes :

(1) Tonne d'équivalent pétrole :

$$1 \text{ tep} \approx 4,18 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

1 tep de bois	1 tep de charbon	1 tep de pétrole	1 tep de fission nucléaire	1 tep de fusion nucléaire
				
3,1 tonnes	1,4 tonnes	955 kg	240 mg	24 mg

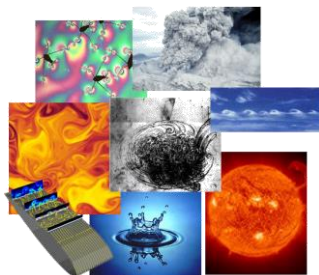
Nous consomons de plus en plus de puissance de calcul :

1945 – L'ENIAC, le premier ordinateur	2018 – Summit, le superordinateur d'IBM	2019 – Sycamore, processeur quantique de Google
		
30 t, 167m ² , 150kW, pouvant effectuer 5000 additions par seconde	9 216 processeurs et 27 648 cartes graphiques 200 pétaFLOPS (200.10 ¹⁵ flop/s)	53 qubits, 1cm ² , réalise un calcul en 3 min là où un superordinateur mettrait 10 000 ans

(2) Un objet technique est un objet fabriqué par l'homme, contrairement à un objet naturel.

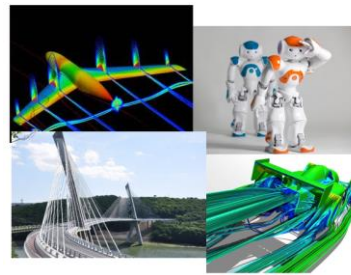
Les réponses à ces défis ne sont pas uniquement politiques ou économiques... elles sont aussi **scientifiques et technologiques**⁽²⁾.

Les sciences physiques : Génie de la nature



Comprendre et maîtriser les phénomènes qui nous entourent

Les sciences industrielles de l'ingénieur : Génie de l'homme



Comprendre et maîtriser nos réalisations

Avant d'être capable de concevoir des systèmes, il faut commencer par être capable de les étudier !

1.2 Le cœur artificiel CARMAT

Le cœur artificiel est-il viable ?
<https://sciencesindustrielles.com/coeur-artificiel-est-il-viable>



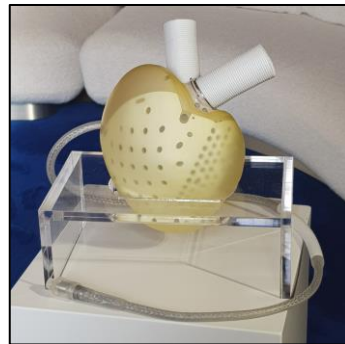
L'entreprise française **Carmat** est à la pointe de l'innovation mondiale en ayant implanté le premier **cœur artificiel** en 2013. L'intervention a consisté à explanter la prothèse Carmat que le patient avait reçue, puis à lui transplanter un greffon de cœur.

Carmat est le premier cœur artificiel capable d'imiter la physiologie naturelle du cœur humain. Il est conçu pour remplacer le cœur chez les patients atteints d'insuffisance cardiaque en phase terminale, que ce soit dans l'attente d'une greffe ou de façon définitive.

C'est **Claude Wartelle**, un ingénieur Arts et Métiers promotion Lille 1964 (Concours Centrale-Supélec), qui est à l'origine du cœur bio-artificiel Carmat inventé en collaboration avec le chirurgien **Alain Carpentier**. La conception d'une prothèse est délicate, il y a de fortes contraintes chimiques et de performances à respecter. En effet, il faut tenir compte de l'hémo-compatibilité des composants, de l'espace disponible dans la cage thoracique ou encore de l'activité du corps.



Claude Wartelle



Cœur artificiel CARMAT

Pour l'instant, 16 patients ont été greffés par l'équipe médicochirurgicale. Leur espérance de vie est comprise entre 3 et 9 mois, mais chaque opération engendre des progrès significatifs de conception par retour d'expérience.

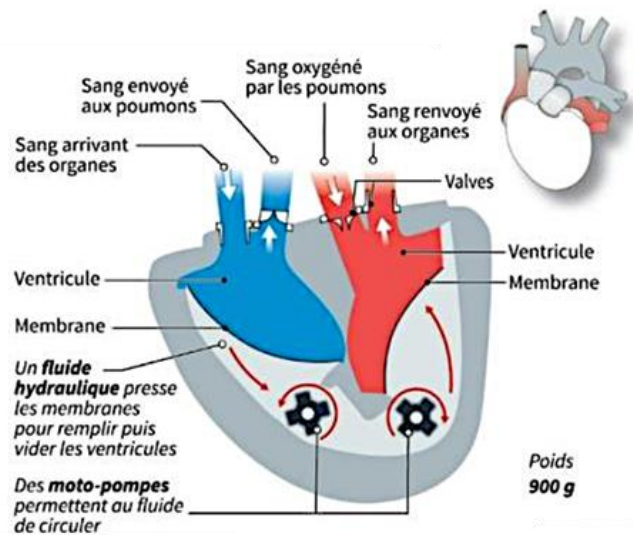


Schéma de la prothèse

Pour mieux comprendre le fonctionnement du cœur prothétique Carmat, nous avons besoin de le *modéliser*, c'est-à-dire, de représenter ce système grâce aux nombreux outils scientifiques que nous possédons (lois physiques, schémas cinématiques, ...). Il faudra ensuite le valider expérimentalement.

La formation en Sciences Industrielles de l'Ingénieur (SII) en CPGE a pour objectif d'apprendre aux futurs élèves ingénieurs à aborder méthodiquement cette complexité. Pour cela, les compétences suivantes seront développées au cours des 2 années de CPGE :

- analyser** *Analyser les fonctions et la structure des systèmes complexes pluri-technologiques rencontrés.*
- modéliser** *Proposer une représentation équationnelle d'un système en vue d'une simulation.*
- résoudre** *Réaliser une simulation manuelle (calculs) ou assistée par logiciel pour pouvoir prévoir le comportement d'un système.*
- expérimenter** *Réaliser des mesures sur un système réel pour valider le comportement anticipé par simulation.*
- concevoir** *Proposer une évolution matérielle ou logicielle pour améliorer le comportement d'un système et la réaliser.*
- communiquer** *Traiter des informations et mettre en œuvre une communication.*

2 Décrire les fonctions et la structure d'un système en SysML

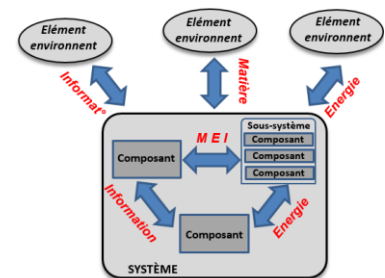
2.1 Systèmes pluri-technologiques

Un **système** est une **association structurée d'éléments** (sous-systèmes ou constituants) qui **interagissent** d'une manière **organisée** pour accomplir une **fonction globale**.

Un système est dit **complexe** et **pluri-technologique** lorsque les éléments sont nombreux et les interactions MEI (échanges de matière, d'énergies ou d'informations) de formes différentes.

Tout système s'insère dans un **milieu environnant**

Exemples : quelques systèmes complexes multiphysiques du laboratoire



Cordeuse de raquette de Tennis	Direction assistée de voiture	Pilote automatique de bateau	Drone	Hemomixer médical	Pompe de centrale nucléaire

2.2 Frontière d'étude

La **frontière d'étude** permet de définir le système étudié. Elle permet de distinguer ses constituants ou **sous-systèmes internes** de **l'environnement extérieur**.

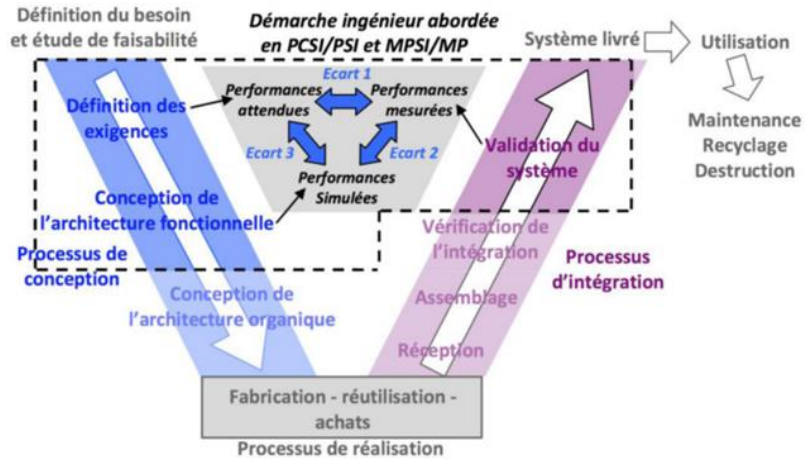
Un système n'est jamais isolé de l'extérieur, mais au contraire il interagit avec lui. Il doit s'adapter aux contraintes de son environnement.

2.3 Cycle de vie d'un système et démarche de l'ingénieur

Le **cycle de vie** recense les **différentes étapes** de la vie d'un système, de l'identification **du besoin** à l'origine de sa conception **jusqu'au recyclage** de ses constituants lorsqu'il n'est plus utilisé.

Il se compose de **phases de vie**, par exemple ; **conception, fabrication, transport, distribution, utilisation, maintenance, fin de vie...**

Le cycle en V présente graphiquement ces étapes :



(1) la démarche et les objectifs proposés sont donc indissociables d'analyses et mesures expérimentales réalisées sur systèmes réels.

2.4 Les outils de modélisation système

(2) Grâce à internet, et en particulier au « Cloud », tous les documents peuvent maintenant être partagés en temps réel avec tous les collaborateurs.

Le travail des différents acteurs intervenant lors des étapes du cycle de vie d'un système est collaboratif⁽²⁾ et souvent multi-sites.

Cela signifie que de nombreux acteurs, répartis sur plusieurs pays, doivent en permanence être informés et tenir compte des évolutions initiées par d'autres.

Dans ce contexte, les entreprises utilisent des outils communs de communication et de définition du produit :

- un **jumeau numérique** unique et partagée ;
- **langage** unique et compréhensible par tous les métiers ;
- **modélisations** du système basées sur cette maquette et ce langage.



Bureau d'études Dassault Aviation

(3) Airbus, Thalès, Alstom...

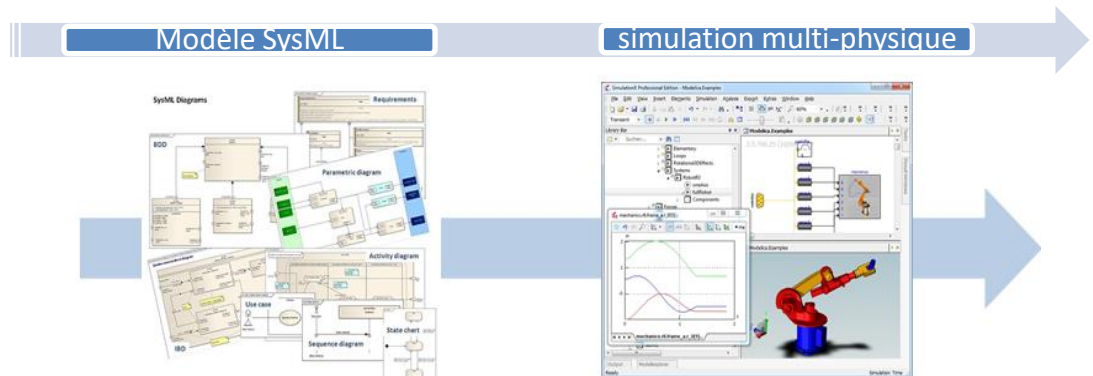
Une des solutions vers laquelle se tournent certaines entreprises⁽³⁾ est le langage **SysML** (Systems Modeling Language), **langage de description** de l'ingénierie système.

C'est un langage adapté de l'UML utilisé en ingénierie informatique.

Le **langage SysML** a l'avantage de proposer différents outils de description graphique (diagrammes), permettant de modéliser le système dans les différentes phases du cycle. **Ces diagrammes interagissent entre eux⁽⁴⁾** grâce à des logiciels dédiés, ce qui permet de répercuter immédiatement toute modification à l'ensemble des acteurs concernés par le projet.

(4) Même s'ils sont de domaines physique différents.

Maquettes numériques et diagrammes sont complétés par des **logiciels de simulation**. Grâce à ces derniers, on peut anticiper la façon dont va se comporter un système avant même d'avoir réalisé un premier prototype.



(1) Les diagrammes qui seront abordés dans ce cours peuvent être utilisés pour concevoir ou améliorer un système.

2.5 SysML

Cependant, à notre niveau, nous les utiliserons pour analyser un système déjà existant.

En CPGE, concernant ces outils de l'ingénierie système :

- vous utiliserez des maquettes numériques dans un logiciel professionnel (SolidWorks) ;
- vous utiliserez certains diagrammes⁽¹⁾ du langage SysML permettant de décrire les fonctions et la structure matérielle des systèmes étudiés ;
- vous réaliserez des simulations numériques afin d'évaluer les performances de ces systèmes.

L'analyse fonctionnelle permet, pour un système correctement isolé de son **milieu extérieur** à l'aide d'une **frontière d'étude**, de décrire le **besoin** auquel il répond et de définir les **contraintes** auxquelles il doit s'adapter.

Dans la démarche d'**ingénierie système**, c'est une étape indispensable pour **s'assurer** que le **système** à concevoir **répondra** le mieux possible aux **besoins** de ses futurs **utilisateurs**.



Analyse du besoin

L'**Analyse du Besoin** est une méthode qui permet de **caractériser** le **besoin** exprimé, c'est à dire le **qualifier** et le **quantifier** avec des grandeurs mesurables.

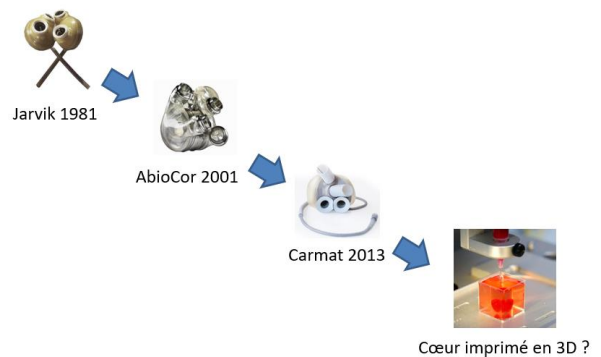
Afin de valider l'expression du besoin, il convient de se demander lorsqu'on étudie ou on conçoit un système :

- Pourquoi le produit existe-il ?
- A qui rend-il service ?
- Quel est son but ?
- Qu'est ce qui pourrait faire évoluer le besoin ?
- Qu'est-ce qui pourrait faire disparaître le besoin ?

Exemple : évolution technologique de rupture du cœur artificiel

Plusieurs évolutions sont envisageables. Actuellement, les pulsations de la prothèse suivent l'activité physique. Mais bientôt des capteurs iront chercher l'information dans les nerfs pour qu'elle réagisse aux émotions ressenties par le patient.

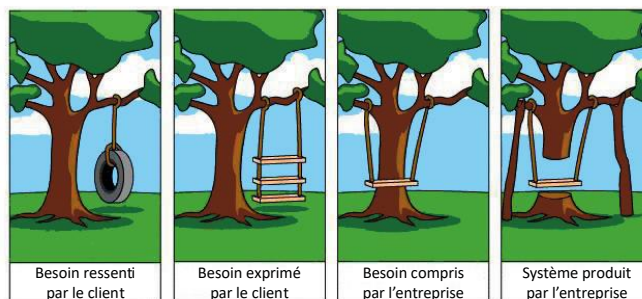
Il est également possible de simplifier la conception avec le procédé d'impression 3D. Ce qui diminuera légèrement la masse de la prothèse pour se rapprocher de celle d'un cœur naturel.



(2) Enquêtes, sondages et études de marché participent à cette définition.

Estimer le besoin des clients potentiels⁽²⁾ est donc indispensable, mais complexe car le

besoin est en évolution constante sous l'effet des changements économiques, sociaux et environnementaux, et des innovations.



Une entreprise recherche l'adéquation entre le besoin du client et la manière dont le système produit y répond, c'est-à-dire les fonctions qu'il propose. Besoin et fonction réalisées doivent être formalisés.

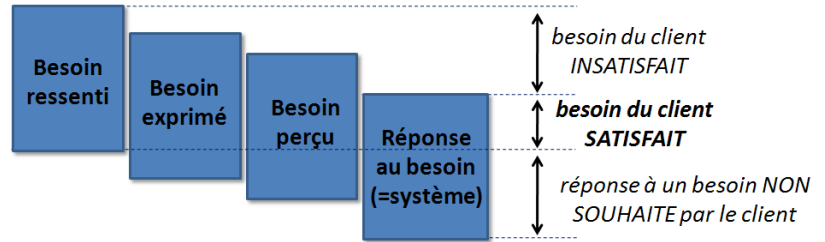
(3) Définition de la norme NF X50 - 150

Un **besoin** est une nécessité, un désir éprouvé par un utilisateur.⁽³⁾

Caractériser le besoin, c'est le **qualifier** et le **quantifier**.

Cette formalisation permet d'estimer le taux de satisfaction attendu.

On cherche à satisfaire le besoin du client.



Fonction globale

La **fonction globale** d'un système est la « **raison d'être** » du système, du point de vue de l'utilisateur.

Elle ne doit pas induire de solutions technologiques.

Diagramme de cas d'utilisation (uc)

Le **diagramme de cas d'utilisation** (*Use Case Diagram – uc –*) est un diagramme **fonctionnel** qui définit :

- les différents types d'utilisateurs, nommés **acteurs**⁽¹⁾
- les **fonctions attendues** par ses acteurs.

Il permet de **formaliser le besoin**.

(1) Ces acteurs peuvent être des humains ou non, principaux ou secondaires.

Il permet d'avoir le point de vue utilisateur.

Il exprime uniquement les fonctionnalités visibles de l'extérieur.

Un acteur est ce qui est en interaction avec le système.

Exemple : Diagramme de cas d'utilisation du cœur artificiel

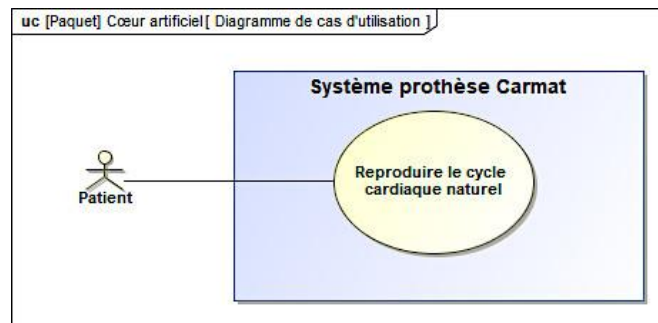


Diagramme des exigences (req)

Une exigence exprime une **fonction, une règle, une contrainte, ou une performance à satisfaire** par le système.

Le **diagramme des exigences** (*Requirement Diagram – req –*) est un diagramme général qui regroupe hiérarchiquement ces **exigences**.

Une **exigence** est **caractérisée** par⁽²⁾ :

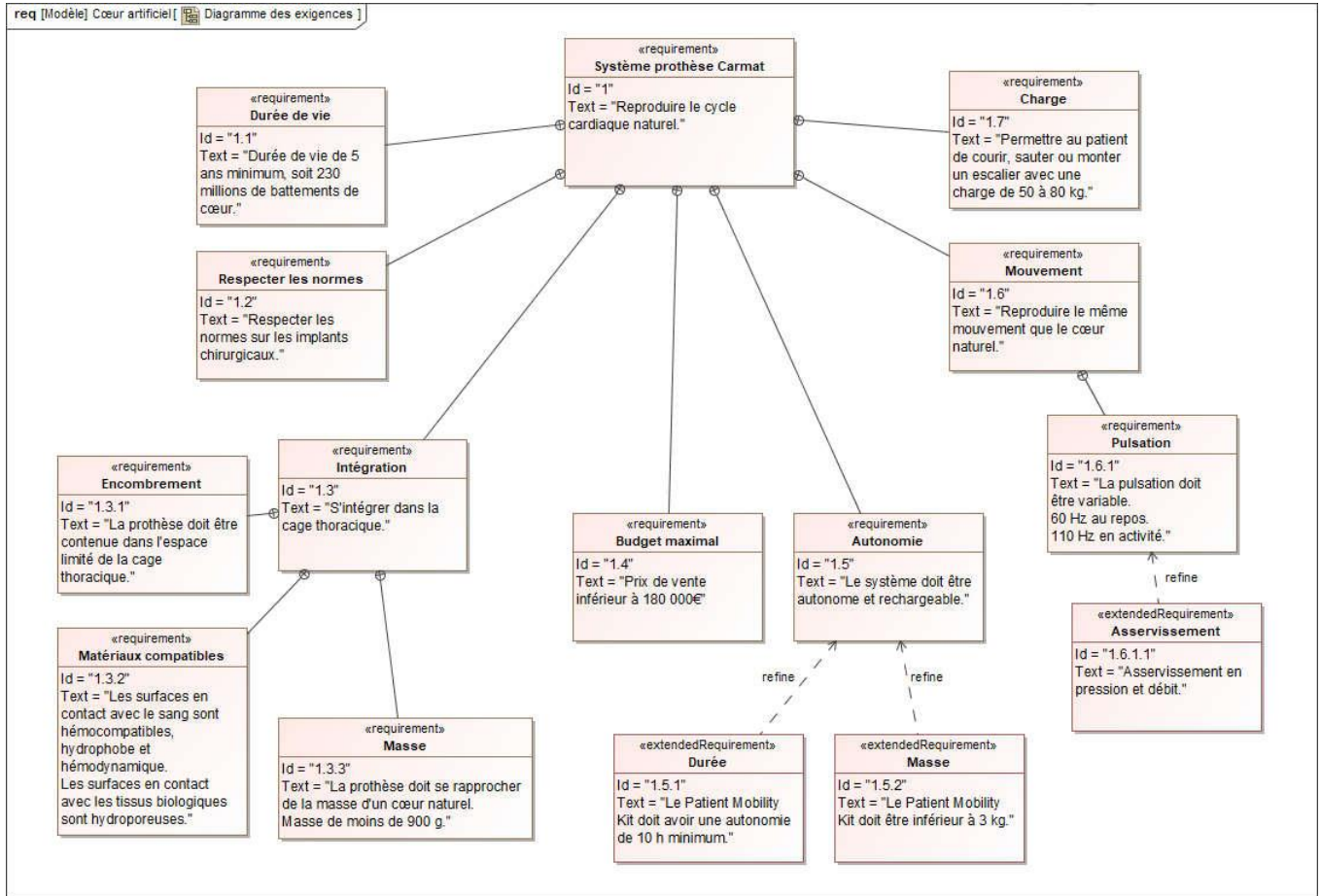
- un **critère** (grandeur⁽³⁾ physique mesurable) ;
- un **niveau** (valeur max/min chiffrée) ;
- une **flexibilité** (l'écart acceptable sur le niveau attendu).

(2) Ces informations sont inscrites directement à l'intérieur des blocs du diagramme des exigences ou dans un tableau associé.

Exemple : Diagramme des exigences du cœur artificiel

La conception d'une prothèse est délicate, il y a de fortes contraintes chimiques et de performances à respecter. En effet, il faut tenir compte de l'hémo-compatibilité des composants, de l'espace disponible dans la cage thoracique ou encore de l'activité du corps. On utilise le diagramme des exigences pour lister les exigences attendues.

(3) La beauté n'est pas une grandeur car elle n'est pas mesurable. Cependant, on peut lui associer des critères, qui eux, le sont.

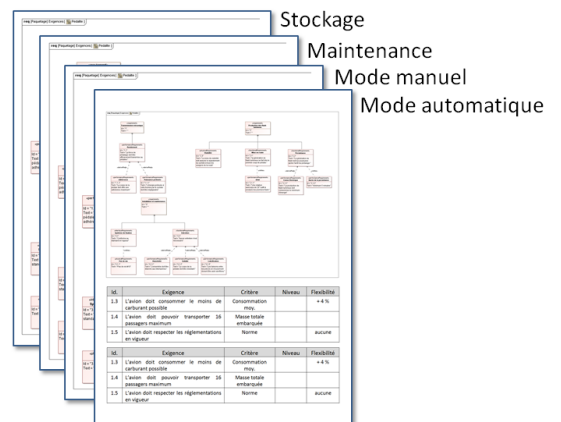
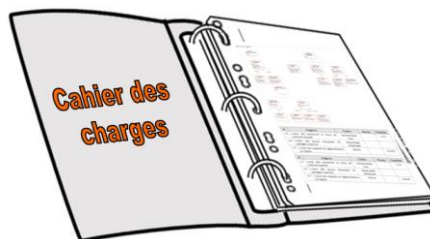


Exemple : pour le cœur artificiel, on peut proposer le tableau partiel suivant :

Id.	Exigence	Critère	Niveau	Flexibilité
1.2	Respecter les normes sur les implants chirurgicaux	Norme NF EN ISO 14708	Respect total	Aucune
1.3.3	La prothèse doit se rapprocher de la masse d'un cœur naturel	Masse	900 g	max
1.5	Le système doit être autonome et rechargeable.	Durée d'autonomie	10 h	10 %

Cahier des charges fonctionnel (CdCF)

Un diagramme des exigences doit être établi pour chacun des **modes** et chacune des **phases de vie** du système.



(1) Le CdCF stipule...

La loi dispose...

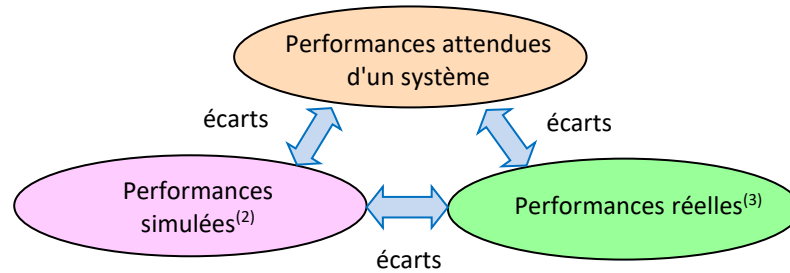
Un **Cahier des Charges Fonctionnel**⁽¹⁾ (CdCF) est un document qui expose l'ensemble des exigences qui doivent être satisfaites par le système et leurs caractéristiques (critère, niveau, flexibilité).

En entreprise, le CdCF sert de contrat entre le client et le fournisseur.

Du point de vue du client, chaque ligne permet un contrôle de la prestation fournie, et du point de vue du fournisseur, chaque ligne induit un niveau d'exigence à la conception.

C'est un document clé de l'expertise industrielle utilisé pour les consultations, les appels d'offres, les marchés négociés, la conception...

En CPGE, ce sont les données issues de ce CdCF qui vont nous permettre de quantifier les écarts entre :



(2) Manuelles ou assistées par ordinateur.

(3) Mesurées expérimentalement en TP.

Exigence de Design

Le **design** est une **activité de création** à vocation industrielle ou commerciale, situés à la croisée de l'**art**, de la **technique** et de la **société**.

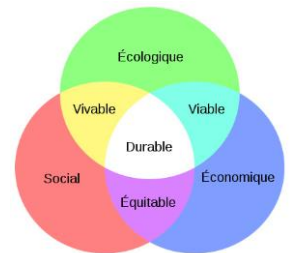
Dans sa part artistique, il repose sur un travail sur les formes et qui peut concerner des formes spatiales, volumiques, textiles, graphiques, interactives.



Exigence d'écoconception

Le **développement durable** est un mode de développement qui répond aux besoins des générations présentes sans compromettre la capacité des générations futures de répondre aux leurs.

L'**Analyse de Cycle de Vie** (norme ISO 14040) est un outil qui permet de réduire les **impacts environnementaux**⁽⁴⁾ que va avoir le système lors de toutes les étapes de son cycle de vie, allant depuis l'extraction des matières premières jusqu'à son traitement en fin de vie.



(4) Par exemple : eutrophisation de l'eau, épaissement des ressources naturelles, production de déchets dangereux, acidification de l'air, destruction de la couche d'ozone, l'effet de serre...

(5) On ne s'intéresse ici qu'à la phase de vie de fabrication, on pourrait aussi étudier le transport, la maintenance, le recyclage...

Exemple : ACV – fabrication d'une éolienne⁽⁵⁾

- Pour construire des éoliennes il faut des métaux (acier pour la structure, 16 tonnes de cuivre pour la raccorder au réseau électrique...) et des métaux rares.
- Pour produire 1kg de cuivre, produit par exemple dans la plus grande mine du monde au Chili, il faut : laver le minerai avec de l'eau, de l'électricité et des routes commerciales.
- Or dans le désert d'Atacama, il n'y en a pas d'eau. Il faut donc construire des pipelines pour pomper l'eau de l'océan et la dessaliniser.
- Cette centrale de dessalination doit être alimentée en électricité.
- Cette électricité est produite par une centrale électrique qui tourne au charbon (40%).
- Ce charbon vient de Colombie et de Nouvelle Zélande et est extrait avec de l'électricité.
- Cette électricité est produite avec le charbon.



Il n'y a pas d'énergie propre et d'énergie sale, il y a des ressources et des choix. Si on remplace une énergie par une autre, on déplace des prélèvements de ressources et des impacts environnementaux.

2.6 Description structurelle en SysML

L'analyse structurelle permet de définir les **constituants internes** au système et comment ceux-ci interagissent.

Diagramme de définition de blocs (bdd)

(1) Parfois le chiffre est 0..* : Contrainte de multiplicité. Le produit peut contenir de 0 à * ...

Le **diagramme de définition de blocs**⁽¹⁾ (bdd) est un diagramme **structurel** qui permet de réaliser l'**inventaire** des constituants qui constituent le système en le décomposant en **sous-systèmes**, puis en **constituants élémentaires** par une **analyse descendante**.

Le bdd permet d'avoir un premier aperçu, plus ou moins détaillé de la structure du système.

Exemple : Diagramme BDD du cœur artificiel

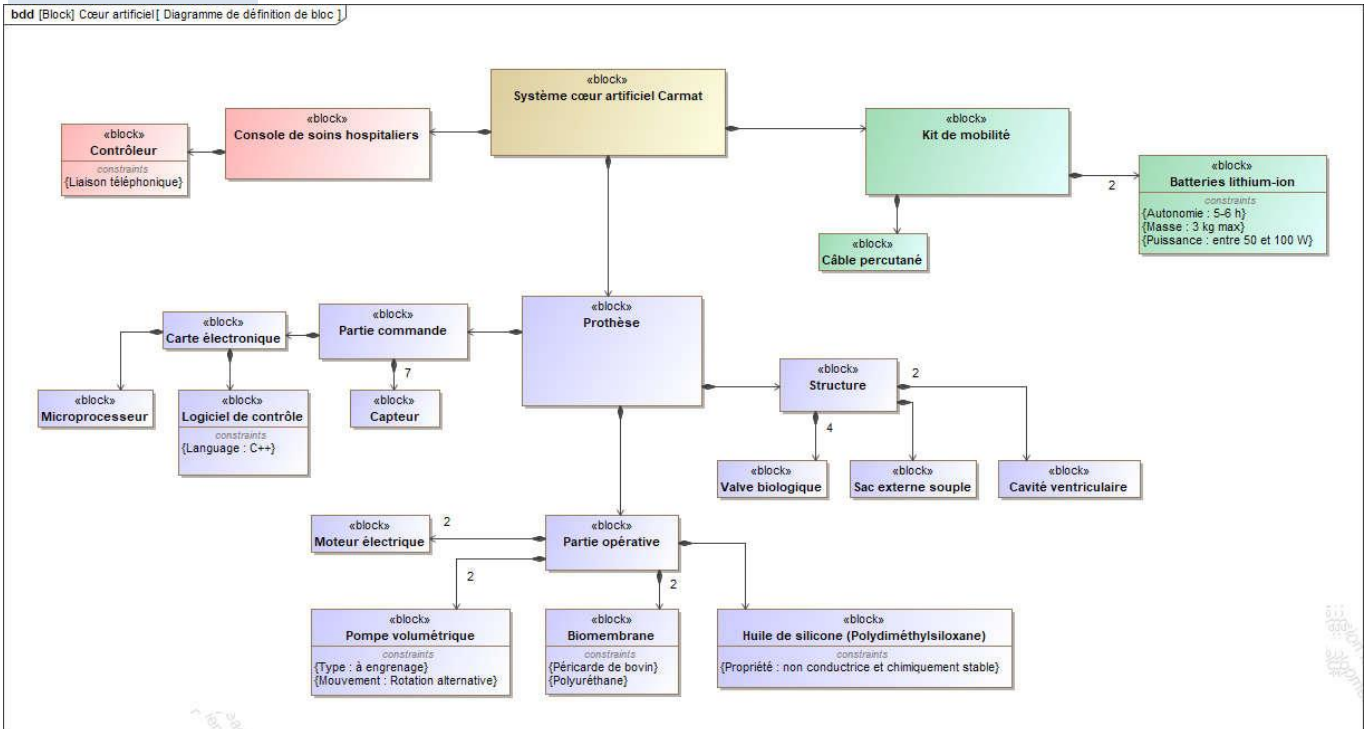


Diagramme de blocs internes (ibd)

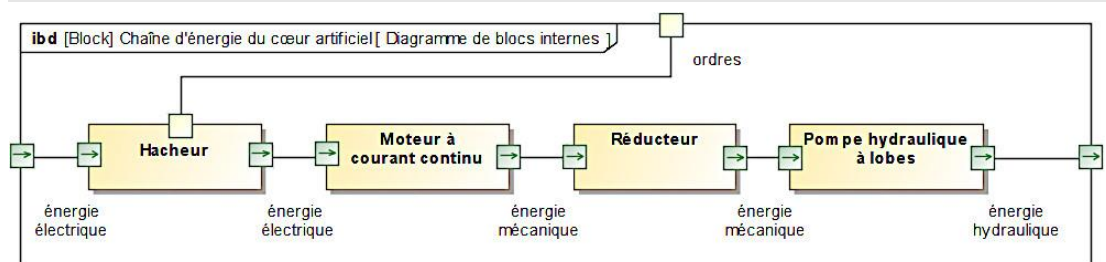
Le **diagramme de blocs internes** est un diagramme **structurel** qui permet d'identifier les **échanges** de matière, d'énergie et d'information (MEI) entre les constituants.

- ports modélisant les flux MEI (hors informations logiques) ;
- ports modélisant des services (informations logiques).

Avec ce type de diagramme, on peut, comme pour le diagramme de définition de blocs, faire le choix de décrire la structure d'un système avec différents niveaux de raffinement.

Dans le cas d'un système complexe, on évite de concentrer toutes les informations sur un seul et même diagramme de blocs internes ce qui le rendrait illisible. On construit alors autant de diagrammes de définition de blocs que l'on souhaite avec des niveaux de précision et de raffinement différents⁽²⁾.

Exemple : Diagramme IBD partiel du cœur artificiel



(2) Grâce aux logiciels dédiés au langage SysML, on connecte ensuite les différents diagrammes entre eux. Certains blocs sont liés à d'autres diagrammes qui viennent détailler leurs contenus.

3 Chaîne fonctionnelle

3.1 Energie et puissance

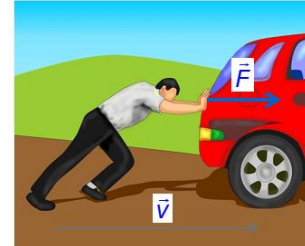
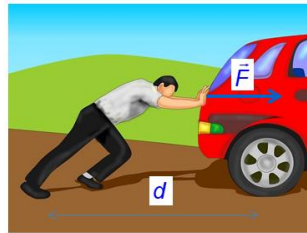
L'énergie et la puissance sont deux notions qui, bien que liées, sont différentes.

Exemple

Pour déplacer la voiture de masse m sur une distance d , il faut fournir une certaine quantité d'énergie E (ou un certain travail W).

Cette quantité d'énergie à fournir est la même quelle que soit la vitesse de déplacement.

Plus la vitesse de déplacement de la voiture est grande, plus la puissance fournie instantanément est grande, et plus vite la voiture sera déplacée.



(1) La puissance d'un moteur est sa capacité à convertir de l'énergie.

Le travail ou l'énergie représente ce qu'il faut fournir globalement à un système pour l'amener d'un état initial à un état final. Les moyens utilisés, le temps nécessaire ou la manière dont le chemin est parcouru entre ces deux états n'ont pas d'importance. L'unité dans le système international est le **joule (J)**.

1 J = 1 N.m = 1 kg levé de 10cm, ou 100 g levé de 1 m.

1 kJ = énergie nécessaire à un enfant (30 kg) pour monter un étage (environ 3 m).

8,6 kJ = énergie stockée dans une pile LR06 AA rechargeable (1,2 V 2 Ah).

50 kJ = énergie dégagée par la combustion d'un gramme d'essence.

1,7 MJ = énergie stockée dans une batterie de voiture courante (12 V 40 Ah).

1,8 GJ = énergie contenue dans un réservoir moyen (50 litres) d'essence.



La puissance caractérise le **débit d'énergie** fourni à chaque instant.

Elle **ne dépend ni de l'état initial ni de l'état final** du système, mais permet de décrire les flux d'énergie entre ces deux états.

C'est donc une **grandeur instantanée**.

L'unité dans le système international est le **watt (W)** (**1 W = 1 J.s⁻¹**)

NB : dans le domaine automobile, 1 cheval = 736W

6 mW = puissance d'une diode électroluminescente témoin, rouge standard (1,8 V 20 mA).

100 W = puissance moyenne approximative utilisée par un corps humain au repos.

150 W = puissance de sortie d'un panneau solaire photovoltaïque d'un mètre carré en plein soleil.

400 W = puissance typique d'un PC.

2 kW = puissance d'un radiateur électrique.

3 kW = puissance d'une machine à laver le linge.

40 kW (55 ch) à 225 kW (306 ch) = puissance de sortie approximative des automobiles (750 ch pour une formule 1 !)

500 kW = puissance nominale d'une éolienne avec un rotor de 40 m de diamètre, et un vent de 43 km/h (12 m/s).

9,1 MW = puissance de sortie mécanique d'un TGV duplex alimenté en 25 kV alternatif.

50 MW = puissance consommée par les serveurs de Google.

117 MW = puissance totale (propulsion et besoins divers) du paquebot Queen Mary 2.

240 MW = puissance de l'usine marémotrice de la Rance en France.

1 GW = puissance électrique moyenne d'un réacteur nucléaire d'une centrale nucléaire moderne.

1,6 GW = puissance électrique d'un réacteur pressurisé européen (EPR).

101,6 GW = pic de consommation électrique enregistré en France le 8 février 2012 à 19h00.

136,3 GW = capacité totale installée d'EDF, premier producteur mondial, en 2010.



La puissance, notée P une grandeur scalaire, est toujours le **produit de deux grandeurs variables**, scalaires ou vectorielles, dépendant du temps.

L'une d'entre elle est appelée **flux** et notée f , l'autre est appelée **effort** et notée e .

$$\text{On a alors : } P(t)=e(t).f(t) \text{ ou } P(t)=\vec{e}(t).\vec{f}(t)$$

Ces deux termes sont génériques. Le tableau suivant précise l'effort et le flux dans les domaines usuels :

Puissance	Grandeur effort $e(t)$	Grandeur flux $f(t)$
électrique	tension $u(t)$ en V	intensité $i(t)$ en A
mécanique de translation	force $F(t)$ en N	vitesse linéaire $V(t)$ en m/s
mécanique de rotation	couple ⁽¹⁾ $C(t)$ en $N.m$	vitesse angulaire $\omega(t)$ en rad/s
hydraulique ou pneumatique ⁽²⁾	pression $\Delta p(t)$ en Pa	débit volumique $q_v(t)$ en m^3/s

(1) Couple : « effort tournant »

(2) Hydraulique : liquide (huile)

Pneumatique : gaz (air comprimé)

La puissance est le produit des grandeurs effort et flux :

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ V.A} = 1 \text{ N.m/s} = 1 \text{ Pa.m}^3/\text{s}$$

Puissance mécanique de rotation

Le couple $C(t)$ désigne le modèle associé à un effort tournant, en $[Nm]$.

Par exemple, le couple du cycliste sur le vélo, ou le couple de la perceuse sur la vis.

La vitesse angulaire est notée $\omega(t)$ définit la dérivée de la position angulaire $\theta(t)$.



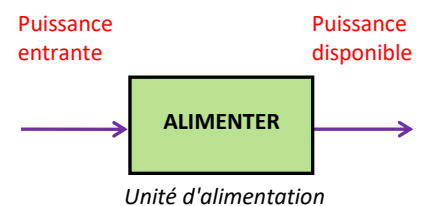
La puissance développée par un moteur est variable. Elle dépend de la charge qu'il doit entraîner.

La **puissance nominale** indiquée sur sa fiche signalétique est la puissance maximale en charge. C'est la puissance à laquelle le moteur peut tourner **en permanence sans surchauffer**.

3.2 Chaîne de puissance

Unité d'alimentation

Fonction : **alimenter** en puissance la chaîne de puissance **aux besoins de l'actionneur**.



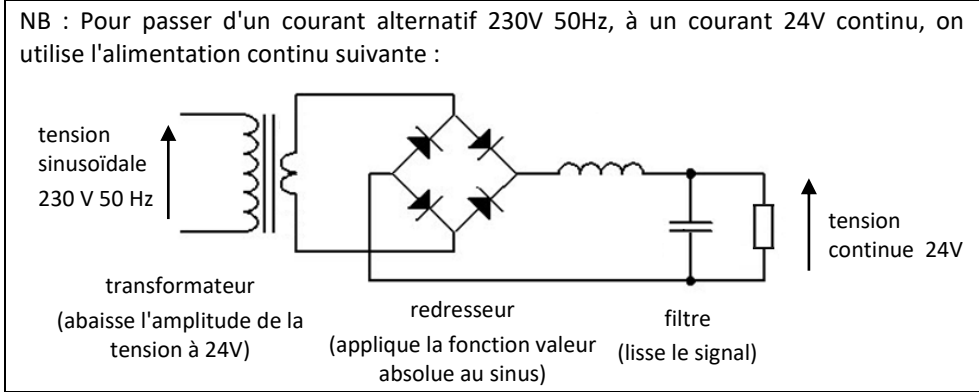
Transformateur



AC-DC Onduleur

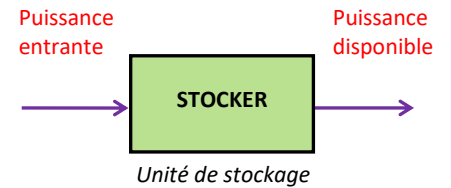


Unité de conditionnement pneumatique



Unité de stockage

Fonction : **stocker** la puissance en vue de rendre le système autonome temporairement.



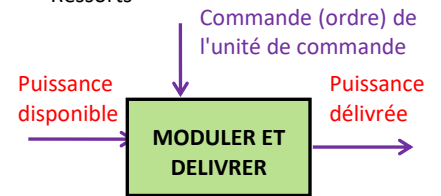
Batterie

Réservoir pneumatique

Ressorts

Pré-actionneur

Fonction : **délivrer et/ou moduler**⁽¹⁾ sur ordre de l'unité de commande, la puissance utile aux actionneurs.



Carte de puissance

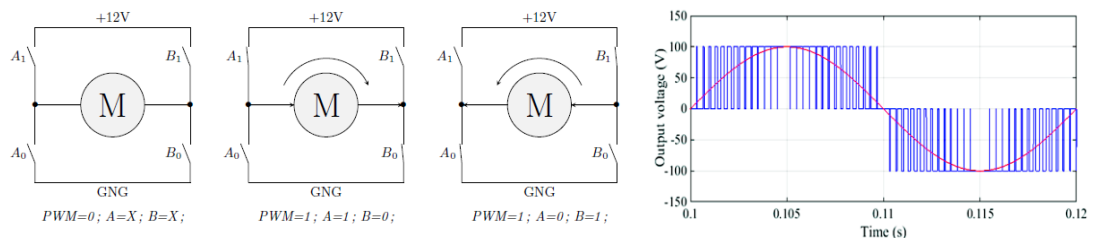
Contacteur

Variateur

Distributeur pneumatique

Certains pré-actionneurs tels que **relais, contacteur, distributeur** sont dits « **tout ou rien** ». Ils jouent le rôle d'interrupteur et **délivrent** la puissance à l'actionneur. Les autres pré-actionneurs tels que **variateur (hacheur), carte de puissance** laissent passer seulement une partie de la puissance disponible. Ils **modulent** la puissance délivrée.

Un **hacheur** délivre au moteur une tension en créneau dite "hachée" et appelée **PWM** (Pulse Width Modulation) ou MLI (Modulation de Largeur d'Impulsion). Le moteur, situé après le hacheur, et qui a un temps de réponse beaucoup plus grand, perçoit alors cette tension hachée PWM comme une tension continue de valeur moyenne.



Actionneur

(1) Dans le domaine de la mécanique, on utilise le mot "convertir" lorsque l'on change la nature de la puissance, par exemple d'électrique vers mécanique. On n'utilisera pas le mot transformer qui n'indique pas un changement de nature, comme par exemple dans un transformateur électrique.

👁 Voir les animations sur <https://sciencesindustrielles.com/glossary/verin>



et sur <https://sciencesindustrielles.com/glossary/pompe>



On parle de vérin lorsque la course de l'actionneur est limitée. On parle de moteur lorsque la course n'est pas limitée.

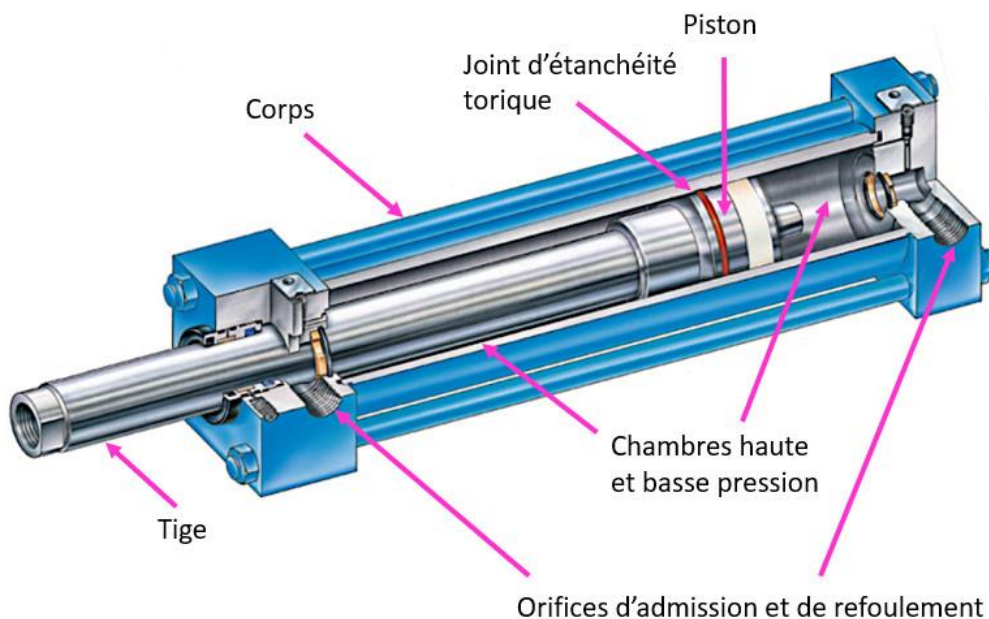
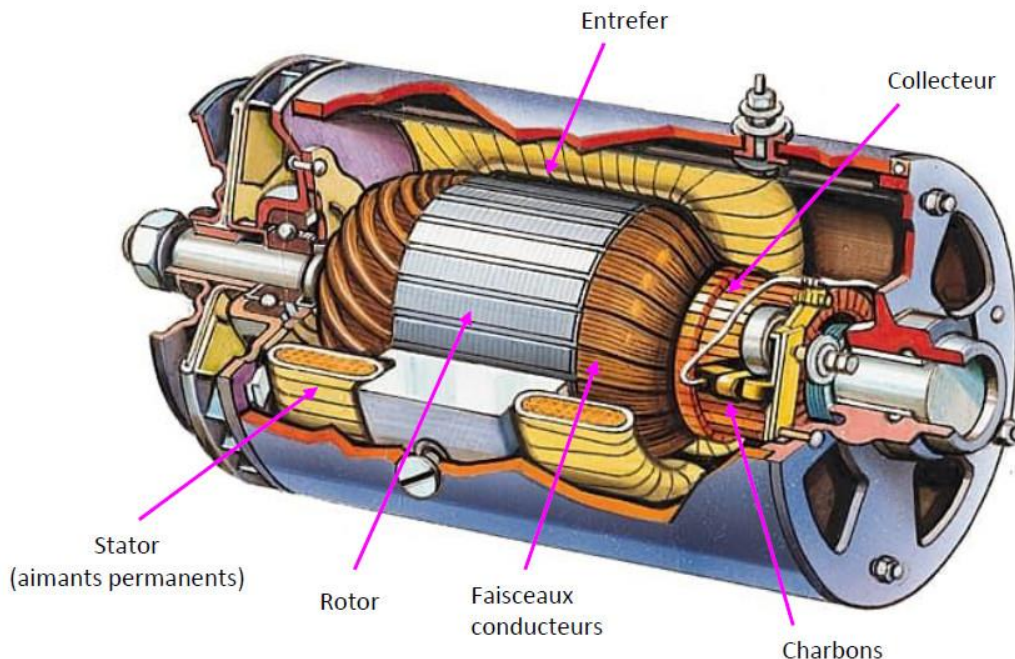
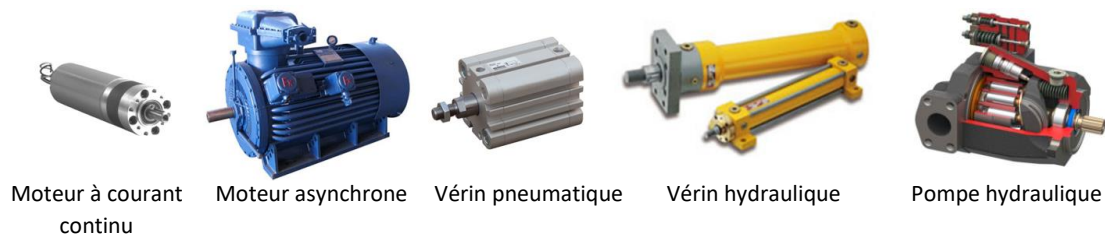
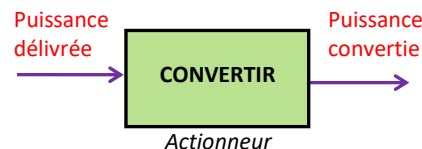
(2) Le terme mécanisme est synonyme du terme transmetteur.

👁 Voir les animations sur <https://sciencesindustrielles.com/glossary/transmetteur>



(3) Adapter signifie que l'on change les caractéristiques de la puissance, le mot transmettre signifie que la puissance mécanique se propage.

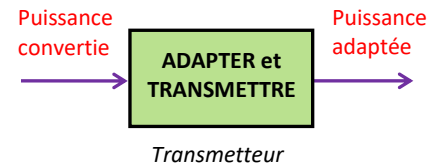
Fonction : **convertir**⁽¹⁾ la puissance délivrée en puissance d'un autre type, souvent en mécanique de translation ou de rotation.



Un **moteur électrique convertit** une puissance électrique en puissance mécanique de rotation.
 Une **pompe hydraulique convertit** une puissance mécanique de rotation en puissance hydraulique.
 Un **vérin hydraulique convertit** une puissance hydraulique en puissance mécanique de translation.

Transmetteur⁽²⁾

Fonction : **adapter et transmettre⁽³⁾** la puissance convertie par l'actionneur pour la rendre utilisable par l'effecteur.



Engrenage



Poulie-courroie



Vis-écrou



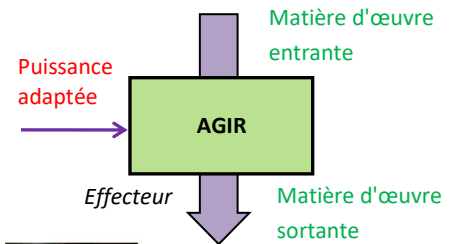
Pignon-crémaillère



Pignon-chaîne

Effecteur

Fonction : **agir sur la matière d'œuvre** afin de lui apporter une **valeur ajoutée** pour la déplacer ou la transformer.



Pince



Tapis roulant



Préhenseur



Outil d'usage



Roue

3.3 Chaîne d'information

Signal analogique, numérique, logique

Dans une chaîne d'information, l'information traitée peut être de trois types.

Type	Forme du signal	Exemple
analogique , le signal peut prendre une infinité de valeurs car il varie en continue ;		
numérique , le signal prend des valeurs discrètes transmises sous la forme d'une combinaison de digits (<i>bits</i>) ;		
logique , le signal n'admet que deux valeurs distinctes : tout ou rien (0 ou 1).		

(1) Dans la famille des capteurs, on distingue ;

- les **détecteurs** qui délivrent un signal logique

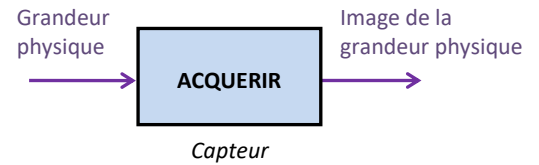
- les **codeurs** qui délivrent un signal numérique

- les **capteurs** qui délivrent un signal analogique

Capteur⁽¹⁾

Fonction : **acquérir** une grandeur physique et en produire une image exploitable par l'unité de commande.

Lorsque c'est nécessaire, il faut associer un codeur pour convertir le signal analogique, issue du capteur ou de l'IHM, en signal numérique utilisable par l'unité de commande. C'est la fonction du bloc « CODER ».



Détecteur à effet Hall (capteur de proximité TOR)



Détecteur photoélectrique (capteur de proximité TOR)



Détecteur magnétique ILS (capteur de proximité TOR)



Accéléromètre (capteur d'accélération)



Génératrice tachymétrique (capteur de vitesse)



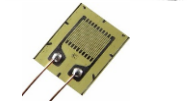
Potentiomètre linéaire (capteur de position linéaire)



Potentiomètre rotatif (capteur de position angulaire)



Codeur incrémental (capteur de position angulaire)



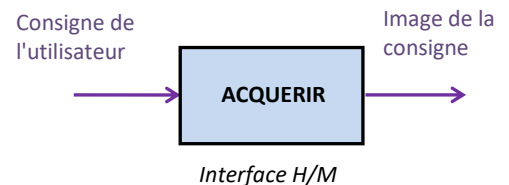
Jauge de déformation (capteur de force)



Pressostat (capteur de pression)

Interface homme - machine (IHM)

Fonction : **acquérir** la consigne d'un utilisateur en une image exploitable par l'unité de commande.



Bouton poussoir



Potentiomètre



Clavier joystick

Dans la chaîne d'information, les signaux sont souvent sous forme électrique. La tension vaut de 3 à 24 V.

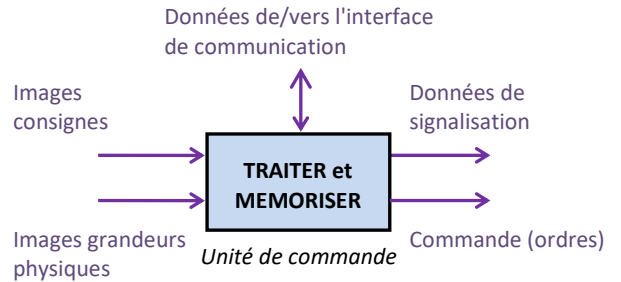
Unité de commande

Fonctions : **traiter**, à l'aide d'un programme implanté en mémoire, **les informations** en provenance :

- des capteurs ;
- et de l'interface H/M ;

afin de :

- **commander** le pré-actionneur ;
- **commander des signalisations à l'interface M/H.**

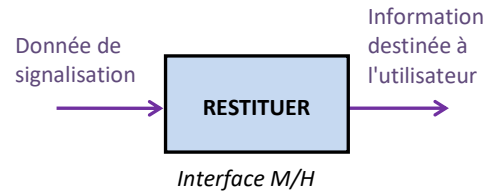


NB : Ce constituant peut généralement commander plusieurs chaînes de puissance simultanément.



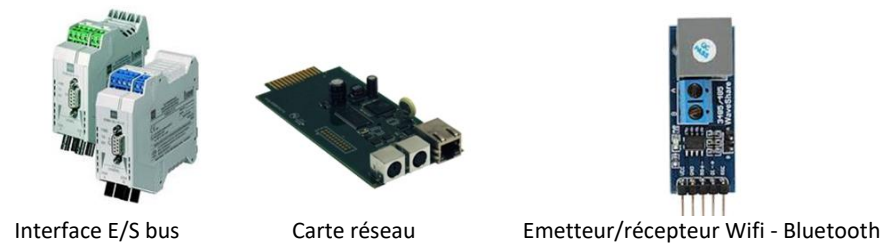
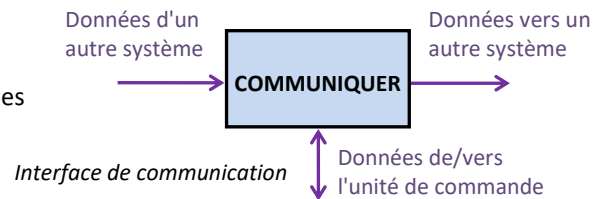
Interface machine - homme (IMH)

Fonction : **restituer** des informations à l'utilisateur.



Interface de communication

Fonction : **communiquer** au système d'échanger des informations avec d'autres systèmes.



La fonction COMMUNIQUER est devenue une fonction essentielle dans les systèmes actuels. Ils sont désormais très souvent communicants, ce qui permet la prise de commande à distance, les mises à jour automatiques, le diagnostic et la maintenance à distance.

3.4 Activité

Pour répondre aux exigences du cahier des charges **un système réalise une ou plusieurs activités** de manière successive ou simultanée.

Exemple :

Un ouvre portail a une seule activité : ouvrir/fermer le vantail.

Un robot aspirateur autonome a plusieurs activités : se déplacer ; aspirer ; broser.

3.5 Chaîne de puissance et chaîne d'information

La description par **chaîne fonctionnelle** permet de mettre en relation les **constituants internes** avec leur **fonction** dans la réalisation d'**une activité** particulière du système.

Une **chaîne fonctionnelle** met en œuvre une **unique activité**.

On appelle **matière d'œuvre** d'un système ce sur quoi agit le système.

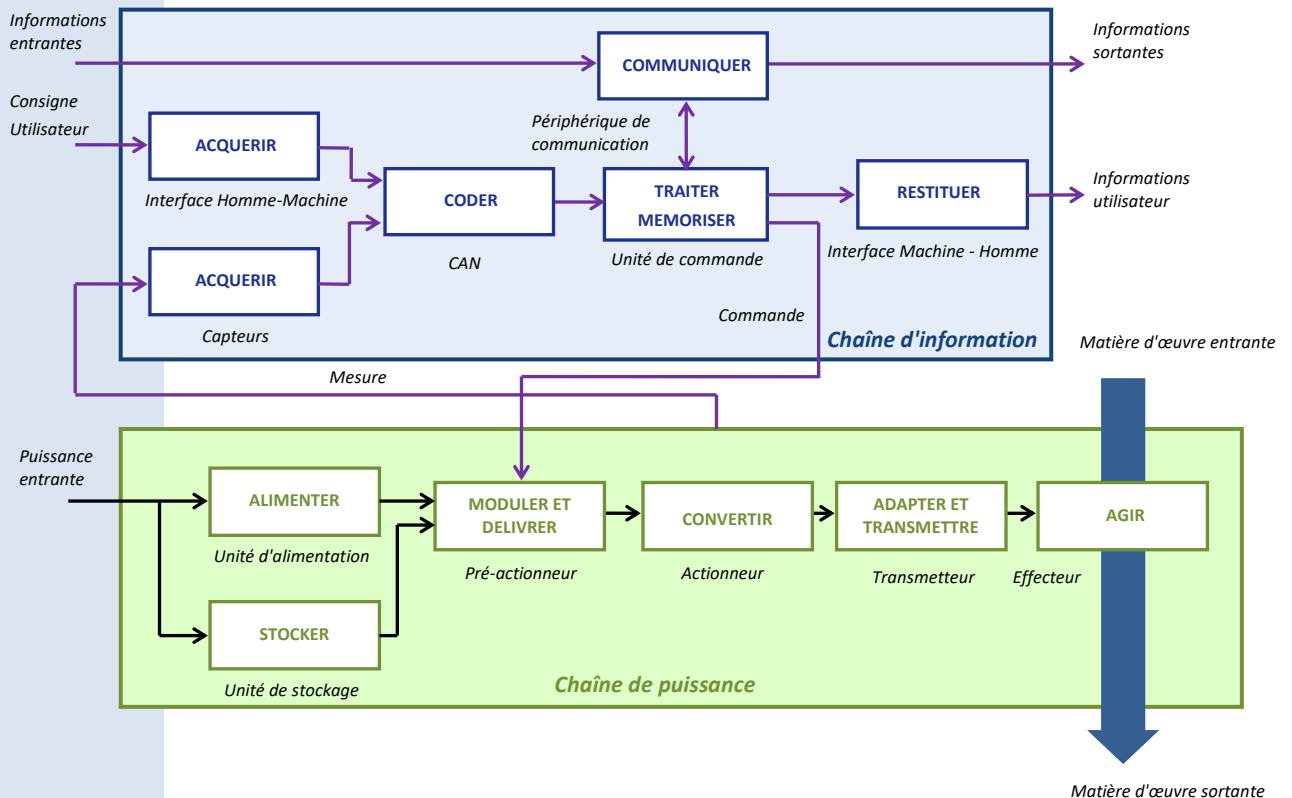
On appelle **valeur ajoutée** la différence entre matière d'œuvre sortante et matière d'œuvre entrante.

Une **chaîne de puissance** est un ensemble organisé de composants dont le rôle est de convertir un ordre émis par la partie commande en effet sur la matière d'œuvre.

Une **chaîne d'information** est un ensemble organisé de composants dont le rôle est de prélever des grandeurs physiques sur la partie opérative ou sur l'environnement et de les convertir en signaux interprétables par la partie commande.

La chaîne de puissance et d'information comporte 5 flux : de **matière d'œuvre**, de **puissance**, d'**information**, de **mesure** et de **commande**.

Le diagramme ci-dessous représente la structure générique des chaînes fonctionnelles :



Cas général d'une chaîne de puissance et d'information

Chaque constituant de la chaîne fonctionnelle est associé à une **fonction** et à une **famille de constituants**.

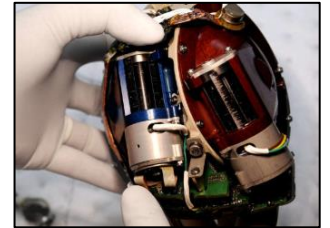
Pour un système donné et une activité donnée :

- les noms des familles de constituants sont à remplacer par les **noms des constituants** ;
- le **type de puissance**, électrique, mécanique, hydraulique est à **préciser** ;
- les **grandeurs physiques acquises** par les capteurs sont à **préciser** ;
- toutes les **fonctions** ne sont pas nécessairement présentes, et certaines peuvent apparaître plusieurs fois. Le squelette des chaînes fonctionnelles est à **adapter**.

Dans la chaîne d'information circule une **basse puissance**.
 Dans la chaîne de puissance circule une **haute puissance**.

Exemple : Cœur artificiel. Activité étudiée : pomper alternativement le sang

En dessous de chacun des ventricules, de l'huile de silicone exerce une pression sur les **membranes**. Pour chacun des ventricules, la **pompe volumétrique** aspire et rejette alternativement le fluide hydraulique suivant le sens de rotation de l'engrenage intérieur. Celle-ci est entraînée par un **moteur à courant continu** et un **réducteur**. Au final, la fluctuation de pression sur les membranes permet de remplir et vider alternativement les ventricules.



7 capteurs (débitmètre, pressostats...) assurent l'asservissement en pression et débit des motopompes volumétriques alternatives via un microprocesseur. **2 batteries Lithium-ion** externes d'une autonomie totale de 12h alimentent le système en puissance électrique. La **carte électronique** commande un **hacheur** qui va alimenter la motopompe à engrenage. Enfin, un **pupitre de commande**, permet à l'utilisateur d'envoyer des **consignes** au système, et de restituer des **informations lumineuses**.

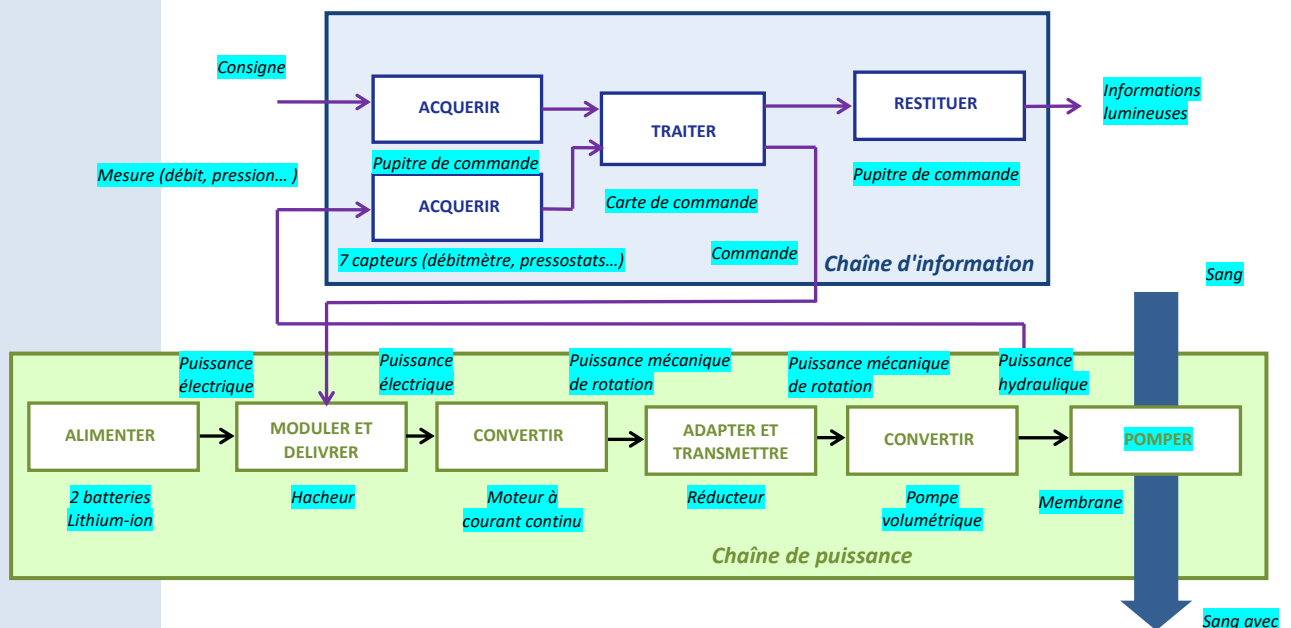


Dans cette aventure médico-industrielle, il a fallu également concevoir de nouveaux bio-matériaux, la commande électronique ainsi que des algorithmes C++ pour simuler le fonctionnement de la circulation sanguine.

Questions pour comprendre le fonctionnement du système :

- Quelle est la matière d'œuvre entrante et sortante ?
- Quelle est la puissance entrante dans l'actionneur ?
- Quel constituant convertit cette puissance ?
- Quel constituant transmet la puissance mécanique ?
- Quels constituants acquièrent la pression et le débit ?
- Quel constituant traite l'information ?
- Quel constituant restitue les informations à l'utilisateur ?

- Le sang / sang avec débit.....
- De la puissance l'électrique.....
- Le moteur à courant continu.....
- Le réducteur.....
- Les capteurs.....
- La carte électronique.....
- Le pupitre de commande.....



Chaîne de puissance et d'information du cœur artificiel dans la phase de vie d'utilisation

QUESTIONS DE DEBUT DE COURS

- indiquer les différents flux échangés dans un système complexe pluritechnologique ;
 - donner les différentes phases du cycle de vie d'un système ;
 - indiquer les informations contenues dans le diagramme des cas d'utilisation (uc) ;
 - indiquer les informations contenues dans le diagramme des exigences (req) ;
 - proposer un exemple différent de ceux vus en classe précisant la notion de critère et de niveau d'une exigence ;
 - donner le nom du document dans lequel sont inscrites les performances attendues d'un système pour ces différents modes ou phases d'utilisation ;
 - indiquer les informations contenues dans le diagramme de définition de blocs (bdd) ;
 - indiquer les informations contenues dans le diagramme de blocs internes (ibd) et qui n'apparaissent pas dans le diagramme de définition de blocs ;
 - indiquer les ports qui ne possèdent pas de flèche dans un diagramme de blocs internes (ibd).
-
- proposer un exemple différent de ceux vus en classe précisant la notion d'activité ;
 - définir l'énergie, la puissance, ainsi que leur unité ;
 - donner les valeurs d'énergie et de puissance de 3 systèmes ;
 - donner les grandeurs efforts et flux, ainsi que leur unité, pour les différents types de puissance ;
 - donner les 3 types de flux d'information, et préciser leur différence ;- combien de chaîne fonctionnelle possède un système à 3 activités ?
 - donner la structure générale des chaînes de puissance et d'information en précisant :
 - la fonction, la famille (pré-actionneur, ...), et quelques exemples de constituants usuels,
 - les transferts de puissance entre les constituants,
 - les échanges d'information entre les constituants,
 - le flux de matière d'œuvre.

Systemes asservis

On a vu précédemment que les échanges entre la chaîne d'information et la chaîne de puissance, sous la forme de commande et de grandeur physique acquise, permettent à certaines activités d'un système d'être réalisées de manière relativement autonome. On parle de **système automatisé**.

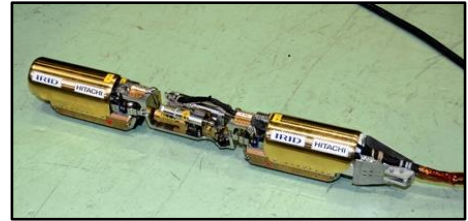
L'automatique est l'étude du contrôle des mouvements.

Ces derniers sont utilisés pour réaliser des tâches :

- **complexes** ou **dangereuses** pour l'homme ;



Correction de la vue par laser



Robot serpent Tepco d'inspection du cœur d'une centrale nucléaire

- **répétitives** ou **pénibles**.



Robots guides d'un complexe financier Santander de Madrid



Voiture autonome Tesla

L'intervention de l'homme est alors limitée à la **programmation** de l'unité de commande, la mise en marche et les **réglages** de certains **paramètres**.

À partir du **modèle du système** étudié, sous forme équationnelle, il s'agira **d'évaluer ses performances** dans le but d'anticiper son comportement réel et vérifier ainsi s'il est capable de répondre aux **exigences** de son **cahier des charges**.

Notons enfin que, bien que de nombreux systèmes utilisent actuellement des échanges et un traitement des informations sous forme numérique, on limitera nos études uniquement aux cas des systèmes continus.

Dans un système **continu**, les **grandeurs d'entrée** et de **sortie** évoluent de manière **continue** en fonction du **temps**, il s'agit donc de grandeurs analogiques.

1 Performances d'un système et performances d'un système asservi

Un système est asservi pour que son fonctionnement soit conforme à des attentes définies dans un cahier des charges. Ces attentes sont déclinées en termes de **performances**.

L'objectif est d'obtenir, à l'aide de réglages, le **meilleur compromis** entre les différents critères de performances globales du système et de valider les critères du CdCF.

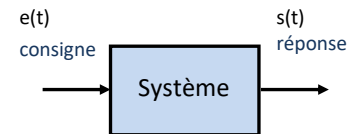
1.1 Performance d'un système continu

Les performances sont des caractéristiques propres à un système ou liées à son comportement lorsqu'il est sollicité de façon particulière. Nous allons voir les performances :

- de **stabilité**, propriété de convergence temporelle vers un état d'équilibre ;
- de **rapidité**, caractérisant le dynamisme des systèmes stables ;
- de **précision**, aptitude des systèmes asservis stables à atteindre la valeur attendue.

1.2 Consignes unitaires

Les performances d'un système sont évaluées expérimentalement, ou prédites par simulation, lorsque le système est soumis à des **signaux tests $e(t)$ en entrée** appelés **signaux canoniques**.

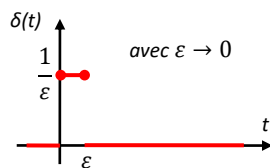


Ces signaux tests envoyés en entrée sont :

(1) Lorsque ε tend vers 0, la fonction devient une distribution. On parle alors d'impulsion de Dirac qui se note $\delta(t)$.

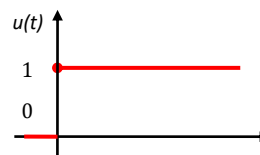


- **L'impulsion⁽¹⁾** : entrée très brève



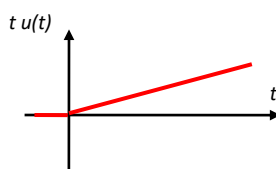
Air bag

- **L'échelon⁽²⁾** : entrée constante



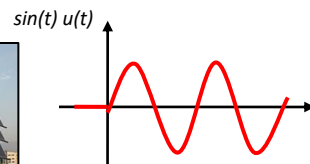
Thermostat

- **La rampe** : entrée linéaire



Tracker solaire

- **La sinusoïde** : signaux périodiques



Suspension

(2) On parle aussi :

- d'échelon unitaire
 - d'échelon d'amplitude 1
 - d'échelon indiciel
 - d'échelon de Heaviside
 - de fonction unité
- Elle se note $u(t)$.

Par convention, tous ces signaux sont nuls pour t négatif : **$e(t) = 0$ pour $t < 0$**

Notons toutefois que les performances sont **intrinsèques** au système et **ne dépendent pas du type d'entrée appliqué**.

La rampe est la **primitive** de l'échelon qui est la **primitive** de l'impulsion. On pourrait le généraliser par intégration successive.

L'entrée sinusoïdale se généralise en entrée harmonique.

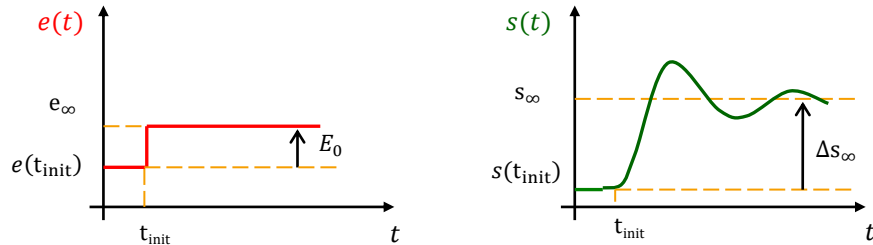
1.3 Consigne et réponse

Les valeurs finales des grandeurs d'entrée (consigne) et de sortie (réponse), correspondent aux valeurs de l'entrée et de la sortie du système en régime permanent, soit pour un temps suffisamment grand. Elles sont notées e_∞ et s_∞ avec :

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) \text{ et } s_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$$

La variation totale de la grandeur d'entrée est $\Delta e_\infty = e_\infty - e(t_{init}) = E_0$

La variation totale de la grandeur de sortie est $\Delta s_\infty = s_\infty - s(t_{init})$



1.4 Stabilité des systèmes

Pour certains systèmes, il est impératif qu'il n'y ait aucun dépassement.

(1) La stabilité est la performance qu'il faut évaluer en premier car un système instable est inutilisable.

Un système est **stable**⁽¹⁾ si, **pour une entrée en échelon**, la grandeur de sortie **converge** vers une **valeur finale constante**.
(entrée bornée – sortie bornée EB-SB).

Une réponse présente un **dépassement** si, pour une entrée en échelon, la grandeur de sortie dépasse sa **valeur finale**. La courbe de sortie présente alors un extrémum.

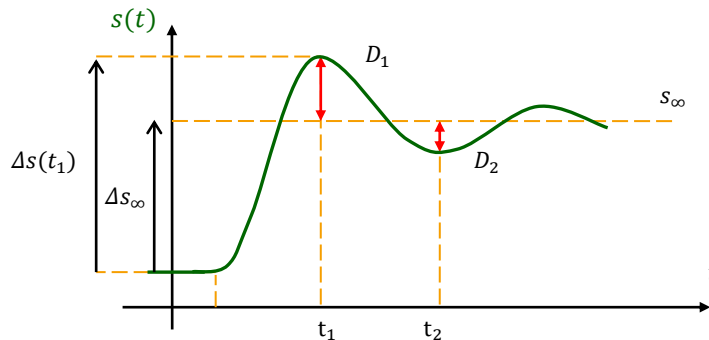
La stabilité est alors caractérisée par l'**amplitude du premier dépassement**, noté **D_1** , par rapport à la valeur finale⁽²⁾ :

- le **dépassement absolu** d'ordre k vaut $D_k = |\Delta s(t_k) - \Delta s_\infty|$ ⁽³⁾ donc : $D_1 = |\Delta s(t_1) - \Delta s_\infty|$ avec t_1 la durée pour obtenir le premier dépassement ;
- le **dépassement relatif** d'ordre k vaut $D_{k\%} = \left| \frac{D_k}{\Delta s_\infty} \right|$ donc $D_{1\%} = \left| \frac{D_1}{\Delta s_\infty} \right|$.

(2) Attention : Ce ne sont pas les dépassements par rapport à la valeur en entrée mais bien par rapport à la valeur finale de la sortie.

(3) Les dépassements sont donc tous positifs, même D_2 .

Réponse d'un système pour une entrée test en échelon :



(1) Qui permet de toucher physiquement avec des objets virtuels.

Contexte : Robot chirurgical *Da Vinci*

Le robot *Da Vinci* est un robot médical dirigé par un chirurgien pour réaliser des opérations, principalement au niveau de l'abdomen. L'opération se déroule à distance à l'aide d'un écran et de dispositifs haptiques⁽¹⁾. Les mouvements sont tous asservis et requièrent un réglage fin.



Exemple : Le graphique ci-contre représente la réponse du robot chirurgical *Da Vinci* à une entrée en échelon. Le système est-il stable ? donner la valeur des 2 premiers dépassements et les dépassements relatifs.

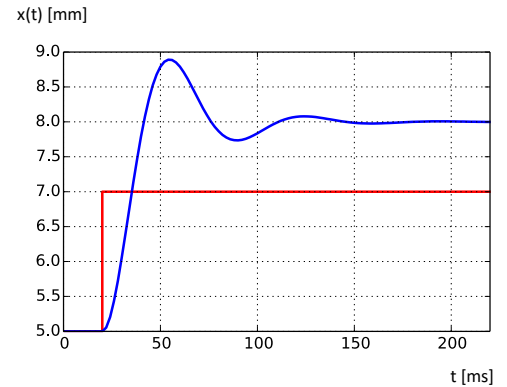
Le système est stable car pour une entrée en échelon, la sortie converge vers une valeur constante (EBSB).

$$D_1 = |\Delta x(t_1) - \Delta x_\infty| = |3,9 - 3| = 0,9 \text{ mm}$$

$$D_{1\%} = \left| \frac{D_1}{\Delta x_\infty} \right| = \left| \frac{0,9}{3} \right| = 0,3 = 30\%$$

$$D_2 = |\Delta x(t_2) - \Delta x_\infty| = |2,7 - 3| = 0,3 \text{ mm}$$

$$D_{2\%} = \left| \frac{D_2}{\Delta x_\infty} \right| = \left| \frac{0,3}{3} \right| = 0,1 = 10\%$$



Attention à certains systèmes réels :

Un système réel instable oscille jusqu'à sa destruction. Ces oscillations sont dans le cas général **limitées par les différentes saturations** (limites des amplificateurs opérationnels, butées physiques...).

Ces limitations physiques peuvent laisser croire que le système est stable.

1.5 Rapidité des systèmes

Pour certains systèmes, il est impératif que le temps de réponse du système soit faible.

À condition que le **système soit stable**, la **rapidité** est caractérisée, pour une **entrée en échelon**, par la durée que met le système pour que la sortie soit suffisamment proche de sa valeur finale et ne plus s'en éloigner.

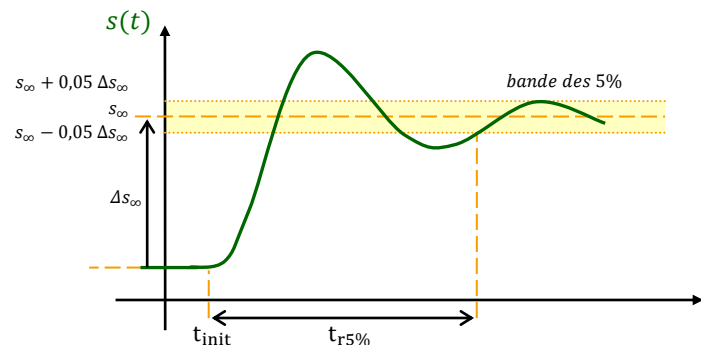
Par convention, le critère caractérisant la **rapidité** d'un système stable est le **temps de réponse à 5%** noté $t_{r5\%}$.

On définit la **bande des 5%** par l'intervalle :

$$[s_\infty - 0,05 \Delta s_\infty, s_\infty + 0,05 \Delta s_\infty]$$

Le **temps de réponse à 5%**⁽²⁾⁽³⁾ est la **durée** mise par la grandeur de **sortie** pour rentrer dans la bande des 5% et ne plus en sortir.

Réponse d'un système pour une entrée test en échelon⁽⁴⁾ :



(2) On pourrait utiliser d'autres critères, comme le temps de montée. Défini comme le premier instant auquel la réponse atteint la valeur finale.

(3) La valeur de 5% est arbitraire.

(4) Attention : il faut construire la bande des 5% autour de la valeur finale de la sortie et non pas autour de la valeur de la grandeur d'entrée !

👉 On ne dira jamais que le temps de réponse est rapide, bon... il faut comparer.

Exemple : Déterminer le temps de réponse à 5%.

On lit graphiquement

$$x_{\infty} = 8 \text{ mm}$$

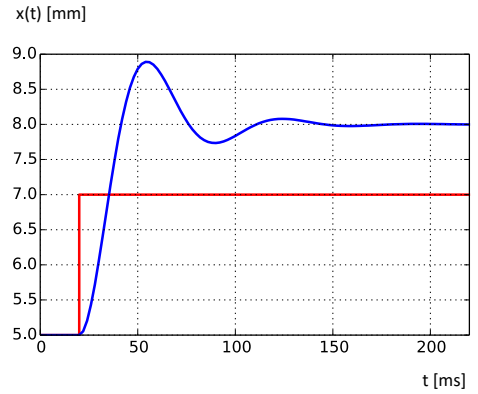
$$\Delta x_{\infty} = 8 - 5 = 3 \text{ mm}$$

La "bande des 5%" est :

$$[8 - 0,05 \times 3 ; 8 + 0,05 \times 3] = [7,85 ; 8,15]$$

On lit graphiquement :

$$t_{r5\%} = 100 - 20 = 80 \text{ ms}$$



1.6 Précision des systèmes asservis

Pour certains systèmes, il est impératif que la précision du système soit excellente.

À condition que le système asservi soit **stable**, la **précision** n'est définie que pour un système ayant des **grandeurs d'entrée et de sortie de même nature**.

L'erreur : $e_r(t) = e(t) - s(t)$
 L'erreur statique : $e_{r\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t)$

Si le système est stable et que l'entrée et la sortie sont de même nature, la **précision** est caractérisée par :

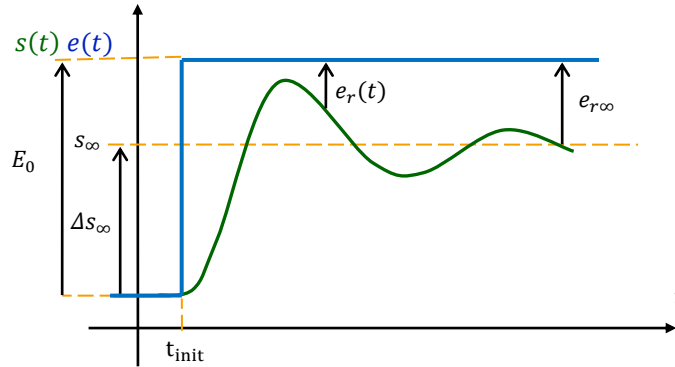
– l'erreur statique : $e_{r\infty} = E_0 - \Delta s_{\infty}$

– ou par l'erreur statique relative :

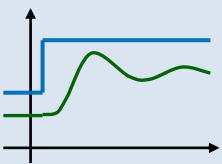
$$e_{r\% \infty} = \left| \frac{e_{r\infty}}{E_0} \right| \text{ pour une consigne en échelon.}$$

Si l'erreur statique est **nulle**, on dira que le système est **précis**.

Réponse d'un système pour une consigne test en échelon



✎ Pour $e(t_{init}) \neq s(t_{init})$
 l'erreur ne peut pas être tracée :

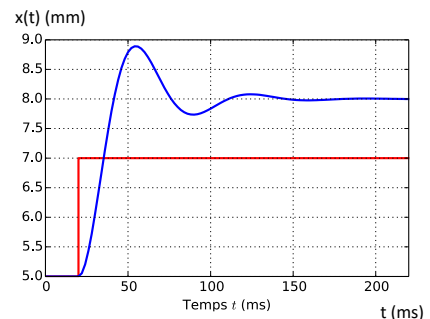


Exemple : Déterminer l'erreur statique et l'erreur statique relative.

Les grandeurs d'entrée et de sortie sont de même nature.

$$e_{r\infty} = X_0 - \Delta x_{\infty} = 2 - 3 = -1 \text{ mm}$$

$$e_{r\% \infty} = \left| \frac{e_{r\infty}}{E_0} \right| = \left| \frac{-1}{2} \right| = 0,5 = \frac{50}{100} = 50\%$$



2 Modéliser un SLCI

Pour **prédire** les performances d'un système, il faut d'abord en avoir un **modèle**.

2.1 Fonction de transfert

Hypothèses

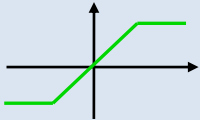
Le modèle utilisé suppose le **Système Linéaire, Continu et Invariant : SLCI**.

Un système de type **SLCI**, vérifie les hypothèses suivantes :

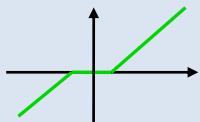
- le système est **linéaire**⁽¹⁾, c'est-à-dire que la sortie est une combinaison linéaire des réponses aux signaux d'entrée. Pour un signal d'entrée $e(t) = e_1(t) + k e_2(t)$, la réponse est $s(t) = s_1(t) + k s_2(t)$;
- les grandeurs d'entrée et de sortie évoluent de manière **continue** avec le temps ;
- le système est **invariant**⁽²⁾, c'est-à-dire qu'il reste identique et valable à chaque instant durant la période d'étude.

(1) Exemples de non linéarité :

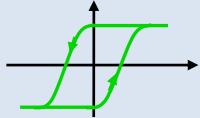
- saturateur (à l'entrée d'un MCC...)



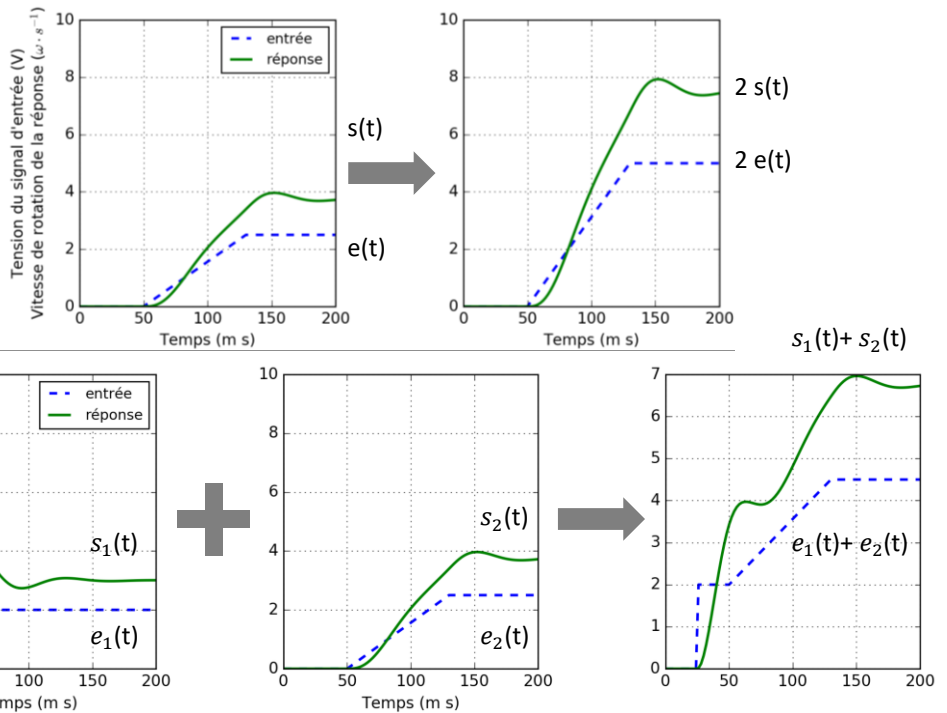
- seuil (frottement, quantification...)



- hystérésis (matériaux...)



(2) L'usure de certaines pièces, par exemple, peut se traduire par des évolutions des lois de comportement au cours du temps, qui ne sont pas prises en compte.



Un SLCI est modélisé par des **équations différentielles linéaires à coefficients constants** de la forme :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n}(t) + \dots + a_1 \frac{ds}{dt}(t) + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m}(t) + \dots + b_1 \frac{de}{dt}(t) + b_0 e(t)$$

$e(t)$: entrée et $s(t)$: sortie

n est l'**ordre** du modèle. C'est le degré de l'équation différentielle.

Pour des raisons liées à la causalité (le comportement d'un système dépend du passé, pas du futur), les systèmes réels étudiés imposent $m \leq n$.

Ce modèle mathématique a été déterminé par application de lois et principes de la physique : il est dit « **modèle de connaissance** », en opposition au « **modèle de comportement** » déterminé expérimentalement.

Transformée de Laplace

Intérêt

Les équations différentielles d'un modèle de connaissance ne permettent pas de caractériser le comportement du modèle uniquement par ses paramètres, et indépendamment des grandeurs d'entrée et de sortie.

La transformée de Laplace donne une réponse à ce problème en transformant les équations différentielles en polynômes afin de modéliser le système uniquement par ses paramètres.

Définition

Une fonction $f(t)$ nulle pour $t < 0$ est dite causale⁽¹⁾.

Soit f une fonction causale d'une variable réelle t . On définit sa transformée⁽²⁾ de Laplace $\mathcal{L}(f)$ comme l'unique fonction F de la variable complexe p telle que :

$$\mathcal{L} \quad f(t) \mapsto F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (3)(4)$$

Domaine temporel Domaine symbolique (ou de Laplace)

Propriétés de la transformée de Laplace

Les propriétés qui suivent sont fondamentales car elles permettent de déterminer facilement les transformées de Laplace des équations du modèle de connaissance.

	LINEARITE	DERIVATION	INTEGRATION
$f(t)$	$K_1 \cdot f(t) + K_2 \cdot g(t)$	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$\int\int\int_{n \text{ fois}} f(u)$
$F(p)$	$K_1 \cdot F(p) + K_2 \cdot G(p)$	$p^n F(p)$	$\frac{F(p)}{p^n}$
		avec conditions initiales nulles	

Démonstration par IPP :

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt} dt = - \int_0^{+\infty} -pf(t)e^{-pt} dt + [f(t)e^{-pt}]_0^{+\infty} = pF(p) - f(0^-) \quad (5)$$

Les **conditions initiales sont supposées nulles**⁽⁶⁾. C'est-à-dire, que la fonction et ses dérivées sont nulles pour $t \leq 0$:

$$f(0) = 0 ; f'(0) = 0 ; f''(0) = 0 ; \dots$$

Ce sont les **conditions de Heaviside**.

On en déduit :

Consigne	Impulsion	Échelon	Rampe	Sinus	Cosinus	Sinus amortie	Retard ⁽⁸⁾
$e(t)$	$\delta(t)$	$E_0 u(t)$	$V_0 t u(t)$	$\sin(\omega t) u(t)$	$\cos(\omega t) u(t)$	$e^{-at} \sin(\omega t) u(t)$	$f(t - T)$
$E(p)^{(7)}$	1	$\frac{E_0}{p}$	$\frac{V_0}{p^2}$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$	$e^{-Tp} F(p)$

Démonstrations :

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = \int_0^{+\infty} \delta(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\epsilon} \frac{1}{\epsilon} e^{-pt} dt = 1$$

$$\mathcal{L}(E_0 u(t)) = \int_0^{+\infty} E_0 e^{-pt} dt = E_0 \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} = - \left(-\frac{E_0}{p} \right) = \frac{E_0}{p}$$

$$\mathcal{L}(V_0 t u(t)) = \int_0^{+\infty} V_0 t e^{-pt} dt = V_0 \left[\left(-\frac{1}{p} t - \frac{1}{p^2} \right) e^{-pt} \right]_0^{+\infty} = - \left(-\frac{V_0}{p^2} \right) = \frac{V_0}{p^2}$$

$$\mathcal{L}(f(t - T)) = \int_0^{+\infty} f(t - T)e^{-pt} dt = \int_T^{+\infty} f(u)e^{-p(u+T)} du = \int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu} du e^{-Tp} = e^{-Tp} F(p)$$

(1) L'ingénieur a pour pratique d'étudier l'effet d'une cause qu'il situe à la date $t=0$. La cause précédant toujours l'effet, la transformée de Laplace n'est définie que pour des fonctions dites « causales ».

(2) Une transformée transforme une fonction en une autre fonction.

(3)  Where the Laplace Transform comes from, Arthur Mattuck, MIT : <https://sciencesindustrielles.com/glossary/transformation-de-laplace/>



(4) Cette intégrale converge car les entrées sont des polynômes ou sont bornées.

(5) Dans le cas général :

$$\mathcal{L}(f(t)) = pF(p) - f(0^-)$$

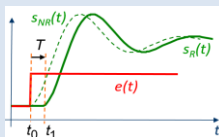
Ce qui veut dire que si les conditions initiales ne sont pas nulles, la réponse est "translatée" de la valeur initiale.

(6) Les conditions initiales du problème de Cauchy sont nulles.


(7) On remarque qu'il y a un lien de dérivé entre

$$\frac{1}{p^2}, \frac{1}{p} \text{ et } 1.$$

(8) Théorème du retard :



Le retard pur peut modéliser des phénomènes de traitements numériques, des délais de transmission de l'information, ou des écoulements de fluide.

(1)  Fonctionnement du MCC :

<https://sciencesindustrielles.com/glossary/moteur-electrique/>



(2) Tension aux bornes du moteur en fonction des grandeurs électriques.

(3) La vitesse de rotation est proportionnelle à la f.c.e.m.

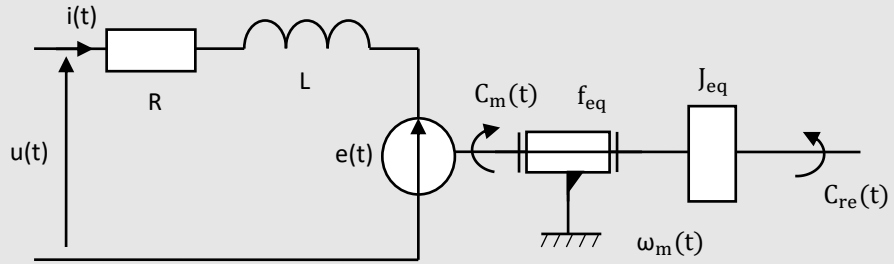
(4) Le couple moteur est proportionnel à l'intensité.

(5) PFD pour un mouvement de rotation.

(6) Par linéarité de la transformée de Laplace.

On pose $u = t - T$

Exemple : On donne la modélisation du MCC⁽¹⁾ ci-dessous. Déterminer la transformée de Laplace des équations du MCC



Equation électrique :

Loi des mailles et loi d'Ohm : $u(t) = R i(t) + L \frac{di}{dt}(t) + e(t)$ (2)

Equations de couplage :

Maxwell-Faraday : $e(t) = K_e \omega_m(t)$ (3)

Couple moteur engendrée par la Force de Laplace :

$$C_m(t) = K_t i(t)$$
 (4)

Equation mécanique :

Principe fondamental de la dynamique appliqué à l'arbre moteur :

$$C_m(t) - C_{re}(t) = J_{eq} \frac{d\omega_m}{dt}(t) + f_{eq} \omega_m(t)$$
 (5)

On suppose les conditions de Heaviside respectées. $i(0^-) = 0 \text{ A}$; $\omega_m(0^-) = 0 \text{ rad/s}$

Hypothèse : Les conditions initiales sont nulles.

$$\mathcal{L}(u(t)) = \mathcal{L}\left(R i(t) + L \frac{di}{dt}(t) + e(t)\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(u(t)) = R \mathcal{L}(i(t)) + L \mathcal{L}\left(\frac{di}{dt}(t)\right) + \mathcal{L}(e(t))$$
 (6)

$$\Rightarrow U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p) \Rightarrow I(p) = \frac{1}{R + Lp}(U(p) - E(p))$$

$$E(p) = K_e \Omega_m(p)$$

$$C_m(p) = K_t I(p)$$

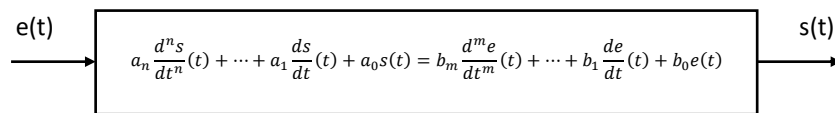
$$A1 - C_m(p) - C_{re}(p) = J_{eq} p \Omega_m(p) + f_{eq} \Omega_m(p) \Rightarrow \Omega_m(p) = \frac{1}{f_{eq} + J_{eq} p} C_m(p)$$

A2 -

Fonction de transfert

On suppose les conditions initiales nulles, sinon, il faut séparer la partie linéaire de la partie non linéaire.

Soit un SLCI dont le modèle de connaissance est donné sous forme d'une équation différentielle :



Système linéaire continu invariant (SLCI)

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle et **en considérant les conditions initiales nulles**, on a :

$$a_n p^n S(p) + \dots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \dots + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$$

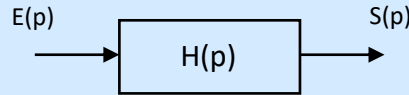
$$\Rightarrow (a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0) S(p) = (b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0) E(p)$$

$$\Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}$$

(1) On l'appelle aussi « transmittance » du système.

On appelle fonction de transfert⁽¹⁾ la fraction $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ et donc $S(p) = H(p)E(p)$

La **fonction de transfert** d'un système est donc **un modèle du système** dans le domaine de Laplace :



La fonction de transfert est **indépendante de l'entrée** qui lui est appliquée. Elle ne **dépend que** de la variable symbolique p et des **paramètres du modèle**.

Forme canonique

Une fonction de transfert sous **forme canonique** est de la forme :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + \dots p + \dots p^m}{1 + \dots p + \dots p^{n-\alpha}}$$

K : gain statique

α : classe ≥ 0

n : ordre

Méthode pour mettre une fonction de transfert sous forme canonique :

- 1) la fraction doit être un **quotient de polynômes** ;
- 2) on **factorise** par le **terme d'ordre le plus faible** du numérateur et du dénominateur.

Lorsque $\alpha = 1$ on dit que le modèle possède un intégrateur. Cela vient du fait que l'on peut écrire la fonction de transfert sous la forme $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{p} \frac{A(p)}{B(p)}$, $\frac{1}{p}$ étant la transformée de Laplace d'une intégrale.

Exemple : Déterminer la forme canonique de $H(p) = \frac{\frac{2}{p} + 3 + 5p}{3p + 4p^2 + 7p^4}$

$$H(p) = \frac{\frac{2}{p} + 3 + 5p}{3p + 4p^2 + 7p^4} = \frac{2 + 3p + 5p^2}{3p^2 + 4p^3 + 7p^5} = \frac{2}{3p^2} \frac{1 + \frac{3}{2}p + \frac{5}{2}p^2}{1 + \frac{4}{3}p + \frac{7}{3}p^3}$$

gain statique : $K = \frac{2}{3}$ classe : $\alpha = 2$ ordre : $n = 5$

Exemple : A partir des 4 équations du MCC, déterminer $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ et mettre la fonction sous la forme canonique. Préciser le gain statique, la classe et l'ordre.

On prendra le couple résistant nul $C_{re}(t) = 0$.

$$I(p) = \frac{1}{R + Lp} (U(p) - E(p))$$

$$E(p) = K_e \Omega_m(p)$$

$$C_m(p) = K_t I(p)$$

$$\Omega_m(p) = \frac{1}{f_{eq} + J_{eq} p} C_m(p)$$

$$\Rightarrow \Omega_m(p) = \frac{1}{f_{eq} + J_{eq} p} \left(K_t \frac{1}{R + Lp} (U(p) - K_e \Omega_m(p)) \right)$$

$$\Rightarrow (R + Lp)(f_{eq} + J_{eq} p)\Omega_m(p) = K_t U(p) - K_e K_t \Omega_m(p)$$

$$\Rightarrow ((R + Lp)(f_{eq} + J_{eq} p) + K_e K_t)\Omega_m(p) = K_t U(p)$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{K_t}{(R + Lp)(f_{eq} + J_{eq} p) + K_e K_t} = \frac{K_t}{\frac{LJ_{eq}}{K_e K_t + Rf_{eq}} p^2 + \frac{RJ_{eq} + Lf_{eq}}{K_e K_t + Rf_{eq}} p + 1}$$

gain statique : $K = \frac{K_t}{K_e K_t + Rf_{eq}}$ en (rad/s)/V classe : $\alpha = 0$ ordre : $n = 2$

2.2 Prévoir le comportement en stabilité

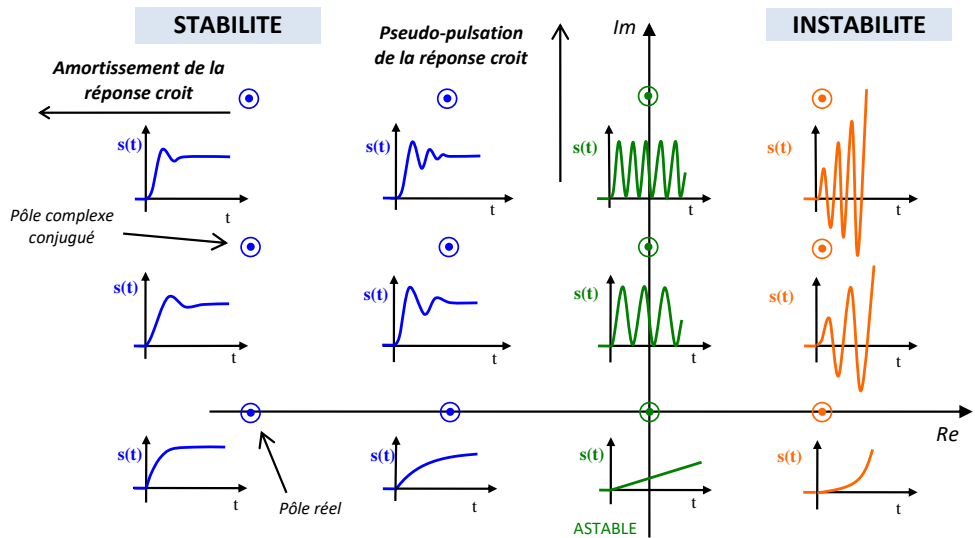
Cette performance doit être prédite en premier. Comme les autres performances, la stabilité est intrinsèque au modèle et est totalement indépendante du type d'entrée auquel il est soumis.

Condition de stabilité

On appelle **pôles**, les **racines du dénominateur** de la fonction de transfert.
On appelle **zéros**, les **racines du numérateur** de la fonction de transfert.

Exemple : un modèle peut donc posséder :
 – des pôles réels $p = a$;
 – des pôles complexes conjugués $p = c \pm j d$.

Pour mieux comprendre l'influence des pôles de la fonction de transfert d'un système, l'allure de la réponse à une entrée en échelon a été représentée selon la position de ces pôles dans le plan complexe :



Un système est donc **stable** au sens EBSB si les **pôles** de sa fonction de transfert sont à **partie réelle strictement négative**.

Les **pôles réels** ne génèrent pas d'oscillation alors que les **pôles complexes conjugués** font apparaître des oscillations. On appelle **pôle dominant** le pôle qui a une contribution significative par rapport aux autres sur la réponse.

2.3 Prévoir le comportement en rapidité

Le $t_{r5\%}$ d'un modèle du 1^{er} ou du 2nd ordre seront connus. Pour les modèles d'ordre supérieur, il sera nécessaire de les rapprocher vers ces modèles lorsque cela sera possible (réduction de pôles dominants). Dans le cas contraire, seule une étude numérique permettra de déterminer le $t_{r5\%}$.

2.4 Prévoir le comportement en précision

Détermination de l'erreur en régime permanent

(1) Contre-exemple :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{1}{p^2 + \omega^2} = 0$$

Ce qui n'est pas vrai.

(2) Attention, il s'agit de la limite supérieure 0^+ .

Pour une fonction $f(t)$ stable dont la limite existe⁽¹⁾, le **théorème de la valeur finale** permet de calculer sa valeur finale à partir de la transformée de Laplace :

$$f_{\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pF(p) \quad (2)$$

Le **théorème de la valeur initiale** permet de calculer sa valeur initiale à partir de la transformée de Laplace :

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)$$

Exemple : Déterminer la valeur finale de la réponse d'un système stable de classe 0 non perturbé soumis échelon d'amplitude E_0 .

Le système est stable, on applique le théorème de la valeur finale :

$$s_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pS(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p H_{FTBF}(p) E(p) \\ = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{K_{FTBF} 1 + \dots + \dots p^m E_0}{p^0 1 + \dots + \dots p^n p} = K_{FTBF} E_0 \quad (1)$$

(1) On rappelle que

$$e(t) = E_0 u(t) \rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}$$

Exemple : Déterminer l'erreur statique et l'erreur statique relative d'un système asservi stable de classe 0 non perturbé soumis à un échelon d'amplitude E_0 .

Le système est stable, on applique le théorème de la valeur finale :

$$e_{r\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e_r(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p(E(p) - S(p)) \\ = \lim_{p \rightarrow 0^+} p(E(p) - H_{FTBF}(p)E(p)) \\ = \lim_{p \rightarrow 0^+} p(1 - H_{FTBF}(p))E(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \left(1 - \frac{K_{FTBF} 1 + \dots + \dots p^m}{p^0 1 + \dots + \dots p^n}\right) \frac{E_0}{p} \\ = (1 - K_{FTBF})E_0 \\ e_{r\infty\%} = \left| \frac{(1 - K_{FTBF})E_0}{E_0} \right| = |1 - K_{FTBF}|$$

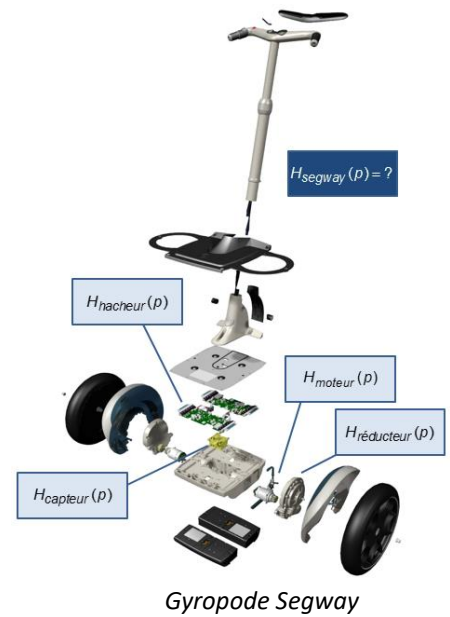
Un système asservi stable de classe 0 soumis à un échelon est donc précis si $K_{FTBF} = 1$

3 Schéma-bloc

Nous allons apprendre à déterminer la fonction de transfert globale d'un système, à partir du modèle de connaissance de chacun de ses constituants (préactionneur, actionneur, capteur...) et en tenant compte de la façon dont ces constituants sont organisés.

On s'intéressera plus particulièrement aux systèmes asservis qui, équipés de capteurs permettant en permanence le contrôle de la grandeur de sortie, sont capables de réagir de façon autonome à des perturbations extérieures.

Les **schémas blocs** servent à représenter graphiquement les équations et équations différentielles. C'est aussi un outil de compréhension et de résolution efficace des phénomènes physique.



3.1 Système asservi

Un système asservi correspond à un principe de conception.

Un **système asservi**⁽²⁾ est un système capable d'élaborer de manière autonome sa grandeur de **commande** à partir d'une valeur de **consigne** et d'une **mesure de la réponse** avec un **capteur**.

Une **grandeur de sortie** d'une activité d'un système **est asservie** si :

- il y a une **boucle de retour** avec un **capteur** ;
- un **correcteur** améliore les performances de stabilité, de rapidité et de précision.

Un système asservi est nécessairement bouclé, mais **la réciproque n'est pas vraie**.

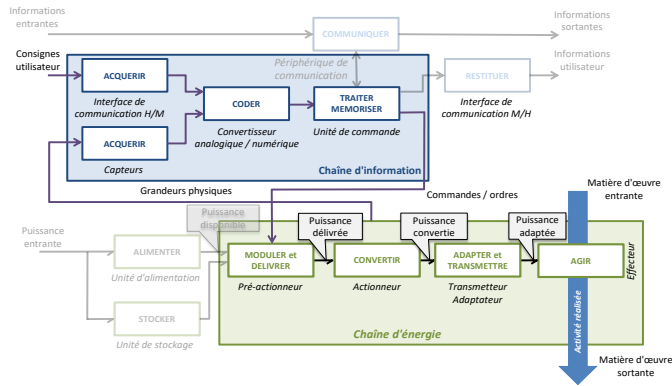
On parle de système **suiveur** ou de poursuite lorsque l'entrée varie. On parle de système **régulé**⁽³⁾ lorsque l'entrée est constante.

(2) On parle alors d'un « système asservi » mais c'est un abus de langage, c'est la grandeur de sortie de l'activité étudiée, qui est asservie à la grandeur de consigne.

(3) Régulateur de vitesse, régulateur de chauffage...

3.2 Consigne et réponse

Dans la description par chaîne fonctionnelle, **les fonctions communiquer, restituer, alimenter et stocker de l'énergie n'interviennent pas directement sur les performances d'un système**. Le modèle d'un système asservi s'appuiera sur les éléments suivant :

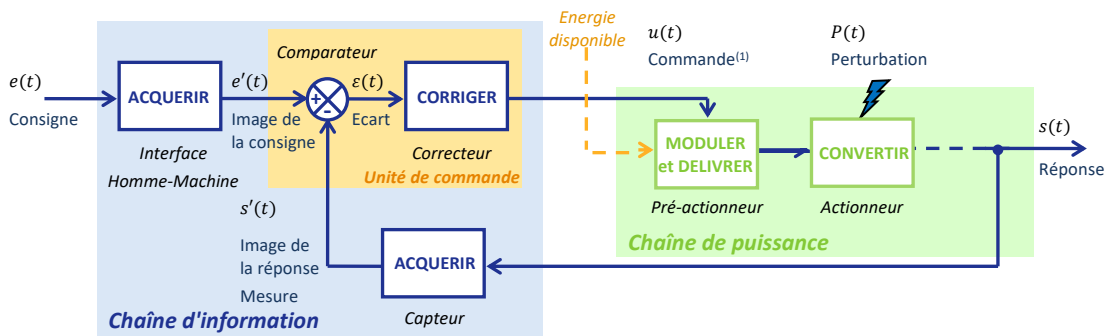


Dans cette représentation,

- la **grandeur d'entrée** est la **consigne** ;
- la **grandeur de sortie**, est la **réponse**. C'est une grandeur lié à la matière d'œuvre (effort, position, vitesse...).

3.3 Structure d'un système asservi

Le **schéma-bloc** est un diagramme **structurel** construit à partir de la **chaîne de puissance / chaîne d'information** en ne conservant que les constituants intervenant **directement dans l'asservissement**.




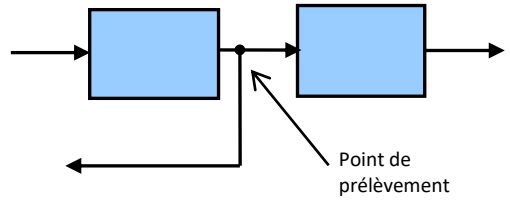
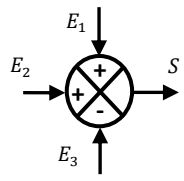
(1) Dans ce schéma-bloc, l'entrée du pré-actionneur correspond à la commande issue de l'unité de commande, en général une faible tension. Ce n'est pas la haute puissance entrante que l'on retrouve dans le schéma des chaînes fonctionnelles.

Les éléments suivants sont indispensables au bon fonctionnement d'un système asservi :

CONSTITUANT	FONCTION
Interface H/M ⁽²⁾	Traduire la consigne en un signal utilisable par l'unité de commande.
Capteur	Mesurer et traduire la réponse en un signal utilisable par l'unité de commande Il est dans la boucle de retour.
Comparateur	Comparer l'image de la réponse et l'image de la consigne. Il délivre un écart $\varepsilon(t)$ en général électrique, qui est une image de l'erreur $e_r(t)$. Avec : $\varepsilon(t) = e'(t) - s'(t)$ et $e_r(t) = e(t) - s(t)$
Correcteur	Corriger l'écart afin de générer un signal de commande pour améliorer les performances du système (stabilité – rapidité – précision) Il est après de soustracteur.

(2) Parfois aussi appelé transducteur ou adaptateur. Un transducteur est un dispositif convertissant un signal physique en un autre.

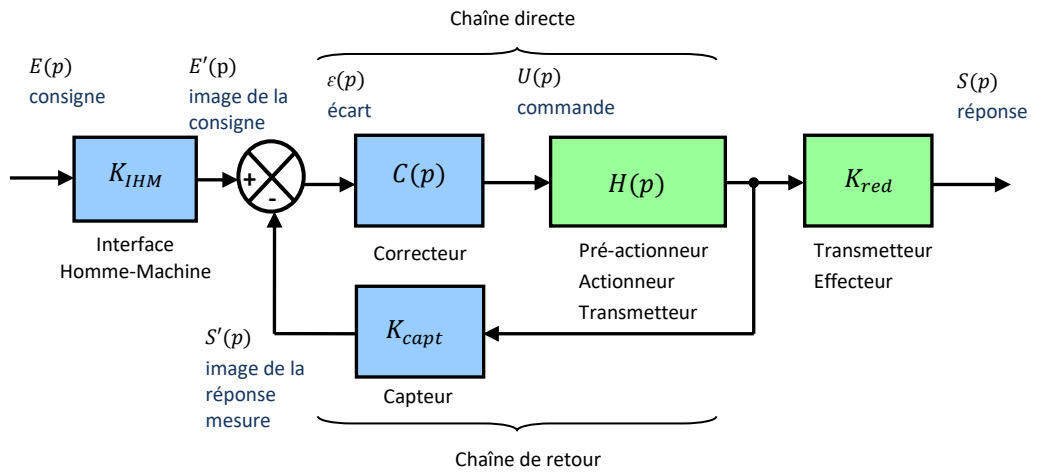
Les trois éléments de base du schéma-bloc sont :

<p>Le bloc qui représente un constituant du système asservi (interface H/M, capteur, actionneur, ...), une opération mathématique ou un changement d'unité. En générale, le bloc comporte un seul flux d'entrée et un seul flux de sortie.</p>	
<p>Le point de prélèvement qui prélève, sans le modifier, le signal en un point.</p>	
<p>Le comparateur (soustracteur ou sommateur) qui comporte plusieurs entrées mais une seule sortie. Ces entrées peuvent être additionnées ou soustraites.</p>	 <p style="text-align: right;">$S = E_1 + E_2 - E_3$</p>

3.4 Chaîne directe et chaîne de retour

Dans le but de pouvoir déterminer plus facilement la fonction de transfert d'une activité d'un système, la représentation schéma-bloc, en plus de s'appuyer sur la structure chaîne de puissance / chaîne d'information, met en évidence le modèle de chacun des constituants intervenant dans l'asservissement.

Pour un système non perturbé, la représentation d'un asservissement par schéma-bloc est la suivante :



Un système asservi est constitué de deux chaînes :

- la **chaîne directe**, entre le comparateur et le point de prélèvement du capteur, qui assure les fonctions de commande et de puissance ;
- la **chaîne de retour**, entre le point de prélèvement du capteur et le comparateur, qui assure la fonction de mesure de la réponse.

3.5 IHM

Selon le schéma-bloc général d'un système asservi :

$$\varepsilon(p) = E'(p) - S'(p) = K_{IHM} E(p) - \frac{K_{capt}}{K_{red}} S(p)$$

On veut que si $E(p) = S(p)$ alors $\varepsilon(p) = 0^{(1)}$

donc

$$K_{IHM} = \frac{K_{capt}}{K_{red}}$$

On peut alors se ramener à un retour unitaire avec une transformation de schéma-bloc.

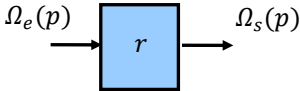
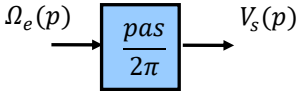
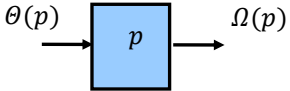
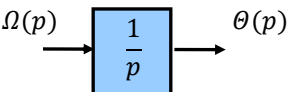
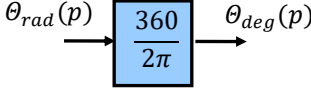
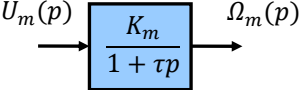
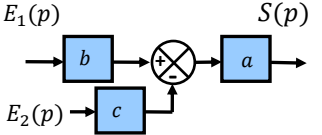
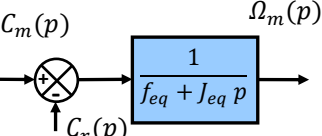
(1) En général il s'agit d'une tension (en V), parfois une intensité en ampère (A) ou des impulsions en point (pt).

Par exemple si $K_{IHM} = \frac{K_{capt}}{K_{red}}$, sur un écran d'ordinateur on impose une consigne de +1m et un robot se déplace de +1m.

Si $K_{IHM} \neq \frac{K_{capt}}{K_{red}}$, sur un écran d'ordinateur on impose une consigne de +24V et un robot se déplace de +1m.

3.6 Modèle de connaissance

Chaque équation est représentée par un bloc qui contient sa fonction de transfert.

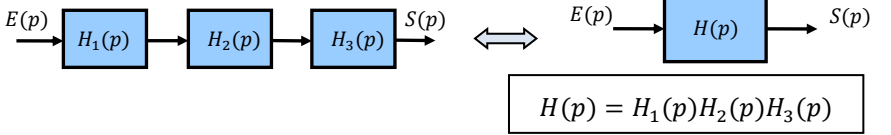
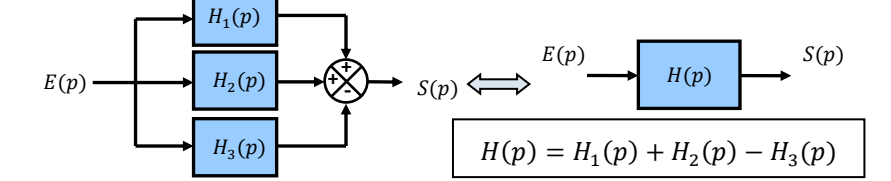
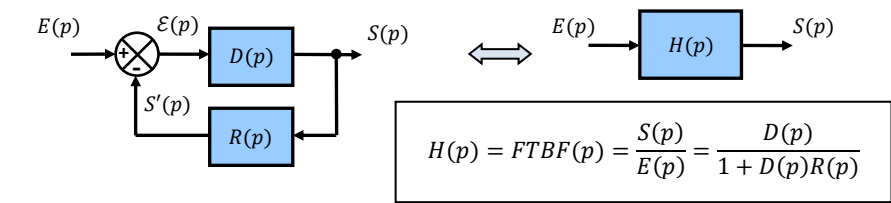
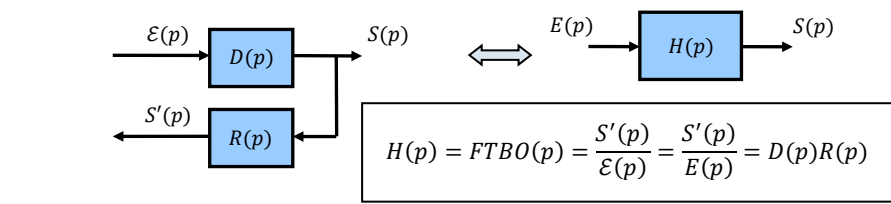
Exemple d'équation à modéliser	Équation temporelle	Transformée en Laplace	Schéma-bloc
Loi entrée-sortie cinématique d'un réducteur	$\omega_s(t) = r \omega_e(t)$	$\Omega_s(p) = r \Omega_e(p)$	
Loi entrée-sortie cinématique d'un transmetteur vis-écrou	$v_s(t) = \frac{pas}{2\pi} \omega_e(t)$	$V_s(p) = \frac{pas}{2\pi} \Omega_e(p)$	
Loi entre vitesse et position	$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$	$\Omega(p) = p \theta(p)$	
	$\theta(t) = \int \omega(t) dt$	$\theta(p) = \frac{1}{p} \Omega(p)$	
Loi de changement d'unité	$\theta_{deg}(t) = \frac{360}{2\pi} \theta_{rad}(t)$	$\theta_{deg}(p) = \frac{360}{2\pi} \theta_{rad}(p)$	
Loi entrée sortie du premier ordre d'un moteur	$\tau \dot{\omega}_m(t) + \omega_m(t) = K u_m(t)$	$\Omega_m(p) = \frac{K_m}{1 + \tau p} U_m(p)$	
Cas général avec 3 grandeurs	$s(t) = a(b e_1(t) - c e_2(t))$	$S(p) = a(b E_1(p) - c E_2(p))$	
PFD appliqué sur l'arbre moteur	$C_m(t) - C_{re}(t) = J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f_{eq} \omega_m(t)$	$\Omega_m(p) = \frac{1}{f_{eq} + J_{eq} p} (C_m(p) - C_{re}(p))$	

3.7 Simplifier un schéma-bloc

☞ La simplification éloigne le modèle, de la structure réelle du système.

Pour étudier ou prévoir le comportement d'un SLCI asservi, il est nécessaire de connaître sa fonction de transfert globale.

Celle-ci est obtenue à partir des différentes fonctions de transfert de chacun de ses constituants. Il est donc indispensable de connaître les règles d'association et de simplification des schémas-blocs.

<p>Blocs en série</p>	 $H(p) = H_1(p)H_2(p)H_3(p)$ <p>La fonction de transfert équivalente de blocs en série est égale au produit des fonctions de transfert de chacun des blocs.</p>
<p>Blocs en parallèle</p>	 $H(p) = H_1(p) + H_2(p) - H_3(p)$ <p>La fonction de transfert équivalente de blocs en parallèle est égale à la somme des fonctions de transfert de chacun des blocs.</p>
<p>Fonction de transfert en boucle fermée : FTBF</p>	 $H(p) = FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{D(p)}{1 + D(p)R(p)}$ <p>$D(p)$: FT de la chaîne directe $R(p)$: FT de la chaîne de retour</p> <p>Démonstration de la formule de Black :</p> $\Rightarrow S = D\varepsilon = D(E - S')$ $\Rightarrow S + DR S = DE$ $\Rightarrow S(1 + DR) = DE$ $\Rightarrow S = \frac{D}{1 + DR} E$
<p>Fonction de transfert en boucle ouverte : FTBO⁽¹⁾</p>	 $H(p) = FTBO(p) = \frac{S'(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{S'(p)}{E(p)} = D(p)R(p)$

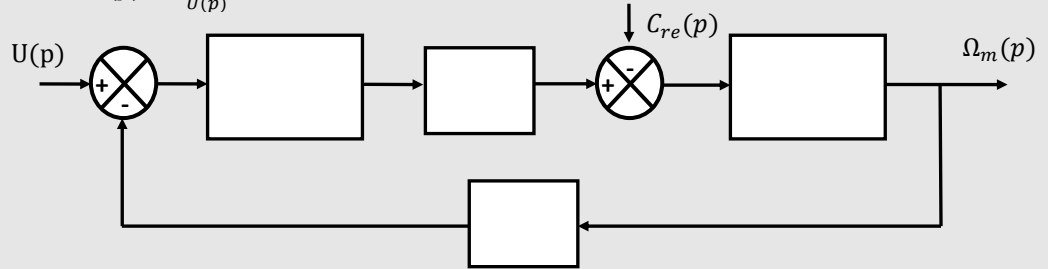
☞ Attention :
 - bien vérifier les signes dans le comparateur ;
 - ne pas confondre avec le cas des blocs en parallèle !

(1) On note parfois $F(p)$ pour la FTBO et $H(p)$ pour la FTBF.

Méthodologie pour compléter un schéma bloc :

- On détermine les flux avec les comparateurs et les équations.
- On détermine quelle équation correspond à quel bloc à l'aide des **couleurs**.
- On écrit la sortie en fonction de l'entrée pour trouver la fonction de transfert.

Exemple : A partir des 4 équations du MCC, compléter le schéma bloc. En prenant $C_{re}(p) = 0$ déterminer $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ et mettre la fonction sous la forme canonique.

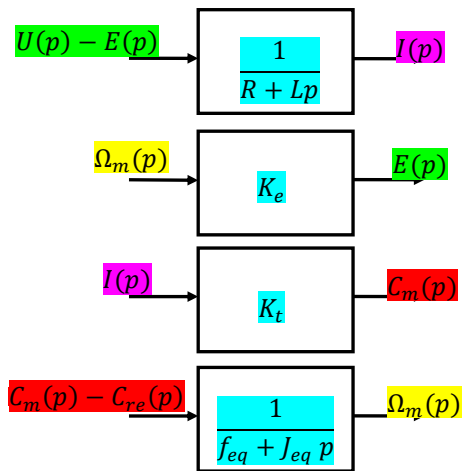


$$I(p) = \frac{1}{R+Lp} (U(p) - E(p))$$

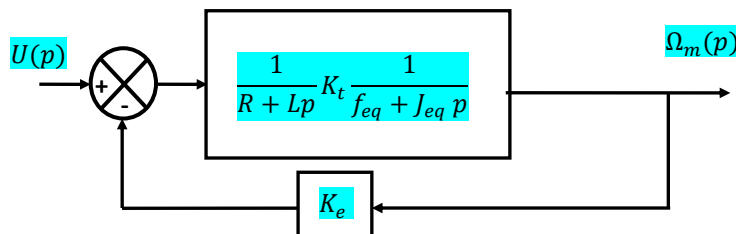
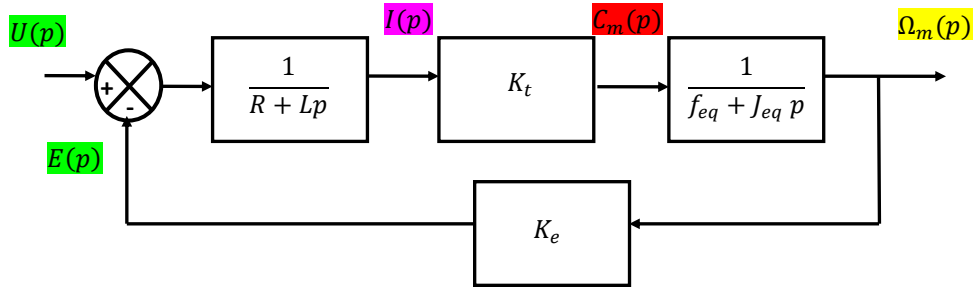
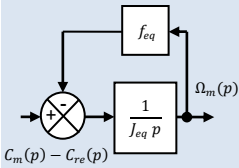
$$E(p) = K_e \Omega_m(p)$$

$$C_m(p) = K_t I(p)$$

$$\Omega_m(p) = \frac{1}{f_{eq} + J_{eq} p} (C_m(p) - C_{re}(p))$$



On aurait aussi pu noter :



$$H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{\frac{K_t}{(R+Lp)(f_{eq} + J_{eq} p)}}{1 + \frac{K_e K_t}{(R+Lp)(f_{eq} + J_{eq} p)}} = \frac{K_t}{Rf_{eq} + (Rf_{eq} + Lf_{eq})p + Lf_{eq} p^2 + K_e K_t}$$

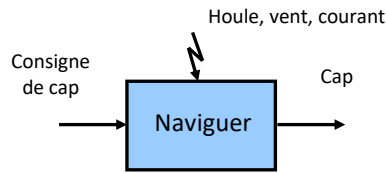
$$= \frac{K_t}{1 + \frac{Rf_{eq} + Lf_{eq}}{K_e K_t + Rf_{eq}} p + \frac{Lf_{eq}}{K_e K_t + Rf_{eq}} p^2}$$

4 SLCI asservi perturbé

4.1 Perturbation

Pour qu'un système réponde correctement aux besoins de l'utilisateur, il est important que les performances (stabilité, rapidité et précision) ne varient pas quels que soient les phénomènes extérieurs dit « **perturbations** » qui pourraient les perturber.

Exemples : Un bateau suivant un cap



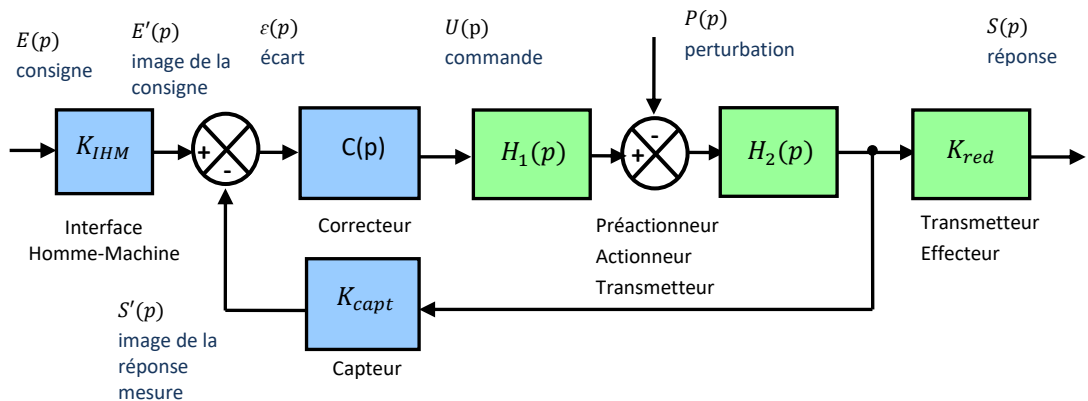
Pilote automatique de bateau

4.2 Schéma-bloc d'un système perturbé

On appelle **perturbation**, toute cause susceptible de modifier la sortie **indépendamment du signal de commande**.

Dans le modèle d'un système asservi, la **perturbation** est généralement une **entrée** qui vient modifier la chaîne directe au travers d'un **soustracteur**.

Une perturbation est une entrée non fournie par l'utilisateur.



Ce système possède 2 entrées et 1 sortie.

4.3 Théorème de superposition

Lorsqu'il y a plusieurs entrées, on pose :

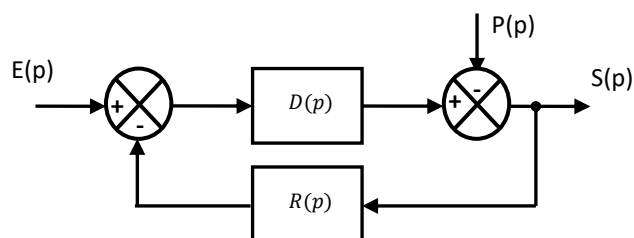
$$H_1(p) = \left. \frac{S(p)}{E(p)} \right|_{P(p)=0} \quad \text{et} \quad H_2(p) = \left. \frac{S(p)}{P(p)} \right|_{E(p)=0}$$

Théorème de superposition :

La sortie totale du système est la somme des sorties qui correspondent à chacune des entrées prises isolément.

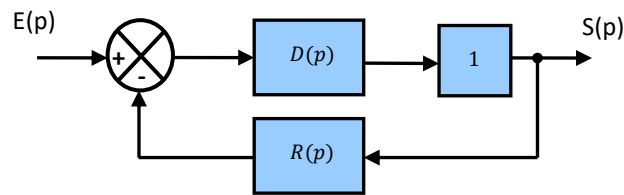
$$S(p) = H_1(p)E(p) + H_2(p)P(p)$$

Exemple : on cherche à déterminer la sortie du système modélisé par le schéma-bloc ci-dessous :



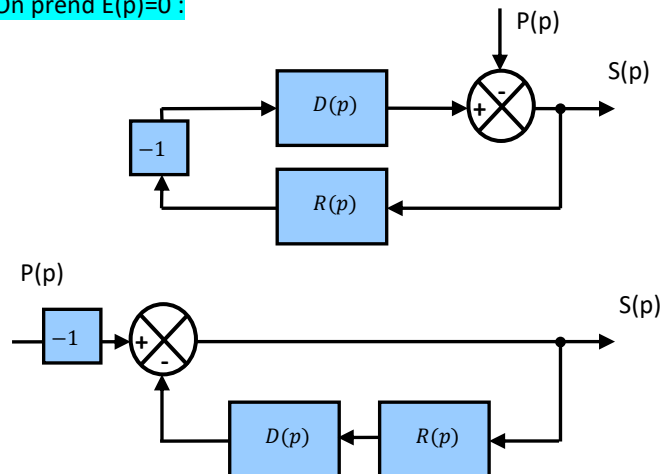
On a 2 entrées

On prend $P(p)=0$:



$$\left. \frac{S(p)}{E(p)} \right|_{P(p)=0} = \frac{D(p)}{1+D(p)R(p)}$$

On prend $E(p)=0$:



$$\left. \frac{S(p)}{P(p)} \right|_{E(p)=0} = \frac{-1}{1+D(p)R(p)}$$

On applique le théorème de superposition :

$$S(p) = H_1(p)E(p) + H_2(p)P(p)$$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{D(p)}{1+D(p)R(p)}E(p) - \frac{1}{1+D(p)R(p)}P(p)$$

Remarque : Les dénominateurs sont identiques et ce sera presque toujours le cas !

Remarque : H_1 s'appelle la fonction de transfert en poursuite et H_2 la fonction de transfert en régulation.

4.4 Stabilité d'un modèle perturbé

Pour prévoir la stabilité d'un modèle perturbé, il suffit d'étudier la stabilité de chaque fonction de transfert associée à chaque entrée.

4.5 Précision d'un modèle perturbé

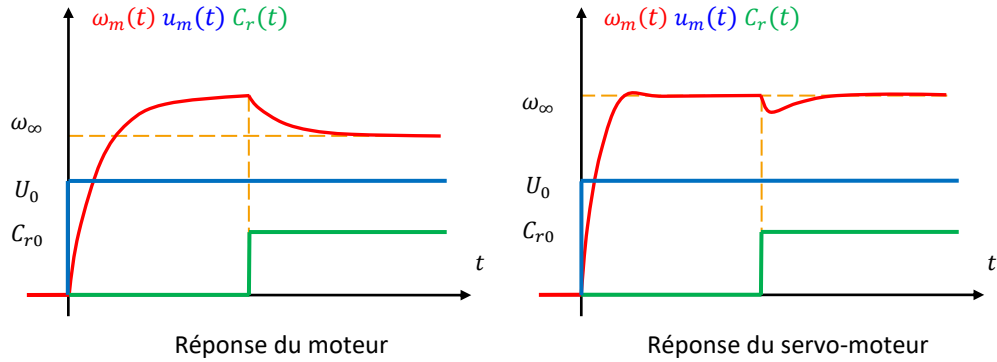
La valeur finale de la réponse d'un **modèle stable** soumis à **plusieurs entrées en échelon** est égale à

$$s_\infty = \sum s_i = \sum K_i E_{i\infty}$$

Cette valeur permettra de déterminer l'erreur en régime permanent, et de prévoir la précision d'un modèle perturbé soumis à des entrées en échelon.

Exemple : réponse d'un MCC perturbé à un échelon de tension

Prenons deux entrées positives.



La perturbation réduit la vitesse de rotation du moteur.

La correction réduit l'influence de la perturbation.

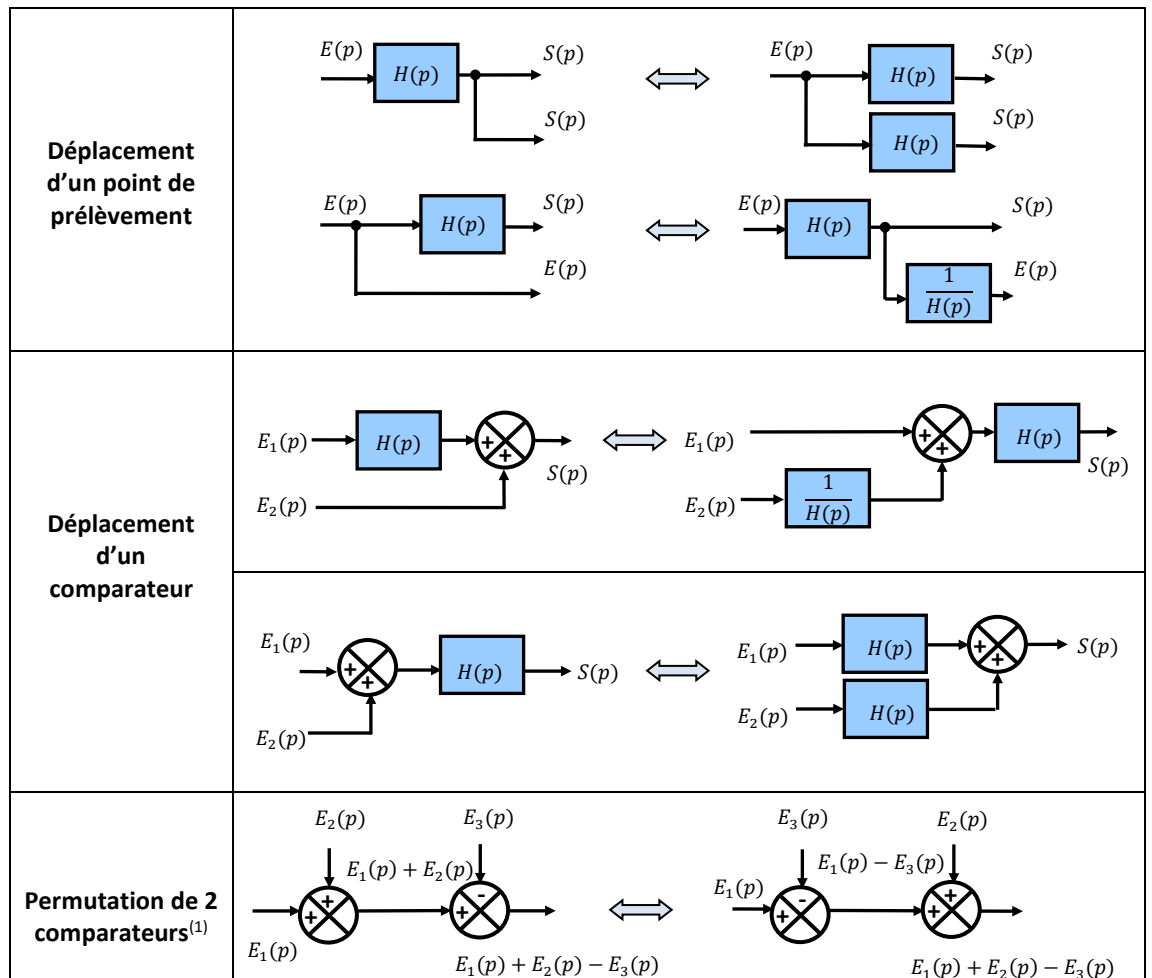
Pour des entrées en rampe, il faut utiliser le théorème de la valeur finale.

4.6 Schéma-bloc équivalent

L'objectif est d'isoler les boucles en déplaçant des blocs, et en **faisant en sorte que 2 comparateurs soient côte à côte afin de les permuter**.

Les manipulations suivantes ne sont à effectuer que si la présence de boucles dépendantes est constatée.

⚠ Attention, ces simplifications éloignent encore plus le modèle, de la réalité physique du système...



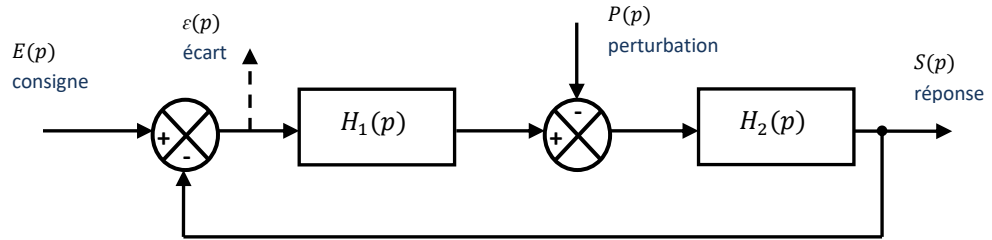
Attention : On ne peut pas permuter un point de prélèvement et un comparateur !

⚠ On utilisera cette règle pour « désimbriquer » des boucles dans un schéma-bloc.
(1) attention cette règle ne marche plus avec un signe - sur le flux principale.

5 Précision des systèmes asservis

(1) Si le système ne peut pas se mettre sous forme d'un schéma à retour unitaire, se demander quelle est l'erreur statique entre des grandeurs dont les échelles ne sont pas du même ordre de grandeur n'a aucun intérêt !

On considère un **système asservi perturbé**. En choisissant bien K_{IHM} et en faisant une transformation de schéma bloc, il peut se mettre sous la forme d'un **retour unitaire**⁽¹⁾.



En utilisant le théorème de superposition, on obtient :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + H_1(p)H_2(p)} E(p) + \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)} P(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p) + \frac{H_2(p)}{1 + FTBO(p)} P(p)$$

5.1 Erreur statique d'un système non perturbé

En utilisant le théorème de la valeur finale, calculer l'erreur statique d'un système non perturbé

$$e_{r\infty} = \varepsilon_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p)$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{1}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{1 + a_1 p + \dots + a_{n-\alpha} p^{n-\alpha}}} E(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{1}{1 + \frac{K}{p^\alpha}} E(p)$$

(2) Pour une entrée en échelon, on parle parfois d'erreur de position ou d'erreur indicielle pour une entrée unitaire.

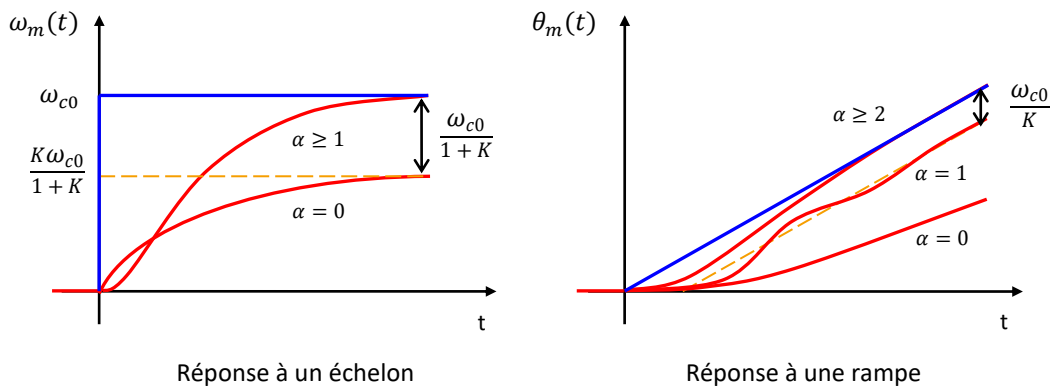
Pour une entrée en rampe, on parle parfois d'erreur de traînage, d'erreur de poursuite ou d'erreur en vitesse.

Erreur statique $e_{r\infty}$ ⁽²⁾	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Impulsion $E(p) = 1$	0	0	0
Echelon $E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0
Rampe $E(p) = \frac{V_0}{p^2}$	∞	$\frac{V_0}{K}$	0
Parabole $E(p) = \frac{a_0}{p^3}$	∞	∞	$\frac{a_0}{K}$
Pour un système de FTBO de classe α et de gain statique K			

L'erreur statique pour une entrée en échelon est nulle lorsque la FTBO est de classe $\alpha \geq 1$.

L'erreur statique pour une entrée en rampe est nulle lorsque la FTBO est de classe $\alpha \geq 2$.

Exemple : MCC asservi



6 Prévoir la réponse à un échelon

6.1 Modèle proportionnel

(1) Appelé aussi modèle à gain pur.

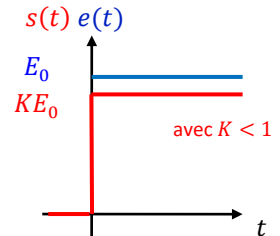
L'équation temporelle et la fonction de transfert d'un modèle à **action proportionnelle**⁽¹⁾ sont :

$$s(t) = Ke(t) \text{ pour } t \geq 0 \quad \xrightarrow{L} \quad \frac{S(p)}{E(p)} = K$$

K : gain statique (unité = $\frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}}$)

La réponse à un **échelon** d'amplitude E_0 d'un modèle à **action proportionnelle** est un **échelon d'amplitude KE_0** .

$$s(t) = KE_0 \text{ pour } t \geq 0$$



6.2 Modèle intégrateur

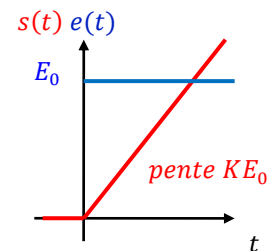
L'équation temporelle et la fonction de transfert d'un modèle **intégrateur** sont :

$$s(t) = K \int_0^t e(t') dt' \text{ pour } t \geq 0 \quad \xrightarrow{L} \quad \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p}$$

K : gain statique (unité = $\frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}} \cdot s^{-1}$) car l'unité de p est s^{-1}

La réponse à un **échelon** d'amplitude E_0 d'un modèle **intégrateur** est une **rampe de pente KE_0** .

$$s(t) = KE_0 t \text{ pour } t \geq 0$$



6.3 Modèle dérivateur

L'équation temporelle et la fonction de transfert d'un modèle **dérivateur** sont :

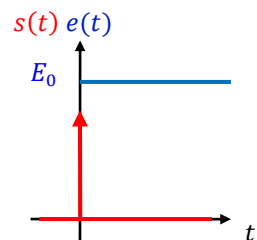
$$s(t) = K \frac{de}{dt}(t) \text{ pour } t \geq 0 \quad \xrightarrow{L} \quad \frac{S(p)}{E(p)} = Kp$$

K : gain statique (unité = $\frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}} \cdot s$) car l'unité de p est s^{-1}

La réponse à un **échelon** d'amplitude E_0 d'un modèle **dérivateur** est **l'impulsion de Dirac $\delta(t)$** :

$$s(t) = \delta(t)$$

On retiendra : $s(t)=0$ pour $t > 0$



Rappel : la variable symbolique p est homogène à $[T^{-1}]$, soit des s^{-1} .

6.4 Réponse indicielle du 1^{er} ordre

L'équation temporelle (équation différentielle du 1^{er} degré) et la fonction de transfert d'un modèle du premier ordre sont :

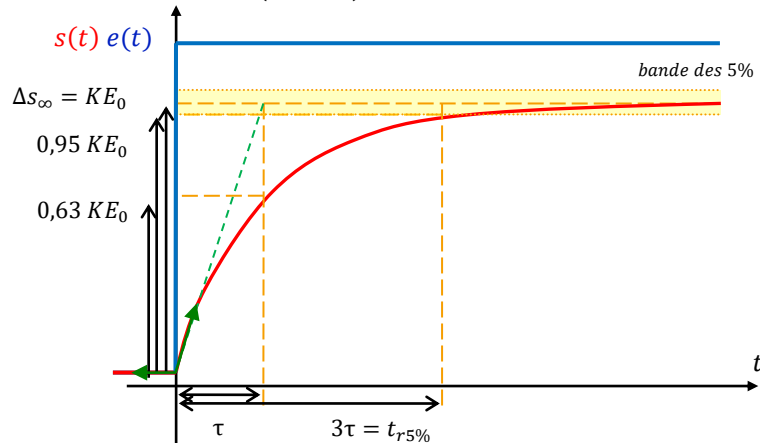
$$\tau \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = Ke(t) \text{ pour } t \geq 0 \xrightarrow{L} \quad H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$$

paramètres caractéristiques :

K : gain statique (unité = $\frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}}$)

τ : constante de temps (>0, en secondes)

La solution de l'équation différentielle pour des conditions initiales nulles et une entrée en échelon d'amplitude E_0 est : $s(t) = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ pour $t \geq 0$.



☞ Si la courbe commence à 0 en 0 :

- on utilise s_∞

- $s(\tau) = 0,63KE_0$

Le **gain statique K** caractérise le comportement du modèle en **régime permanent** : $s_\infty = KE_0$.

La **constante de temps τ** caractérise le comportement du modèle en **régime transitoire** :

- $\Delta s(\tau) = 0,63KE_0$;

- $\Delta s(3\tau) = 0,95KE_0$;

La **tangente à l'origine** coupe la **valeur finale de la sortie** en $t = \tau$

Déterminer :

- $s(0) = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{0}{\tau}}\right) = 0$

ou $s(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} s(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p S(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p H(p) E(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \frac{K E_0}{1+\tau p} = 0$

- $s_\infty = KE_0$

ou

$s_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p S(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{K E_0}{1+\tau p} = KE_0$

- $s(\tau) = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = 0,63KE_0$

- $s(3\tau) = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{3\tau}{\tau}}\right) = 0,95KE_0$

- $s'(t) = \frac{KE_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$

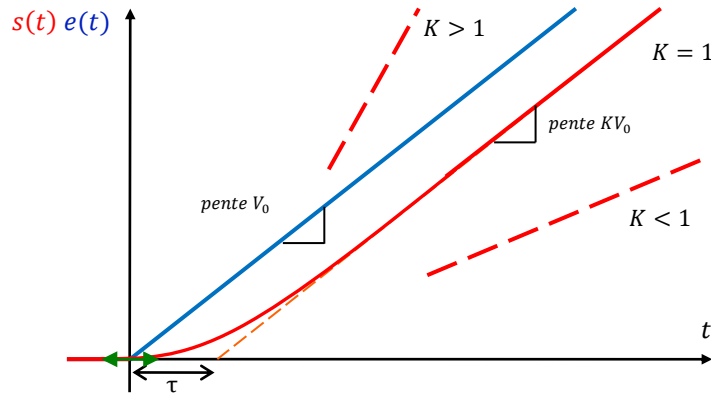
- $s'(0) = \frac{KE_0}{\tau} e^{-\frac{0}{\tau}} = \frac{KE_0}{\tau}$

ou

$s'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} s'(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p^2 S(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p^2 \frac{K E_0}{1+\tau p} = \frac{KE_0}{\tau}$

6.5 Réponse à une rampe du 1^{er} ordre

La solution de l'équation différentielle pour des conditions initiales nulles et une entrée en rampe de pente V_0 est : $s(t) = KV_0 \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ pour $t \geq 0$.



Le **gain statique K** caractérise le comportement du modèle en **régime permanent** :
 La pente en régime permanent est KV_0 .
L'asymptote en régime permanent coupe l'axe des abscisses en τ .
 La **tangente à l'instant initial** est nulle

Déterminer :

- $s(0) = KV_0 \left(0 - \tau + \tau e^{-\frac{0}{\tau}} \right) = 0$
- $s_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} KV_0(t - \tau)$ on a donc une asymptote de pente KV_0 retardée de τ

6.6 Modèle du 2^{ème} ordre

L'équation temporelle (équation différentielle du 2^{ème} degré) et la fonction de transfert d'un modèle du deuxième ordre sont :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s}{dt^2}(t) + \frac{2z}{\omega_0} \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = Ke(t) \quad \text{pour } t \geq 0 \xrightarrow{L}$$

paramètres caractéristiques :

- K** : gain statique (unité = $\frac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}}$)
- z** : facteur d'amortissement (noté parfois m ou ξ , > 0 , sans unité)
- ω_0** : pulsation propre non amortie (> 0 , en rad/s)

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

La réponse dépend des pôles de la fonction de transfert, c'est-à-dire des racines du dénominateur.

On a $\Delta = \left(\frac{2z}{\omega_0}\right)^2 - \frac{4}{\omega_0^2} = \frac{4}{\omega_0^2} (z^2 - 1)$.

Ainsi, la réponse est différente suivant la valeur du facteur d'amortissement z (si $z > 1$ ou $z < 1$). Les équations temporelles (résultat classique qui sera démontré en physique et mathématiques) sont données ci-dessous juste pour information.

z > 1 Régime aperiodique (non oscillatoire amorti)

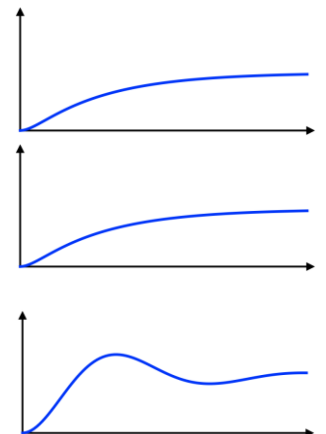
$s(t) = KE_0 \left(1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left(\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right)$ pour $t \geq 0$
 avec $\tau_1 = \frac{1}{\omega_0} (z - \sqrt{z^2 - 1})$ et $\tau_2 = \frac{1}{\omega_0} (z + \sqrt{z^2 - 1})$

z = 1 Régime aperiodique critique

$s(t) = KE_0 \left(1 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ pour $t \geq 0$
 avec $\tau = \frac{1}{\omega_0}$

0 < z < 1 Régime pseudo-periodique (oscillatoire amorti)

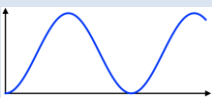
$s(t) = KE_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_0 t} \sin(\omega_p t + \varphi) \right)$ pour $t \geq 0$
 Avec $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - z^2}$



Si $z = 0$

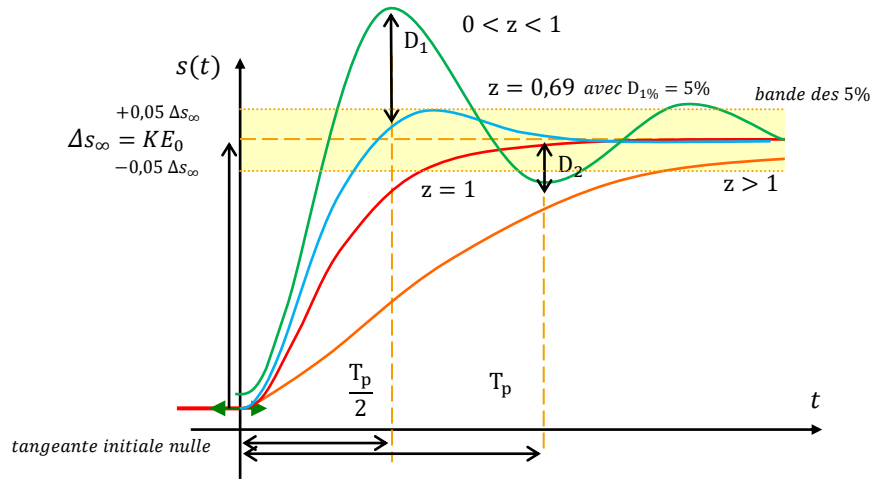
$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

régime oscillatoire non amorti, correspond aux systèmes harmoniques. La valeur finale n'existe pas, le temps de réponse à 5% et le nombre de dépassements ne sont pas définis. Il ne sera pas étudié ici.



$s(t) = KE_0(1 - \cos(\omega_0 t))$

Caractéristiques de la réponse à un échelon



La variation totale de la sortie en régime permanent est $\Delta s_{\infty} = KE_0$.
La tangente à l'instant initial est nulle.

Dépassements

Le nombre et les valeurs des dépassements $D_{k\%}$ dépendent que de z :

- lorsque $z \geq 1$, la courbe non oscillatoire amortie. Il n'y pas de dépassement ;
- lorsque $0 < z < 1$, la valeur du dépassement relatif d'ordre k est donnée par l'abaque ci-dessous ou par la relation :

$$D_{k\%} = \left| \frac{\Delta s(t_k) - \Delta s_{\infty}}{\Delta s_{\infty}} \right| = e^{\frac{-zk\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

$$z = \sqrt{\frac{\ln^2 D_{k\%}}{\pi^2 + \ln^2 D_{k\%}}}$$

- lorsque $z = 0,69$, il existe un seul dépassement⁽¹⁾ $> 1\%$ qui vaut $D_{1\%} = 5\%$;

Démonstration des valeurs des dépassements

En regardant la partie 6.6 pour $0 < z < 1$, le $k^{\text{ième}}$ dépassement en $\frac{T_p}{2}$ vaut :

$$D_{k\%} = e^{-z\omega_0 \frac{kT_p}{2}} = e^{\frac{-z\omega_0 k 2\pi}{2\omega_0 \sqrt{1-z^2}}} = e^{\frac{-zk\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

Lien entre z et $D_{k\%}$:

Pour $k = 1$,

$$\sqrt{1-z^2} \ln D_{k\%} = -z\pi \Rightarrow (1-z^2) \ln^2 D_{k\%} = \pi^2 z^2 \Rightarrow \ln^2 D_{k\%} = \pi^2 z^2 + z^2 \ln^2 D_{k\%}$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{\frac{\ln^2 D_{k\%}}{\pi^2 + \ln^2 D_{k\%}}} \text{ La courbe la plus rapide est pour : } \sqrt{\frac{\ln^2 0,05}{\pi^2 + \ln^2 0,05}} \approx 0.6901$$

Abaque des dépassements relatifs

Exemple : Donner les dépassements relatifs supérieurs à 1% pour $z=0,3$

Pour $z = 0,3$ il y a 4 dépassements supérieurs à 1%.

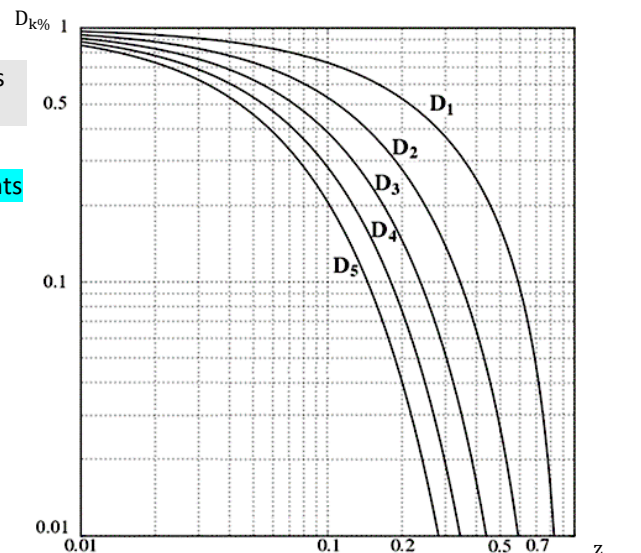
On lit graphiquement avec l'abaque :

$$D_{1\%} = 35\%$$

$$D_{2\%} = 13\%$$

$$D_{3\%} = 5\%$$

$$D_{4\%} = 2\%$$



Pour les échelles log, on retiendra :

$$\log(2) = 0,301 \approx 0,3$$

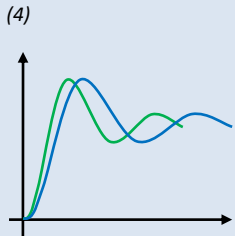
$$\log(3) = 0,47 \approx 0,5$$

$$\log(5) = 0,699 \approx 0,7$$

(1) C'est l'intervalle de temps correspondant au motif des oscillations amorties de la réponse, voir 5.6.

(2) Parfois appelé pulsation amortie ω_a . C'est la pulsation des oscillations amorties de la réponse.

(3) Le temps de réponse réduit n'est pas un temps ! Tout comme $D_{1\%}$, n'est pas une distance.



Pseudo-période

Lorsqu'il y a dépassement $0 < z < 1$, ces derniers ont lieu **toutes les demi-périodes**, avec :

- la **pseudo-période**⁽¹⁾ vaut $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}} = \frac{2\pi}{\omega_p}$;
- la pseudo-pulsation⁽²⁾ vaut $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-z^2}$ en rad/s.

Contrairement au dépassement, la **valeur de la pseudo-période T_p dépend de z et ω_0**

La relation entre fréquence et période est donnée par $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.

Temps de réponse et temps de réponse réduit

Contrairement au dépassement, la **valeur temps de réponse à 5% dépend de z et ω_0**

- lorsque $0 < z < 1$, $t_{r5\%}$ est grand car le modèle est peu amorti ;
- lorsque $z = 0,69$, $t_{r5\%}$ est minimal et $D_{1\%} = 5\%$;
- lorsque $z = 1$, il s'agit du modèle **sans dépassement le plus rapide**.
- lorsque $z > 1$, $t_{r5\%}$ est grand car le modèle est très amorti ;

Le temps de réponse réduit⁽³⁾ ne dépend que du coefficient d'amortissement z du système étudié. **Il est sans unité.**

Il n'existe pas d'expression simple qui permet de calculer $t_{r5\%}$. On utilise l'abaque ci-dessous qui nous donne la valeur du **temps de réponse réduit**, défini par $t_{r5\%}\omega_0$ (sans unité) en fonction du facteur d'amortissement z . **Deux valeurs sont à connaître :**

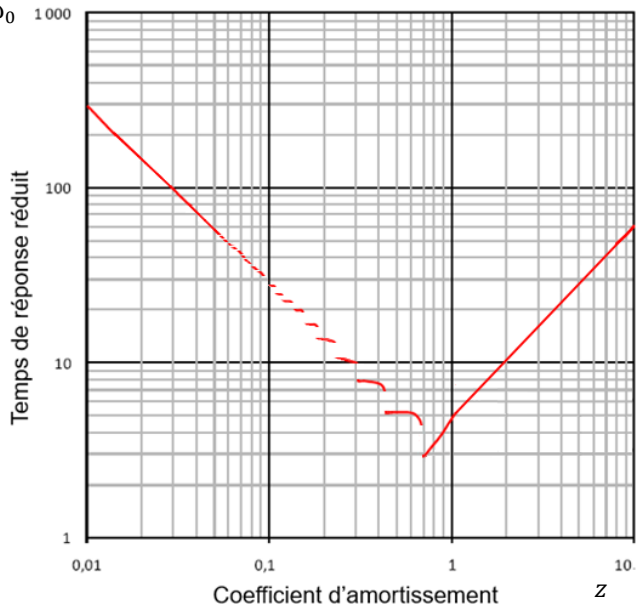
- lorsque $z = 0,69$, $t_{r5\%}\omega_0 \approx 3 \Rightarrow t_{r5\%} \approx \frac{3}{\omega_0}$
- lorsque $z = 1$, $t_{r5\%}\omega_0 \approx 5 \Rightarrow t_{r5\%} \approx \frac{5}{\omega_0}$

Abaque du temps de réponse réduit

À un facteur d'amortissement $t_{r5\%}\omega_0$ correspond un temps de réponse réduit.

Par conséquent, pour un même facteur z , plus ω_0 augmente, plus $t_{r5\%}$ diminue et donc plus le modèle est rapide⁽⁴⁾.

Exemple : Tracer le temps de réponse réduit pour $z = 0,69$ et $z = 1$.



Bilan

Le **gain statique K** caractérise le comportement du modèle en **régime permanent** : $\Delta s_\infty = KE_0$.

Le **facteur d'amortissement z** et la **pulsation propre ω_0** caractérisent le comportement du modèle en **régime transitoire** :

- plus z est faible, plus les dépassements sont importants ;
- plus ω_0 est faible, plus la pseudo-période est grande.

7 Identifier un modèle de comportement

Un **modèle de connaissance** est un modèle mathématique déterminé par application de lois et principes de la physique.

Un **modèle de comportement** est déterminé à partir de la courbe de sa réponse expérimentale à un signal test.

7.1 Méthodologie

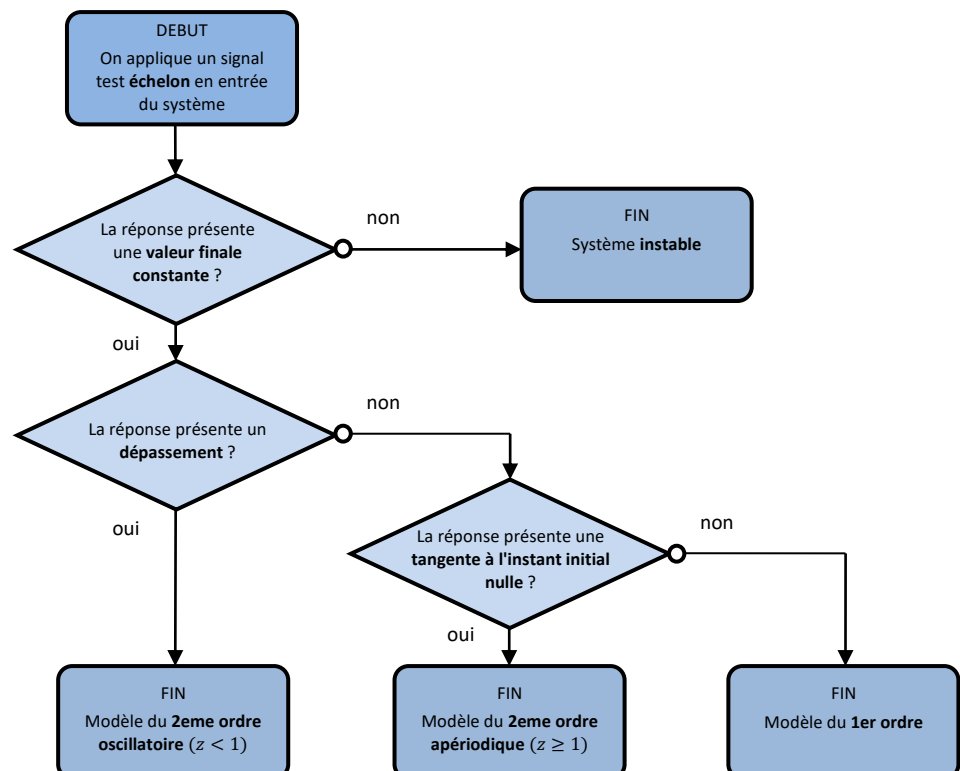
Il est parfois nécessaire, ou utile, de modéliser le comportement d'un système à partir de **résultats expérimentaux**, sans passer par un modèle connaissance. On utilise dans ce cas-là une **méthode d'identification**. Cela consiste à rechercher un modèle en analysant la réponse du système à une entrée test connue, de type échelon dans notre cas.

- Le système est considéré comme une « **boîte noire** ».
- On le soumet à un échelon et on compare les réponses obtenues expérimentalement à un catalogue de réponses types de façon à **choisir un modèle** de comportement (1^{er} ordre, 2^{ème} ordre...).
- On identifie les paramètres de sa fonction de transfert sur les relevés expérimentaux et on établit ainsi un **modèle de comportement** du système.

Cette démarche permet d'obtenir un modèle qu'il convient de valider en comparant des comportements prévus par simulation avec d'autres résultats expérimentaux.

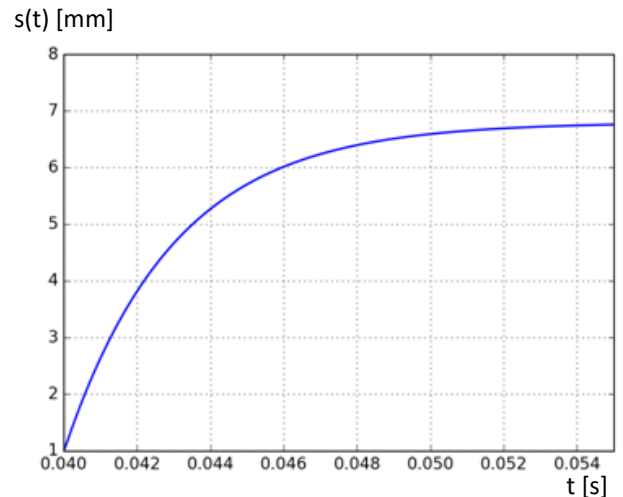
Cette étape de validation permet aussi d'estimer le domaine de validité du modèle.

Au regard des caractéristiques des réponses temporelles à un échelon des modèles du 1^{er} et du 2^{ème} ordre présentées précédemment, la démarche d'identification est proposée ci-dessous :



7.2 Identification temporelle d'un 1^{er} ordre

Exemple : considérons un système dont la fonction de transfert est inconnue et dont la réponse à un échelon d'amplitude $E_0 = 2 \text{ mm}$, obtenue expérimentalement, est donnée ci-contre. Proposer une modélisation du système.



Démarche pour un 1er ordre :

Les paramètres caractéristiques d'un modèle du premier ordre sont identifiés ainsi :

- K à partir du relevé de la **variation totale de la sortie** et en utilisant la relation $\Delta s_\infty = KE_0$ (attention aux conditions initiales) ;
- τ à partir du relevé de la **durée pour atteindre 63% de la variation totale de la sortie**.

La valeur finale est constante, la tangente à l'instant initial est non nulle, il n'y a pas de dépassements. On identifie donc la courbe avec un modèle du 1er ordre :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

A3 - Identification de la valeur de K

A4 - On lit graphiquement $\Delta s_\infty = KE_0 \Rightarrow K = \frac{\Delta s_\infty}{E_0} \approx \frac{5,8}{2} \approx 2,9 \text{ mm}$

A5 -

A6 - Identification de la valeur de τ

A7 -

A8 - On lit graphiquement $s(\tau) = 0,63\Delta s_\infty \approx 0,63 \cdot 5,8 \approx 3,6 \text{ mm}$

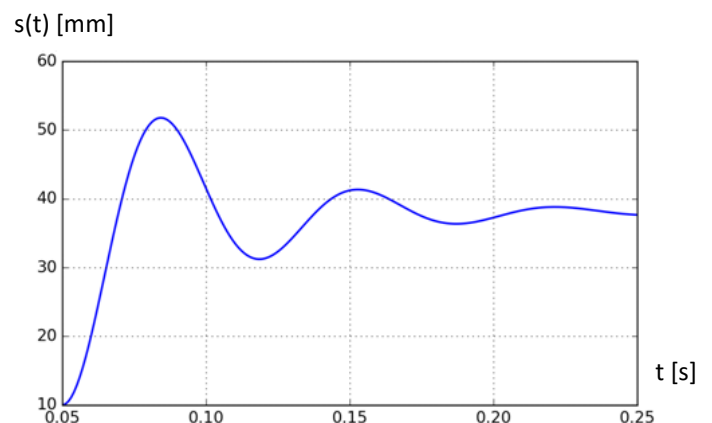
A9 - On en déduit l'antécédent $\tau \approx 3 \text{ ms}$

A10 - Modèle de comportement

Donc, on peut choisir comme modèle de comportement : $H(p) \approx \frac{2,9}{1 + 3 \cdot 10^{-3} p}$

7.3 Identification temporelle d'un 2^{ème} ordre pseudo-périodique

Exemple : considérons un système dont la fonction de transfert est inconnue et dont la réponse à un échelon d'amplitude $E_0 = 2 \text{ mm}$, obtenue expérimentalement, est donnée ci-contre. Proposer une modélisation du système.



Dans le cas d'une **réponse à un échelon avec dépassement**, les caractéristiques du 2^{ème} ordre sont identifiées ainsi :

- K à partir du relevé de la **variation totale de la sortie** et en utilisant la relation $\Delta s_{\infty} = KE_0$ (attention aux conditions initiales) ;
- z à partir du relevé de la valeur du **premier dépassement $D_{1\%}$** et :
en utilisant **l'abaque** qui lie le dépassement au facteur d'amortissement **ou** en utilisant la formule des **dépassements** relatifs :

$$D_{1\%} = e^{\frac{-z\pi}{\sqrt{1-z^2}}} \Leftrightarrow z = \sqrt{\frac{\ln^2 D_{1\%}}{\pi^2 + \ln^2 D_{1\%}}}$$

- ω_0 à partir du relevé de la durée de la **pseudo-période T_p** et en utilisant formule de la pseudo-période $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$

ou à partir du relevé de la durée $t_{r5\%}$ et en utilisant **l'abaque** qui lie le temps de réponse réduit $t_{r5\%}\omega_0$ et le facteur d'amortissement (mais cette seconde méthode est moins précise).

La valeur finale est constante, la tangente à l'instant initial est nulle, il y a des dépassements. On identifie donc la courbe avec un modèle du 2eme ordre oscillatoire ($z < 1$):

$$A11 - H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

A12 - Identification de la valeur de K

$$A13 - \text{On lit graphiquement } \Delta s_{\infty} = KE_0 \Rightarrow K = \frac{\Delta s_{\infty}}{E_0} \approx \frac{28}{2} \approx 14 \text{ mm}$$

A14 -

A15 - Identification de la valeur de z

A16 - Méthode 1 : abaque

$$A17 - \text{On lit graphiquement } D_1 \approx 52 - 38 \approx 14 \text{ mm}$$

$$A18 - D_{1\%} \approx \left| \frac{D_1}{\Delta s_{\infty}} \right| \approx \frac{14}{28} \approx 0,5 \approx 50\%$$

A19 - On utilise l'abaque (page 20) $D_{k\%} = f(z)$ et on lit graphiquement $z \approx 0,21$

A20 -

A21 - **ou** Méthode 2 : formule

$$A22 - \text{On utilise la formule des dépassements relatifs : } z = \sqrt{\frac{\ln^2 D_{1\%}}{\pi^2 + \ln^2 D_{1\%}}} \approx \sqrt{\frac{\ln^2 0,5}{\pi^2 + \ln^2 0,5}} \approx 0,21$$

A23 - Identification de la valeur de ω_0

A24 - Méthode 1 : abaque

A25 - On lit graphiquement le temps de réponse $t_{r5\%} = 140 \text{ ms}$

A26 - On utilise l'abaque (page 21) $t_{r5\%}\omega_0 = f(z)$ et on lit graphiquement pour $z \approx 0,21$

$$: t_{r5\%}\omega_0 \approx 12 \Rightarrow \omega_0 \approx \frac{12}{t_{r5\%}} \approx \frac{12}{0,140} \approx 93 \text{ rad/s}$$

A27 -

A28 - **ou** Méthode 2 : formule

On lit graphiquement $T_a \approx 67 \text{ ms}$

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p \sqrt{1-z^2}} \approx \frac{2\pi}{0,067 \sqrt{1-0,21^2}} \approx 95 \text{ rad/s}$$

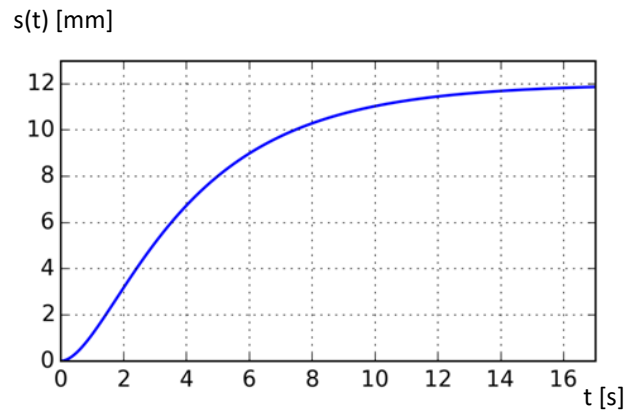
A29 - Modèle de comportement

A30 - Donc, on peut choisir comme modèle de comportement :

$$H(p) = \frac{14}{1 + \frac{2,021}{93}p + \frac{1}{93^2}p^2}$$

7.4 Identification temporelle d'un 2^{ème} ordre aperiodyque

Exemple : considérons un système dont la fonction de transfert est inconnue et dont la réponse à un échelon d'amplitude $E_0 = 2 \text{ mm}$, obtenue expérimentalement, est donnée ci-contre. Proposer une modélisation du système.



Identifier le système revient alors dans ce cas à déterminer les valeurs du gain statique K , et des deux constantes de temps τ_1 et τ_2 ⁽¹⁾.

(1) Et non pas les valeurs de z et ω_0 .

Dans le cas d'une **réponse à un échelon sans dépassement**, mais avec **pente nulle à l'instant initial**, les caractéristiques du 2^{ème} ordre sont identifiées en supposant que pour t suffisamment grand, la courbe est assimilable à la réponse d'un **premier ordre de constante de temps τ_2 , avec un retard τ_1** . Les caractéristiques sont déterminées ainsi :

- K à partir du relevé de la **variation totale de la sortie** et en utilisant la relation $\Delta s_\infty = K E_0$ (attention aux conditions initiales) ;
- La **tangente au point d'inflexion** atteint l'axe des abscisses en τ_1 ;
- La **tangente au point d'inflexion** atteint la valeur finale de la sortie en $\tau_1 + \tau_2$.

La valeur finale est constante, la tangente à l'instant initial est nulle, il n'y a pas de dépassements. On identifie donc la courbe avec un modèle du 2^{ème} ordre aperiodyque ($z \geq 1$):

$$A31 - H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

A32 - Identification de la valeur de K

$$A33 - \text{On lit graphiquement } \Delta s_\infty = K E_0 \Rightarrow K = \frac{\Delta s_\infty}{E_0} \approx \frac{12}{2} \approx 6 \text{ mm}$$

A34 -

A35 - Identification des valeurs de τ_1 et τ_2

On trace la tangente au point d'inflexion. On lit graphiquement

$$\tau_1 \approx 0,5 \text{ s et } \tau_1 + \tau_2 \approx 5 \text{ s} \Rightarrow \tau_2 \approx 4,5 \text{ s}$$

A36 - Modélisation de comportement

A37 - Donc, on peut choisir comme modèle de comportement :

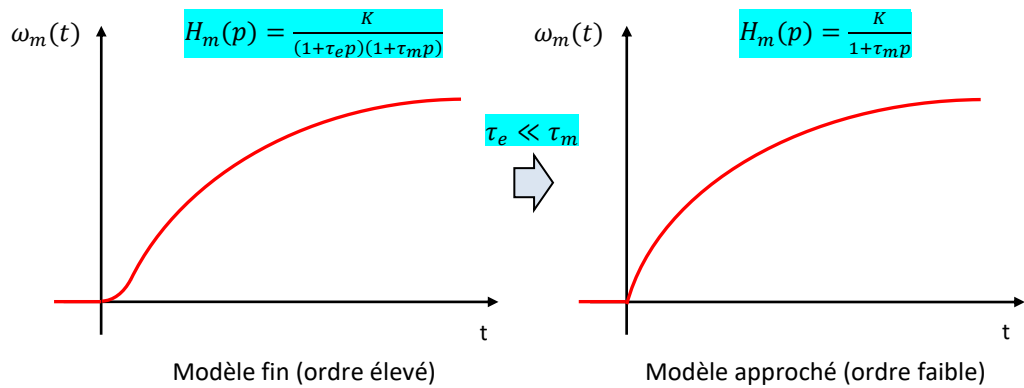
$$H(p) = \frac{K}{(1 + 0,5 p)(1 + 4,5 p)}$$

7.5 Réduction de l'ordre d'un modèle

Plus on **modélise finement** un système réel, plus sa fonction de transfert est d'un **ordre élevé**. En parallèle, on constate que son comportement dynamique reste très voisin de système de fonction de transfert d'ordre inférieur. Si les différences comportementales sont faibles, il peut être intéressant, de substituer au modèle complexe un modèle simplifié, dont l'étude est plus économique.

S'ils sont suffisamment **éloignés des pôles dominants**, les pôles à partie réelle négative peuvent être **négligés**.

Exemple : MCC



(1) Par exemple pour un MCC, on aura $\tau_e \ll \tau_m$.

Très souvent⁽¹⁾ lorsque $z > 1$, on étudiera un système où une constante de temps est **négligeable** devant l'autre $\tau_1 \ll \tau_2$. On est alors en présence d'un pôle dominant et on peut alors se ramener à un modèle du **1^{er} ordre**.

$$H(p) = \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} \approx \frac{K}{1+\tau_2 p}$$

8 Analyse fréquentielle

L'analyse fréquentielle (ou harmonique) d'un système s'intéresse à sa réponse à une sollicitation périodique. Elle permet de prévoir son comportement lorsqu'il est soumis à des entrées sinusoïdales, ce qui est indispensable en phase de conception de certains systèmes.

Par ailleurs, comme cela a été mis en œuvre plus tôt dans l'année avec la réponse temporelle à un échelon, la réponse fréquentielle d'un système linéaire continu et invariant permet aussi d'identifier sa fonction de transfert en vue de lui associer un modèle approché.

Enfin, notons que l'analyse fréquentielle est également à la base des méthodes de conception des correcteurs traitées en 2^{ème} année.

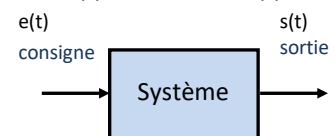


Système dont l'amplitude des oscillations du signal de sortie doit être atténuée.

8.1 Caractéristiques

Soit un système linéaire continu et invariant de grandeurs d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ caractérisé par l'équation différentielle à coefficients constants :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n}(t) + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m}(t) + \dots + b_0 e(t)$$



L'expression temporelle de la sortie, solution de l'équation différentielle, est la somme des solutions générales de l'équation sans second membre et d'une solution particulière avec second membre. On note que :

- les solutions générales caractérisent le régime transitoire de la sortie ;
- la solution particulière caractérise le régime permanent de la sortie.

Ces considérations permettent de montrer que :

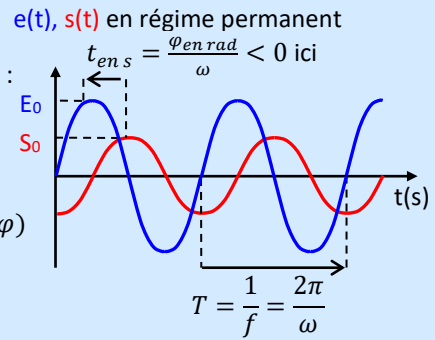
Pour une **entrée sinusoïdale**, la **sortie** en régime permanent d'un SLCI est aussi un **signal sinusoïdal**.

(1) Appelé aussi réponse forcée ou régime établi.

Tout SLCI, soumis à une **entrée sinusoïdale** d'amplitude E_0 et de pulsation ω , présente une réponse en régime permanent⁽¹⁾ sinusoïdale :

- de **même pulsation** ω [en rad/s] ;
- de **déphasage** φ [en rad ou en °] ;
- d'**amplitude** S_0 **différente**.

$$\text{si } e(t) = E_0 \sin(\omega t) \Rightarrow s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi)$$



À une pulsation ω donnée du signal d'entrée, quelle que soit l'amplitude E_0 du signal d'entrée :

- le rapport $\frac{S_0}{E_0}$, appelé **gain** $\left[\frac{\text{unité de sortie}}{\text{unité d'entrée}} \right]$, est **constant** ;
- le déphasage φ , appelé **phase** [en rad ou en °], est aussi **constant**.

Les courbes de gain $G(\omega) = \frac{S_0}{E_0}(\omega)$ et de phase $\varphi(\omega)$ caractérisent alors le comportement fréquentiel du modèle. Une fois connues, elles peuvent donc permettre de prévoir la réponse du modèle à n'importe quelle entrée sinusoïdale.

8.2 Diagramme de Bode

Afin de faciliter l'interprétation des évolutions du gain et de la phase en fonction de ω , on utilise une représentation graphique du comportement fréquentiel.

(1) Le décibel est une unité sans dimension est utilisé pour comparer de grandes plages de variation.

Le 20 sert à comparer des grandeurs d'effort ou de flux.

(2) Attention, car c'est le gain en décibel $G_{dB}(\omega)$ qui est relevé sur le diagramme. Il faut ensuite, à partir de cette valeur, calculer le gain $G(\omega)$.

Le **diagramme de Bode** est constitué de deux courbes tracées l'une en dessous de l'autre en utilisant une échelle logarithmique en abscisse :

- le **diagramme de gain en dB** $G_{dB}(\omega) = 20 \log G(\omega)$ ⁽¹⁾ ;
- le **diagramme de phase** $\varphi(\omega)$, avec $\varphi(\omega)$ en radian ou en degré.

Par lecture du digramme de Bode, on peut déterminer l'expression du signal de sortie :

$$s(t) = E_0 G(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

(2) avec $G(\omega) = 10^{\frac{G_{dB}(\omega)}{20}}$

Exemple : Donner la réponse temporelle du système ci-contre lorsqu'il est soumis à une entrée $e(t) = 10 \sin(40t)$.

On lit graphiquement pour $\omega = 40 \text{ rad/s}$:

$$G_{dB}(40) = 20 \log K = -12 \text{ dB}$$

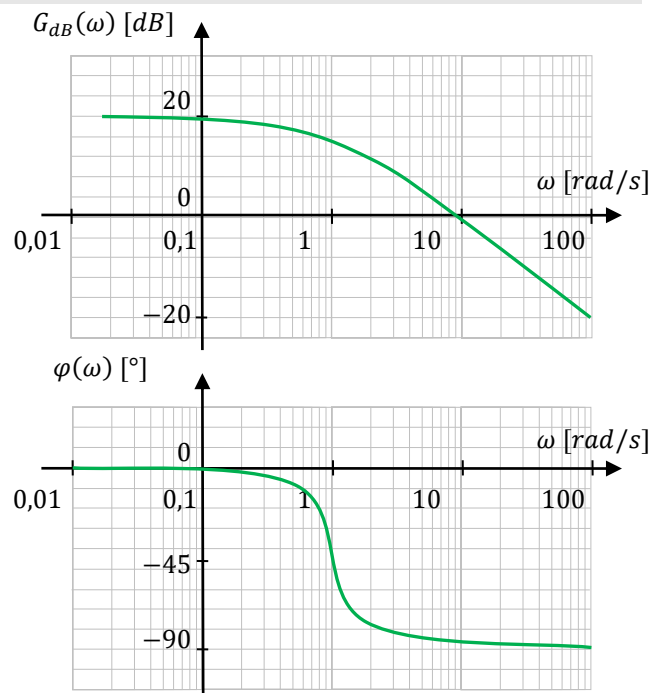
$$\Rightarrow G = 10^{-\frac{12}{20}} = 0,25$$

et

$$\varphi(40) = -90^\circ$$

On a donc

$$s(t) = 2,5 \sin(40t - \frac{\pi}{2})$$



Pour bien appréhender un diagramme de Bode, il est nécessaire de connaître certaines de ces particularités :

- l'écart entre ω et 10ω est appelé une **décade** ;
- sur l'échelle logarithmique, il n'y a **pas d'origine** des abscisses (pas de 0) et le tracé ne concerne qu'une plage de pulsations judicieusement choisie sur 3 ou 4 décades ;
- un gain de **0 dB** correspond à un **gain de 1**, soit E_0 et S_0 de même amplitude ;
- un **gain en dB positif** correspond à $S_0 > E_0$;
- un **gain de 0 dB** correspond à $S_0 = E_0$;
- un **gain en dB négatif** correspond à $S_0 < E_0$;
- **20dB** = $20 \log(10)$ correspond à un gain de 10, soit $S_0 = 10E_0$, **-20dB** à un gain de 1/10.

8.3 Gain et phase

Les équations des courbes de gain et de phase d'un système peuvent être déterminées à partir de sa fonction de transfert.

Pour l'analyse fréquentielle, la fonction de transfert complexe $H(j\omega)$ est obtenue à partir de la fonction de transfert $H(p)$ **en remplaçant p par $j\omega$** :

$$H(p) = H(j\omega)$$

Le **gain** $G(\omega)$ et la **phase** $\varphi(\omega)$ s'obtiennent à partir de la **fonction de transfert complexe** $H(j\omega)$ avec :

$$\boxed{G(\omega) = |H(j\omega)|} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))}$$

module de la FT complexe argument de la FT complexe

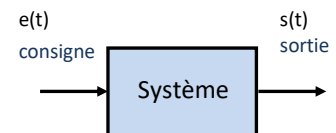
Le **gain en décibel** $G_{dB}(\omega)$ s'obtient à partir de la **fonction de transfert complexe** $H(j\omega)$ avec :

$$\boxed{G_{dB}(\omega) = 20 \log|H(j\omega)|}$$

Démonstration : relation entre $G(\omega)$ et $|H(j\omega)|$, relation entre $\varphi(\omega)$ et $\arg(H(j\omega))$

Soit un système linéaire continu et invariant de grandeurs d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ caractérisé par l'équation différentielle à coefficients constants :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n}(t) + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m}(t) + \dots + b_0 e(t)$$



Pour déterminer la solution de l'équation différentielle linéaire, on pose les variables complexes : $\underline{E} = E_0 e^{j\omega t}$ et $\underline{S} = S_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ avec $e(t) = \text{Im}(\underline{E})$ et $s(t) = \text{Im}(\underline{S})$.

Les variables complexes vérifient l'équation différentielle :

$$a_n \frac{d^n \underline{S}}{dt^n}(t) + \dots + a_0 \underline{S}(t) = b_m \frac{d^m \underline{E}}{dt^m}(t) + \dots + b_0 \underline{E}(t)$$

$$\Rightarrow a_n (j\omega)^n \underline{S} + \dots + a_0 \underline{S} = b_m (j\omega)^m \underline{E} + \dots + b_0 \underline{E}$$

donc

$$H(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_0}$$

On reconnaît la fonction de transfert du système où la variable de Laplace p a été remplacée par $j\omega$.

$$\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{S_0}{E_0} e^{j\varphi} = G(\omega) e^{j\varphi}$$

De ces observations, on déduit que : $H(j\omega) = G(\omega) e^{j\varphi}$

8.4 Filtre, pulsation de coupure et bande passante

(1) Cela peut être voulu ou une conséquence des limites de la technologie utilisée.

Le gain en décibel, donc le gain, dépend de la pulsation du signal d'entrée.

Un certain nombre de systèmes sont conçus⁽¹⁾ tels que, en dehors d'une plage de pulsation, le signal de sortie est atténué. Cela implique que, si les variations de l'entrée se font à une fréquence en dehors de la plage en question, le système ne peut les suivre et la sortie est quasiment inexistante car fortement atténuée.

On parle de **filtre** auquel est associé une **bande passante BP_{-ndB}** délimitée par des **pulsations de coupure**.

Les pulsations de coupure sont définies à partir d'un gain de référence. Il existe plusieurs façons de les définir, nous retiendrons :

Définition	Méthode analytique	Méthode graphique
ω_{c-3dB} : pulsation de coupure à -3 dB Pulsation à partir de laquelle le gain est atténué de 30% par rapport à une valeur de référence G_{ref}	$G(\omega_{c-3dB}) = 70\%G_{ref}$ $= 0,7G_{ref}$	$G_{dB}(\omega_{c-3dB}) = 20\log G_{ref} + 20\log 0,7$ $= G_{ref} - 3dB$
ω_{c-6dB} : pulsation de coupure à -6 dB Pulsation à partir de laquelle le gain est atténué de 50% par rapport à une valeur de référence G_{ref}	$G(\omega_{c-6dB}) = 50\%G_{ref}$ $= 0,5G_{ref}$	$G_{dB}(\omega_{c-6dB}) = 20\log G_{ref} + 20\log 0,5$ $= G_{ref} - 6dB$

NB : pour des filtres passe-bas $G_{ref} = K$ et $G_{refdB} = 20 \log K$

Filtre passe-bande		BP_{-3dB} $= [\omega_{c-3dB1}, \omega_{c-3dB2}]$
Filtre passe-bas		$BP_{-3dB} = [0, \omega_{c-3dB}]$
Filtre passe-haut		BP_{-3dB} $= [\omega_{c-3dB}, +\infty[$

8.5 Stabilité à partir du diagramme de Bode

Un système stable a nécessairement sa classe nulle.
Si le système est stable, le diagramme de Bode aura une asymptote en dB aux basses fréquences horizontale. Et donc :

$$G_{dB}(0) \neq \infty$$

8.6 Rapidité à partir du diagramme de Bode

Un système avec une large bande passante est apte à suivre des entrées rapides ou des fréquences élevées.

Ainsi, une large bande passante caractérise un système rapide.

8.7 Précision à partir du diagramme de Bode

Ainsi, si on suppose un système stable (donc nécessairement de classe 0) et précis, ce dernier aura un gain statique K égal à 1.

Si le système est précis, alors $K = 1$, donc $G_{dB}(0) = 20 \log K = 20 \log 1 = 0dB$

Si le système est précis alors le diagramme de Bode aura une asymptote en dB aux basses fréquences égale à 0 dB.

9 Réponse fréquentielle

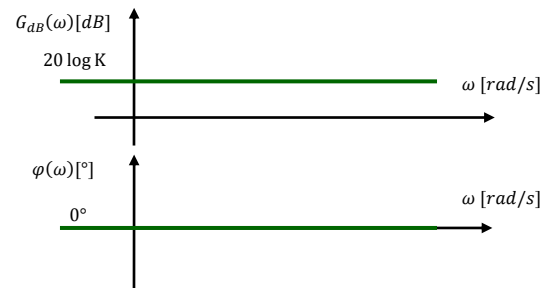
(1) Ils pourront être ensuite utilisés sans démonstration.

Les réponses fréquentielles des fonctions usuelles⁽¹⁾ sont les suivantes.

9.1 Modèle proportionnel

$$H(p) = K \Rightarrow H(j\omega) = K \quad \text{avec} \quad K > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log G(\omega) = 20 \log K \\ \varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = 0^\circ \end{cases}$$



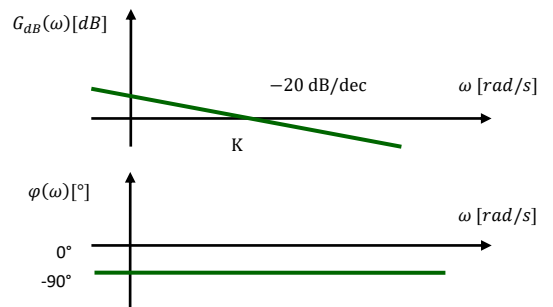
9.2 Modèle intégrateur

$$H(p) = \frac{K}{p} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \omega \\ \varphi(\omega) = -90^\circ \end{cases}$$

On a donc une pente de -20 dB/dec.

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \omega = 0dB \Rightarrow \omega = K$$

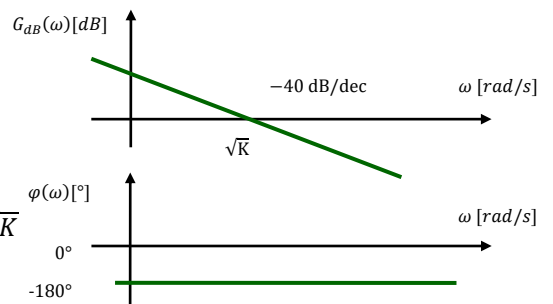


9.3 Modèle intégrateur de degré 2

$$H(p) = \frac{K}{p^2} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2} = -\frac{K}{\omega^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 40 \log \omega \\ \varphi(\omega) = -180^\circ \end{cases}$$

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 40 \log \omega = 0dB \Rightarrow \omega = \sqrt{K}$$

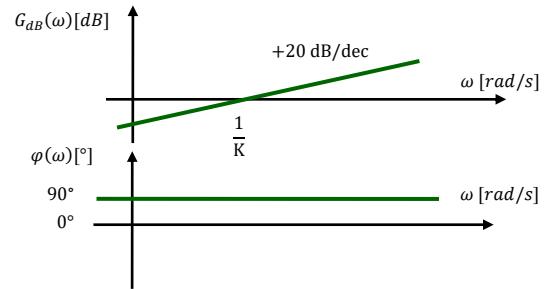


9.4 Modèle dérivateur

$$H(p) = Kp \Rightarrow H(j\omega) = K j\omega$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log K + 20 \log \omega \\ \varphi(\omega) = +90^\circ \end{cases}$$

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log K + 20 \log \omega = 0 \text{ dB} \Rightarrow \omega = \frac{1}{K}$$



9.5 Modèle du 1^{er} ordre

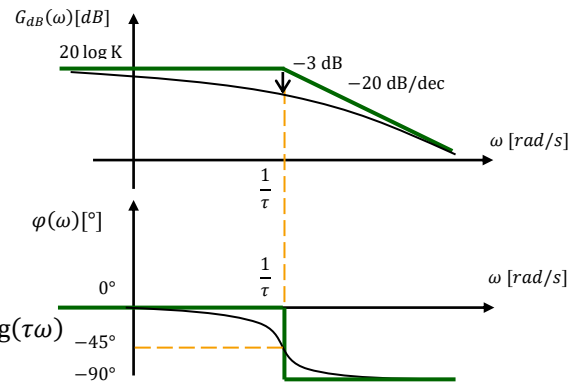
$$H(p) = \frac{K}{1+\tau p} = \frac{K}{1+j\tau\omega}$$

Comportement asymptotique

$$BF: \lim_{\omega \rightarrow 0^+} H(j\omega) = K \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log K \\ \varphi(\omega) = 0^\circ \end{cases}$$

HF :

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} H(j\omega) = \frac{K}{j\tau\omega} \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log(\tau\omega) \\ \varphi(\omega) = -90^\circ \end{cases}$$



La **pulsation de cassure** ω_c correspond à la pulsation du **point d'intersection des asymptotes**.

$$20 \log K = 20 \log K - 20 \log \tau\omega_c \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{\tau}$$

$$\text{On a également } \omega_{c-3dB} = \omega_{cassure} = \frac{1}{\tau}$$

Comportement réel

$$\begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \\ \varphi(\omega) = -\arg(1 + j\tau\omega) = -\arctan(\tau\omega) \end{cases}$$

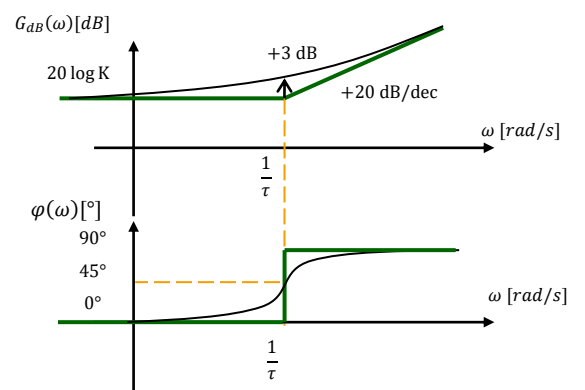
$$H(j\omega_c) = \frac{K}{1 + j\tau \frac{1}{\tau}} = \frac{K}{1 + j} \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega_c) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{2} = 20 \log K - 3 \text{ dB} \\ \varphi(\omega_c) = -\arg(1 + j) = -45^\circ \end{cases}$$

9.6 Modèle du 1^{er} ordre inverse

$$H(p) = K(1 + \tau p) = K(1 + j\tau\omega)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log K + 20 \log \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \\ \varphi(\omega) = \arg(1 + j\tau\omega) = \arctan(\tau\omega) \end{cases}$$

Par analogie avec l'étude précédente :



9.7 Modèle du 2^{ème} ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} j\omega + \frac{1}{\omega_0^2} (j\omega)^2} = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{2z\omega}{\omega_0}}$$

Comportement asymptotique

BF : $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} H(j\omega) = K \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log K \\ \varphi(\omega) = 0^\circ \end{cases}$

HF : $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} H(j\omega) = \frac{K}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log K + 40 \log(\omega_0) - 40 \log(\omega) \\ \varphi(\omega) = -180^\circ \end{cases}$

$20 \log K = 20 \log K + 40 \log(\omega_0) - 40 \log(\omega_c) \Rightarrow \omega_c = \omega_0$

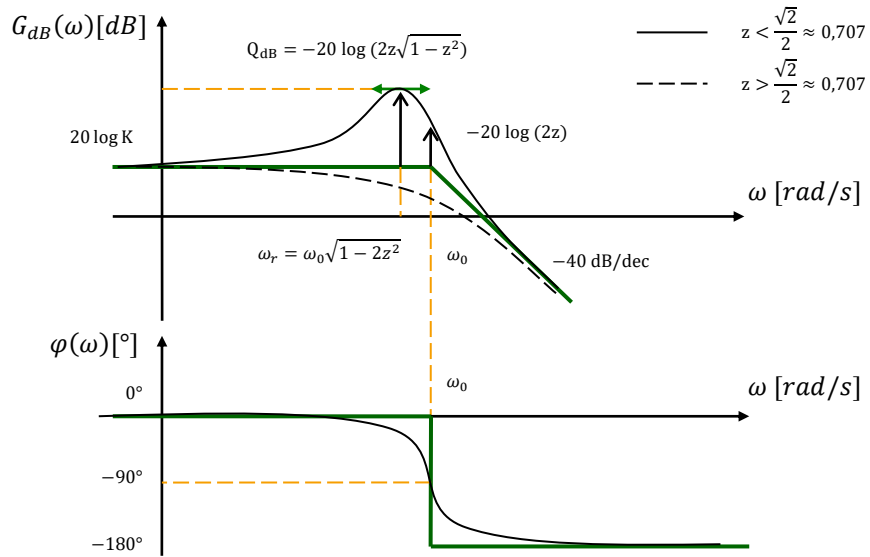
Comportement réel

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2z\omega}{\omega_0}\right)^2} \\ \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\frac{2z\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) [+180^\circ \text{ si } \omega > \omega_0] \end{cases}$$

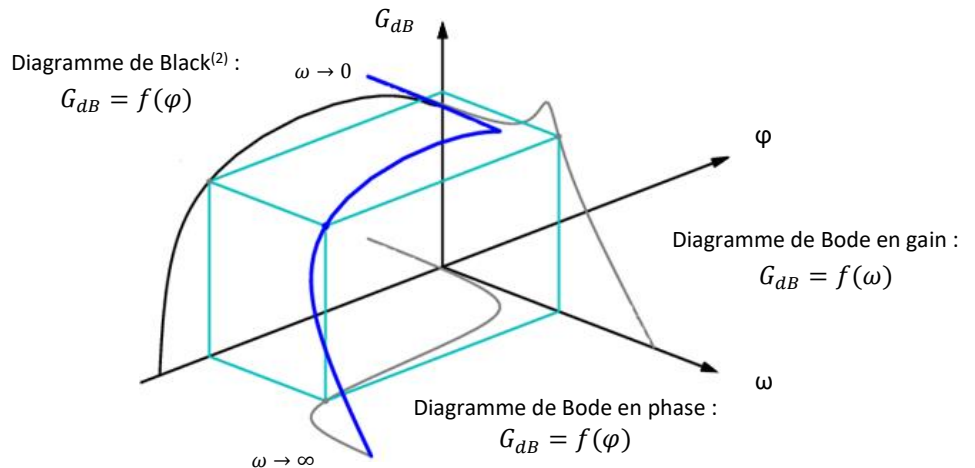
$H(j\omega_0) = \frac{K}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} + j \frac{2z\omega_0}{\omega_0}} = \frac{K}{j2z} = -j \frac{K}{2z} \Rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega_0) = 20 \log K - 20 \log 2z \\ \varphi(\omega_0) = -90^\circ \end{cases}$ (1)

(1) $-20 \log 2z$ peut être positif $z < 0,5$ ou négatif $z > 0,5$.

si $z < 1$:



On appelle lieu de transfert le lieu des points de coordonnées $(\omega, \varphi(\omega), G_{dB}(\omega))$. On peut le tracer :



(2) Le diagramme de Black est hors programme.

Résonance, pulsation de résonance et facteur de surtension

Pour certaines valeurs du facteur d'amortissement z , la courbe de gain peut présenter un extrémum :

(1) A ne pas confondre avec la pseudo-pulsation :

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - z^2}$$

Pour $0,707 < z < 1$, la réponse temporelle à un échelon présente des dépassements, mais la réponse fréquentielle ne présente pas de résonance.

(2) Avec Q le coefficient de surtension :

$$Q = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(j0)|} = \frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}}$$

- si $z < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$, la courbe de gain présente un maximum pour la pulsation de résonance ω_r ⁽¹⁾

$$G_{dB}(\omega_0) = 20 \log K \boxed{-20 \log(2z)}$$

$$G_{dB}(\omega_r) = 20 \log K \underbrace{\boxed{-20 \log(2z\sqrt{1-z^2})}}_{Q_{dB}^{(2)}} \text{ avec } \boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1-2z^2}}$$

Le facteur de surtension en dB Q_{dB} varie de 0 à $+\infty$ quand z varie de 0,707 à 0.

La pulsation de résonance ω_r varie de 0 à ω_0 quand z varie de 0,707 à 0.

- si $z > \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$ alors la courbe de gain est strictement décroissante, **il n'y a pas de résonance**.

Démonstration de l'existence d'une pulsation de résonance :

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) &= 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2z\omega}{\omega_0}\right)^2} \right) \\ &= 20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{(1 - u^2)^2 + 4z^2 u^2} \right) \end{aligned}$$

en posant $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite,

Un extrémum de $G_{dB}(\omega)$ existe si $P(u) = (1 - u^2)^2 + 4z^2 u^2$ a un extrémum, soit si $\frac{dP}{du}(u) = 0$.

Avec $\frac{dP}{du}(u) = 2(-2u)(1 - u^2) + 4z^2 2u = 4u(2z^2 - 1 + u^2)$,

$$\frac{dP}{du}(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \text{ soit } (\omega = 0) \Rightarrow \text{impossible en régime fréquentiel} \\ u^2 = 1 - 2z^2 \Rightarrow \text{possible si } 1 - 2z^2 > 0 \text{ soit } z < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \end{cases}$$

et pour $u = \sqrt{1 - 2z^2}$ soit $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2}$,

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega_r) &= 20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{(2z^2)^2 + 4z^2(1 - 2z^2)} \right) \\ &= 20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{4z^2(z^2 + 1 - 2z^2)} \right) \\ &= 20 \log(K) - 20 \log(2z\sqrt{1 - z^2}) \end{aligned}$$

$\varphi(\omega_r)$ n'est pas une valeur particulière.

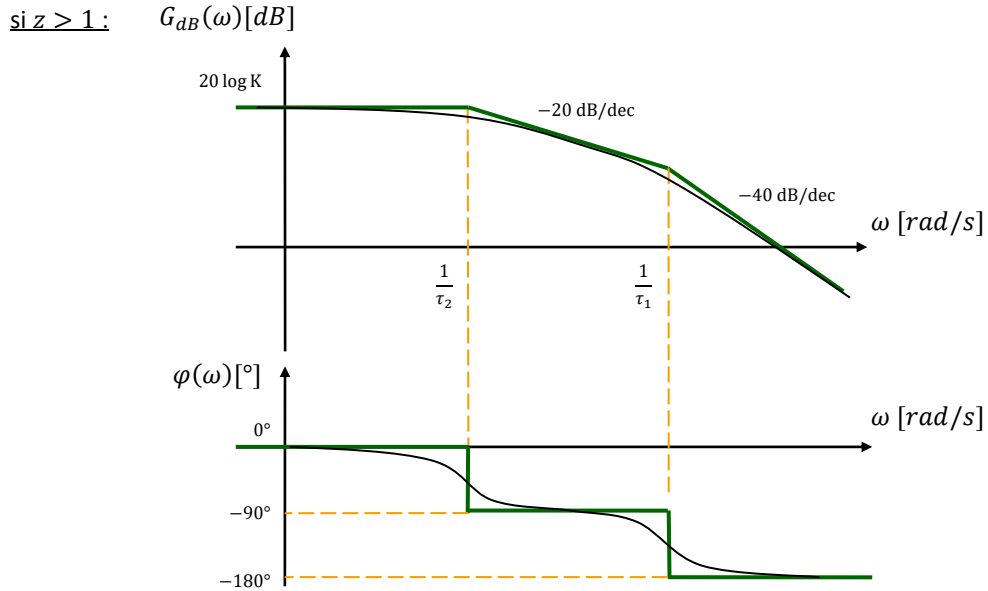
Cas particulier où $z > 1$

$$\text{Pour } z > 1, H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

qui est un **produit de 2 fonctions de transfert du 1^{er} ordre** de constantes de temps τ_1 et τ_2 .

Leurs diagrammes de Bode s'additionnent.

Si $\omega_{c1} = \frac{1}{\tau_1}$ et $\omega_{c2} = \frac{1}{\tau_2}$ ont **plus qu'une décade** de différence, les deux diagrammes réels influent peu l'un sur l'autre.



9.8 Cas général

Propriétés des diagrammes de Bode

Les **modules en dB** et les **arguments en degrés s'ajoutent** quand les fonctions de transfert se **multiplient**.⁽¹⁾

(1) Si la distance qui sépare les différentes pulsations de cassure est trop faible (<1 décade) les courbes réelles se chevauchent.

9.9 Méthodologie

Méthode de tracé d'un diagramme de Bode

Étape n°1 : mettre la fonction de transfert sous la forme d'un produit de fonctions usuelles → intégrateurs d'ordre α puis 1^{er} et 2nd ordre, 1^{er} et 2^{eme} ordre inverses...

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{\prod_m (1 + \tau_m p)}{\prod_n (1 + \tau_n p)} \cdot \frac{\prod_i \left(1 + \frac{2z_i}{\omega_{0i}} p + \frac{1}{\omega_{0i}^2} p^2\right)}{\prod_j \left(1 + \frac{2z_j}{\omega_{0j}} p + \frac{1}{\omega_{0j}^2} p^2\right)}$$

Labels in the diagram:
 - Gain statique: K
 - Intégrateur de classe α : p^α
 - Produit de 1^{er} ordre inverse: $\prod_m (1 + \tau_m p)$
 - Produit de 1^{er} ordre: $\prod_n (1 + \tau_n p)$
 - Produit de 2^{eme} ordre inverse: $\prod_i \left(1 + \frac{2z_i}{\omega_{0i}} p + \frac{1}{\omega_{0i}^2} p^2\right)$
 - Produit de 2^{eme} ordre: $\prod_j \left(1 + \frac{2z_j}{\omega_{0j}} p + \frac{1}{\omega_{0j}^2} p^2\right)$

Regrouper les gains statiques K de toute la fonction de transfert $H(p)$.

Étape n°2 : classer les pulsations de cassure ($\frac{1}{\tau}$ pour un 1^{er} ordre et ω_0 pour un 2nd ordre) correspondantes dans un **ordre croissant**.

Étape n°3 :

- on trace **en couleur** les différents **diagrammes asymptotiques** des fonctions de bases en notant les pulsations de cassure ;
- on trace **en couleur** la fonction totale en notant les pentes, la valeur des asymptotes horizontales ;

Étape n°4 : tracer l'allure de la courbe réelle en plaçant certains **points particuliers connus** ou **déterminés** à l'aide de la **calculatrice**.

Méthode pour identifier un diagramme de Bode

Étape n°1 : tracer l'asymptote BF de la courbe G_{dB}

- si celle-ci est **horizontale**, le modèle de comportement ne contiendra pas de dérivateur ou d'intégrateur. On détermine K avec $G_{dB} = 20 \log K$.

- si celle-ci est **décroissante ou croissante**, le modèle de comportement contiendra un intégrateur ou un dérivateur. La pente permet de déterminer la classe ($-20dB/dec \Rightarrow \alpha = 1, -40dB/dec \Rightarrow \alpha = 2, \dots$). **Cette asymptote BF coupe l'axe des $0dB$ en $K, \sqrt{K},$ ou $\frac{1}{K} \dots$**

Étape n°2 : tracer les tangentes à la courbe G_{dB}

Chaque tangente correspondra à un modèle du 1er ordre ou du 2eme ordre à ajouter au modèle de comportement.

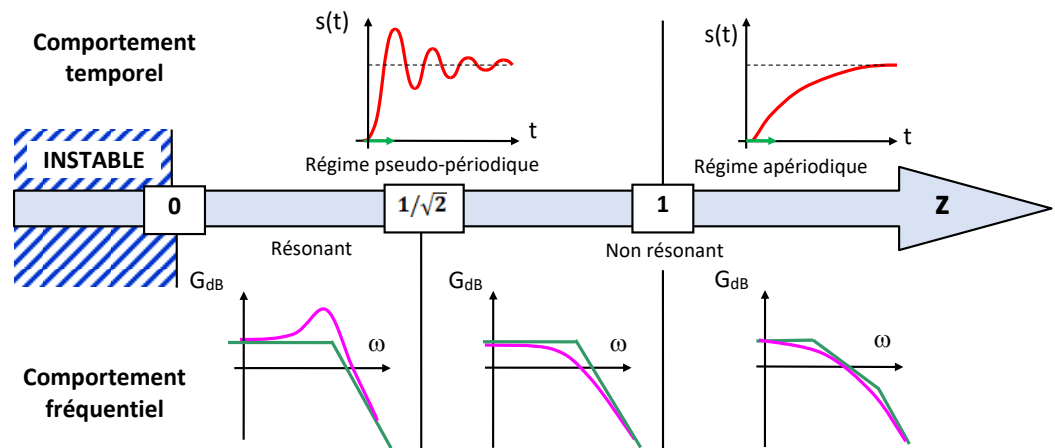
Déterminer les pulsations de cassures avec les intersections, si celles-ci sont éloignées d'au moins 1 décade ($\frac{1}{\tau}$ pour un 1^{er} ordre et ω_0 pour un 2nd ordre)

Les asymptotes de la phase sont des multiples de 90° .

Étape n°3 : relever la valeur de G_{dB} aux pulsations de cassures des 2^{èmes} ordres

Cette valeur, $-20 \log(2z)$, permet de déterminer la valeur de z .

9.10 Bilan du comportements temporel et fréquentiel d'un modèle du 2ème ordre



QUESTIONS DE COURS

- citer les 4 signaux test utilisés pour évaluer les performances des systèmes continus ;
- citer les 3 types de performances évaluées sur les systèmes continus, ainsi que les critères permettant de les mesurer ;
- donner les expressions du dépassement absolu et du dépassement relatif ;
- donner la définition du temps de réponse à 5% ;
- donner les définitions de l'erreur et de l'erreur statique, absolue et relative.
- indiquer l'intérêt d'utiliser la transformée de Laplace ;
- à quel rapport correspond la fonction de transfert d'un système ou d'un constituant ? Donner sa forme générale en précisant gain statique, classe et ordre ;
- donner la méthode permettant d'obtenir cette forme pour une fonction de transfert ;
- donner la condition fondamentale de stabilité ;
- quel type de pôle génère des oscillations ;
- donner le théorème de la valeur finale, et celui de la valeur initiale ;
- donner les transformées de Laplace des entrées tests ;
- donner la valeur de l'erreur statique absolue et relative d'un modèle stable non perturbé soumis à un échelon ;
- donner la valeur finale d'un modèle stable non perturbé soumis à un échelon ;
- qu'est-ce qu'un système asservi ?
- représenter la structure générale d'un schéma-bloc d'une grandeur asservie ;
- expliquer chaîne directe et chaîne de retour ;
- donner la relation entre les fonctions de transfert de l'IHM et du capteur ;
- expliquer la simplification de blocs en série, en parallèle, en boucle fermée.
- représenter la structure générale d'un schéma-bloc d'une grandeur asservie perturbée ;
- par quoi se traduit une équation à 3 variables dans un schéma-bloc ?
- comment détermine-t-on la sortie d'un modèle à n entrées ?
- un système asservi est-il toujours bouclé ? La réciproque est-elle vraie ? Donner un exemple.
- donner les fonctions de transfert des modèles proportionnel, dérivateur et intégrateur puis donner les graphes représentant leur réponse à un échelon ;
- donner la fonction de transfert d'un modèle du 1er ordre ainsi que ses paramètres caractéristiques, puis donner le graphe représentant sa réponse à un échelon. Indiquer les points caractéristiques sur ce graphe (temps de réponse, variation totale de la sortie) ;
- donner la fonction de transfert d'un modèle du 2ème ordre ainsi que ses paramètres caractéristiques, puis donner le graphe représentant sa réponse temporelle à un échelon. Indiquer les points caractéristiques sur ce graphe (variation totale de la sortie...)
- dans quel cas la sortie d'un modèle du 2ème ordre présente-t-elle des oscillations amorties ?
- combien y a-t-il de dépassement >1% pour le cas $z=0,69$? Donner leur valeur ?
- donner l'expression qui permet de quantifier un dépassement relatif ;
- donner les expressions de la période et de la pseudo-pulsation pour un 2ème ordre dont la réponse est oscillatoire amortie ;
- à quels instants, les 3 premiers dépassements s'effectuent pour un 2ème ordre dont la réponse est oscillatoire amortie ?
- on désire un temps de réponse le plus faible possible pour un modèle du 2ème ordre. Que faut-il faire ? 2 cas sont à envisager ;
- comment détermine-t-on le temps de réponse pour un modèle du 2ème ordre ?
- que vaut le temps de réponse réduit pour $z=0,69$ et $z=1$? Quel est son unité ?
- donner la fonction de transfert d'un modèle à retard.
 - expliquer la méthode d'identification d'un modèle de comportement du 1er ordre ;
 - expliquer la méthode d'identification d'un modèle de comportement du 2ème ordre oscillatoire ;
 - expliquer la méthode d'identification d'un modèle de comportement du 2ème ordre apériodique.
- donner les caractéristiques d'un comportement fréquentiel ;
- donner les méthodes analytique et graphique permettant d'obtenir la(les) pulsation(s) de coupure à -3dB.
- comment peut-on évaluer les comportements en stabilité, rapidité et précision par lecture d'un diagramme de Bode ?
 - donner les diagrammes de Bode des fonctions de transfert des systèmes proportionnel, intégrateur, intégrateur double, dérivateur, dérivateur double, 1er ordre et 2ème ordre. Indiquer les points caractéristiques sur ces graphes.
 - expliquer la méthode d'identification d'un modèle de comportement à partir d'un diagramme de Bode.

Cinématique du solide indéformable

1 Introduction

1.1 Contexte

L'objectif de ce cours est de valider les performances **cinématiques** imposées du cahier des charges que doivent respecter les concepteurs de mécanismes

La **cinématique** est l'étude des mouvements, indépendamment de leurs causes.

Il s'agit de s'assurer que les **mouvements** des pièces qui les constituent s'exécutent parfaitement suivant des **courses** et à des vitesses maîtrisées.

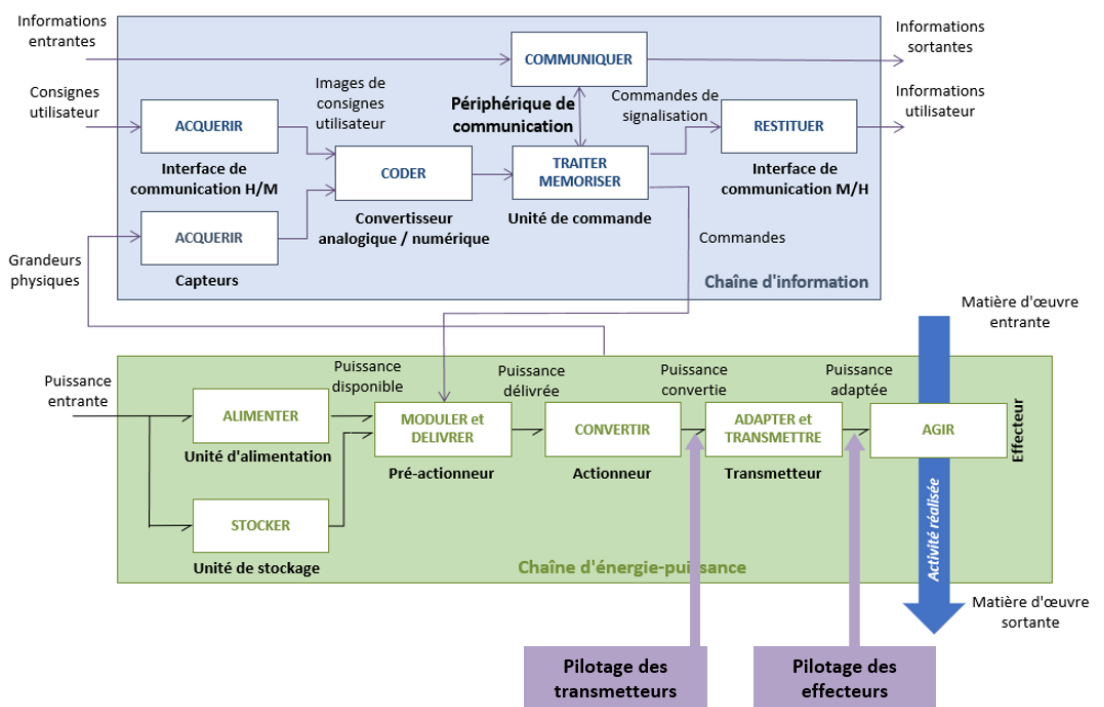
La **course** est la distance parcourue entre les deux positions extrêmes.

domaine	grandeurs physiques
géométrie ⁽¹⁾	[longueur] et [angle]
cinématique	[longueur], [angle] et [temps]
dynamique	[longueur], [angle], [temps] et [masse]

(1) La géométrie est l'étude des positions.

On déterminera alors les lois de commande en mouvement à imposer aux actionneurs de chaque chaîne de puissance constituant le système. Ces lois se détermineront en deux étapes :

- la première consiste à déterminer les lois de commande en mouvement à imposer aux effecteurs afin de répondre au cahier des charges ;
- et la seconde quant à elle consiste à déterminer les lois entrée-sortie cinématique de chaque transmetteur pour en déduire les lois de commande en mouvement à imposer aux actionneurs.



(2) Découverte : les secrets de fabrication des Bugatti
<https://youtu.be/29cQbih1iA>

1.2 La Bugatti Chiron

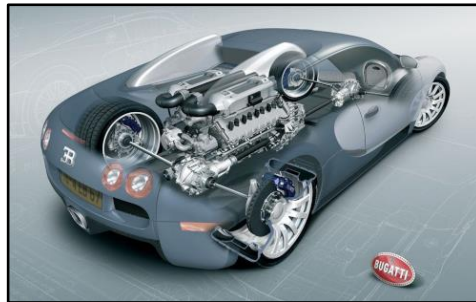
L'entreprise Bugatti⁽²⁾, est une entreprise française et alsacienne, leader mondiale dans le domaine de l'automobile de luxe. Son site de production se situe à Molsheim.

En 2016 Bugatti annonce un nouveau modèle, la Bugatti Chiron, du nom du pilote automobile monégasque Louis Chiron (1899-1979).

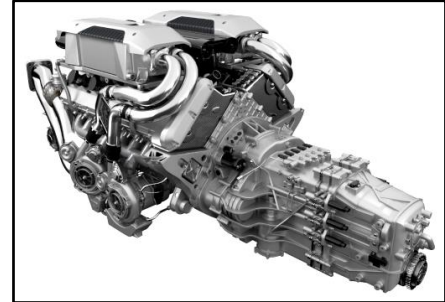


La Chiron reprend le même moteur à combustion constitué de 16 cylindres disposés en W de la Bugatti Veyron tout en l'améliorant, pièce par pièce pour en obtenir une puissance et un couple accrus sans modifier la **cylindrée**.

La **cylindrée** est le volume de fluide refoulé par tour de l'arbre moteur.



Chaîne de puissance de la Chiron



Moteur à combustion W16

Véritable cathédrale mécanique, ce moteur développe 1500 ch et propulse l'engin à 490 km/h, vitesse limitée électroniquement par le constructeur. Celle-ci pourrait avoisiner les 500 km/h mais les pneus qui pourraient soutenir une telle vitesse n'existent pas encore. Michelin travaille actuellement sur ce type de pneumatiques⁽¹⁾.

En août 2017, la Bugatti Chiron a battu le record du monde du 0-400-0 km/h en 41,96 s.

(1) Par exemple, le capuchon du pneumatique qui pèse 2,5 g subira une accélération de 3000 g à 420 km/h et pèsera 7,5 kg !

2

Modèle cinématique

L'objectif de cette partie est de découvrir des démarches et des méthodes permettant de décrire et de caractériser les **mouvements des solides**⁽²⁾ d'un mécanisme ainsi que les **trajectoires de points particuliers** de ces mécanismes.

(2) Une pièce ou un groupe de pièces assemblées (collées, soudées, vissées...) entre elles.

2.1

Mécanisme

Certaines chaînes de puissance contiennent plusieurs transmetteurs. L'ensemble de ces transmetteurs, qui permet le transfert de puissance mécanique, est appelé mécanisme.

Une **machine** est un système transformateur de puissance.

Un **mécanisme** est un sous-système de la classe des machines qui transforme la puissance mécanique en puissance mécanique, autrement dit un système de transformation de mouvement.

Un **moteur** est une machine qui fournit de la puissance mécanique de rotation.

2.2 Equivalence solide, repère, espace

Un repère, noté $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, est constitué :

- d'une **origine** ;
- d'une **base orthonormée directe**.

On associe à chaque solide un repère. Au solide 0 sera associé le repère $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, au solide 1 le repère $(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, etc.

On parle indifféremment d'un **solide**, d'un **repère** qui lui est attaché ou de tout l'**espace** des points fixes dans ce repère.

Un **référentiel** est l'association d'un repère de l'espace et d'une échelle de temps.

(3) Pour deux solides 1 et 0, il y a donc deux mouvements associés ; 1/0 et 0/1.

2.3

Mouvement

Le **mouvement 1/0** est le déplacement relatif d'un solide 1 par rapport à un solide de référence 0⁽³⁾.

Un mouvement met en jeu trois entités : le solide observé ; le solide de référence ; le temps.

i/j est le mouvement d'un espace affine par rapport à un autre espace affine. Ces deux espaces se superposent à chaque instant⁽⁴⁾.

Mathématiquement, un mouvement est défini comme l'évolution au cours du temps de 4 points, mais ce n'est pas l'objet de ce cours.

(4) La notion de point coïncident est en conséquence posée dès le départ.

2.4 Vecteur rotation

Au mouvement 1/0, on associe le **vecteur rotation** $\vec{\Omega}_{1/0}$ dont :

- la **direction** est la direction de l'axe de rotation ;
- la **norme** en $[rad/s]$ est l'intensité de la vitesse angulaire relative ;
- le **signe** est le sens du mouvement de rotation relatif.

2.5 Mouvements élémentaires

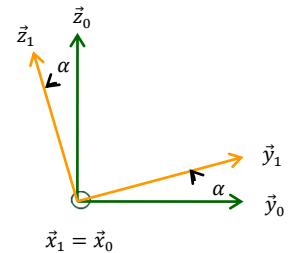
Rotation

Un solide 1 est en **rotation** par rapport à un solide 0 si et seulement si, il existe à chaque instant **une droite** du solide 1 **immobile** par rapport au solide 0.

Un mouvement de rotation entre deux solides 1 et 0, est **paramétrée par un angle** $\alpha(t)$ en **radian** tel que :

$$\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$$

Il est représenté par **une figure de changement de base**.



Translation

Un solide 1 est en **translation** par rapport à un solide 0 si et seulement si **toute droite** de 1 conserve par rapport à l'objet 0 une **direction constante** au cours du mouvement.

Dans le cas d'un mouvement de translation entre deux solides 1 et 2, les **bases** sont **identiques** : $B_0 = B_1 \Leftrightarrow (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ mais $R_0 \neq R_1$.

2.6 Paramètres

On appelle **paramètres du mouvement** les grandeurs variables : $\lambda, x, y, z, r, \dots$

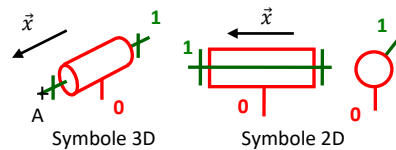
On appelle **paramètres caractéristiques** les grandeurs constantes : $a, b, c, d, e, R, L, l, \dots$

2.7 Schéma cinématique et graphe des liaisons

Modèle cinématique d'un mouvement élémentaire

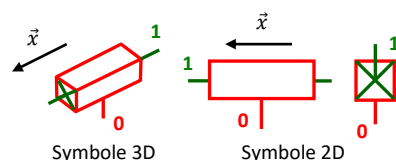
Un mouvement de **rotation** autour d'un axe (A, \vec{x}) est modélisé par une **liaison pivot** d'axe (A, \vec{x}) .

Les symboles normalisés sont :



Un mouvement de **translation à trajectoire rectiligne** de direction \vec{x} est modélisé par une **liaison glissière** de direction \vec{x} .

Les symboles normalisés sont :



Axe et direction

On parle de liaison pivot **d'axe** (A, \vec{x}) et de liaison glissière de **direction** \vec{u} :

- un **axe** est défini par : un **point ET** un **vecteur** ;
- une **direction** est définie uniquement par un **vecteur**.

Modèle cinématique

L'étude des mécanismes s'appuie sur le parcours de chaînes de solides, sur lesquelles on compose les mouvements. Le **graphe de structure** et le **schéma cinématique** sont utilisés en phase d'analyse.

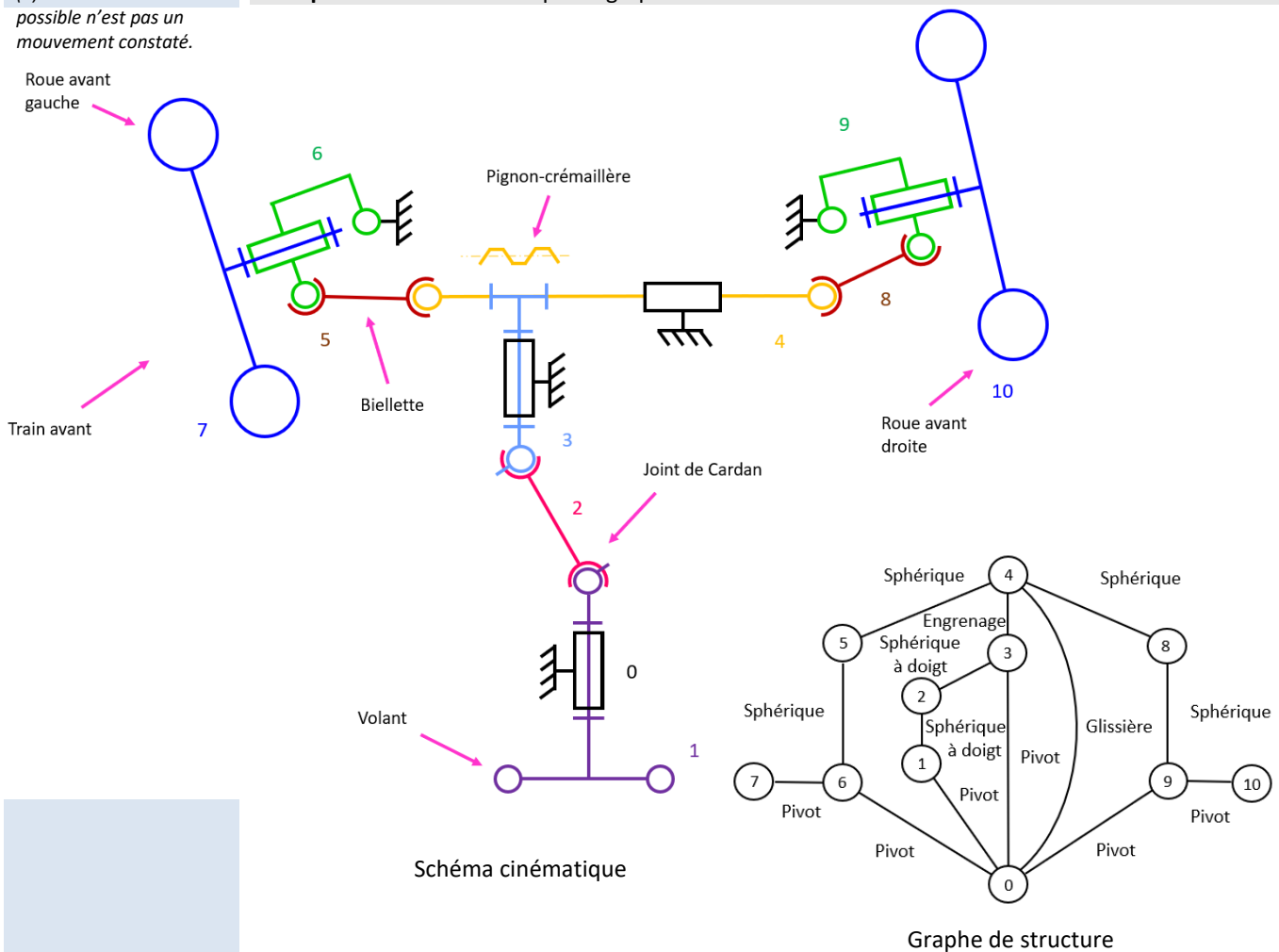
Un **modèle cinématique** est constitué :

- de **Classes d'Équivalence Cinématique**⁽¹⁾ (CEC) ;
- de **liaisons**.

Ils sont aussi utilisés en phase de **conception** d'un nouveau système car ils ne nécessitent pas de connaître la géométrie des pièces. Seules les positions relatives des liaisons ainsi que les mouvements possibles sont pris en compte.

Les deux représentations, **schéma cinématique** et **graphe des liaisons**, sont aussi des outils de **communication scientifique** efficaces.

Exemple : Schéma cinématique et graphe de structure d'une direction de voiture



Grphe de structure

Dans un graphe de structure :

- les **CEC** sont représentées par des **nœuds** ;
- les **liaisons** entre les solides sont représentées par des **traits**, le long desquels on indique le nom et les caractéristiques géométriques de la liaison.

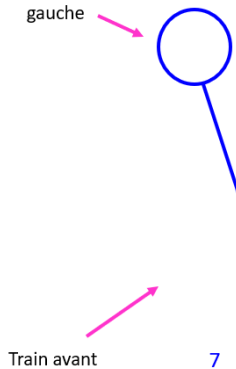
Le graphe des liaisons est graphiquement plus simple à réaliser qu'un schéma cinématique car la géométrie n'est pas représentée.

Il permet d'étudier les équilibres et de définir les **isolements**.

(1) Une CEC est un sous ensemble de l'ensemble des pièces indéformables sur lequel s'applique une relation d'équivalence : réflexive, symétrique et transitive. En mathématique on pourrait noter : $Cl(1) = 1 = \{1,2,3\}$

(2) Un mouvement possible n'est pas un mouvement constaté.

Roue avant gauche



Train avant

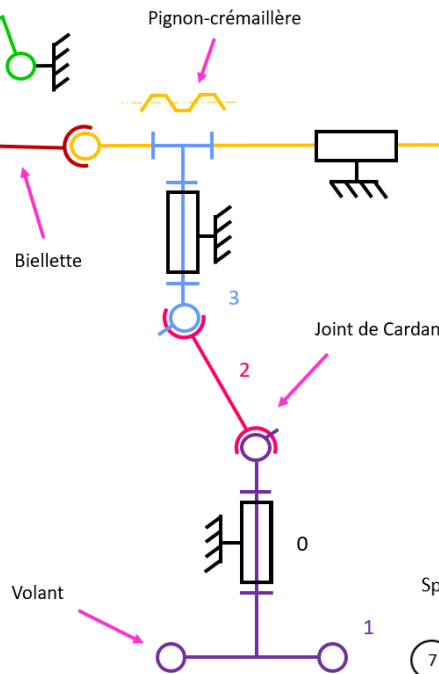
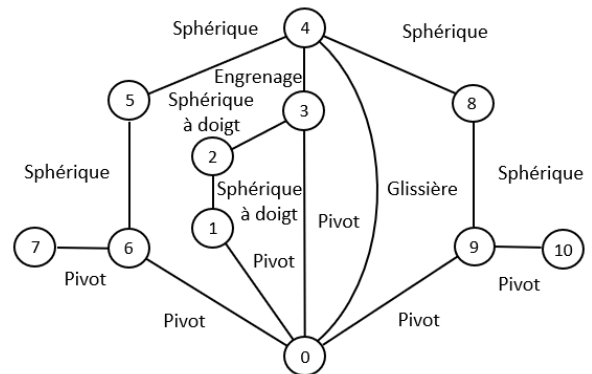
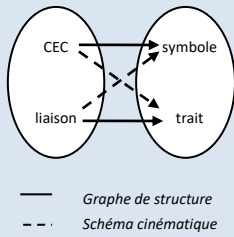


Schéma cinématique

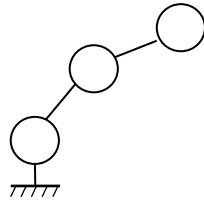


Grphe de structure

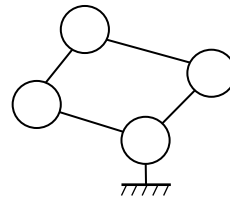
(1) Deux bijections :



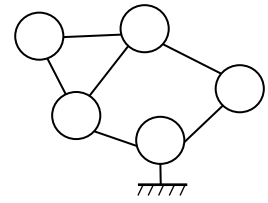
Il s'agit de **deux représentations**⁽¹⁾ d'un même modèle de comportement cinématique, mais qui mettent en avant des informations différentes.



Chaîne ouverte



Chaîne fermée



Chaîne complexe

Dans une chaîne ouverte, les paramètres sont **indépendants**. Chaque liaison est motrice.

Dans une chaîne fermée, les paramètres sont **dépendants**. Une seule liaison est motrice.

Schéma cinématique

Dans un schéma cinématique⁽²⁾ :

- les **liaisons** sont représentées par des **symboles** normalisés ;
- les **solides** sont représentés par des **traits** reliant ces symboles.

Le schéma est dessiné en deux ou trois dimensions. En plus des symboles et traits de définition des solides, on y trouve des points, des vecteurs et des droites.

Il permet de visualiser les **mouvements** d'un mécanisme et de définir un **paramétrage**.

(2) Un schéma cinématique a un objectif. On parle parfois de schéma cinématique minimal lorsqu'on représente le minimum nécessaire à la résolution du problème.

3 Trajectoire

3.1 Trajectoire

(3) Dans le domaine de la robotique, la maîtrise des mouvements et trajectoires est indispensable :

90 second tour around the Tesla Factory
<https://www.youtube.com/watch?v=hOXaBto7qiY>



(4) N'importe quel point de l'espace peut être considéré comme fixe dans un solide, y compris un point où il n'y a pas de matière.

La **trajectoire**⁽³⁾ d'un point P fixe⁽⁴⁾ dans un solide 1 , par rapport à un solide de référence O , est le **lieu des positions successives** occupées par ce point au cours du temps dans le repère de référence. Elle se note : $T_{1/0}(P)$

C'est la « trace » laissée par le point au cours du temps. Cela peut-être :

- un **arc de cercle** (axe, centre et rayon) ;
- un **segment de droite** (droite) ;
- un **point** ;
- une **courbe quelconque**.



Trajectoire du point de contact roue/sol

Les trajectoires de points fixes dans un solide en mouvement de **translation à trajectoire rectiligne** (liaison glissière) sont des **segments de droite**.

Les trajectoires de points fixes dans un solide en mouvement de **translation à trajectoire circulaire** sont des **arcs de cercle de même rayon**.

Les trajectoires de points fixes dans un solide en mouvement de **rotation autour d'un axe fixe** (liaison pivot) sont des **arcs de cercle de même axe**.



Les trajectoires du châssis/sol sont des segments



Les trajectoires du balai des essuie-glaces par rapport au châssis sont des arcs de cercles

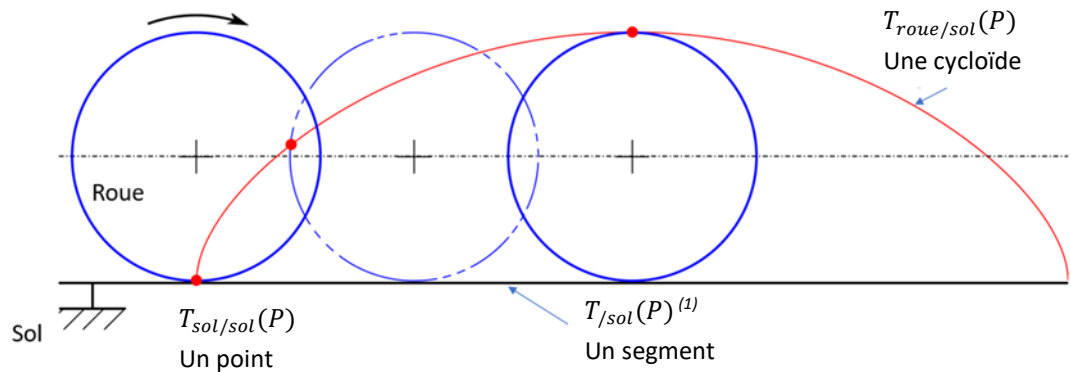


Les trajectoires de la roue par rapport au châssis sont des arcs de cercles

4 Mécanique du point

4.1 Point coïncident

Exemple : La roue de la Bugatti Chiron qui roule sur le sol



(1) La vitesse d'un point matériel par rapport à un repère se note :

$$\vec{V}_{/0}(P) = \frac{d[\overline{OP}]_0}{dt}$$

Par exemple, le centre de gravité de 2 solides ; ou encore la vitesse d'une particule de fluide.

En un point géométrique de contact P entre deux solides, on distingue **3 points coïncidents** à un instant t :

- P ∈ sol : c'est le gravillon fixe du bitume, sa trajectoire par rapport au sol est un point ;
- P ∈ roue : il est attaché à la roue, sa trajectoire par rapport au sol est une cycloïde ;
- P : point géométrique de contact, sa trajectoire appartient au sol. Elle représente les positions successives prises par le point géométrique de contact entre la roue et le sol.

5 Vecteurs position, vitesse et accélération

Calculer une position, une vitesse ou une accélération d'un point est essentiel pour le mécanicien car il est très souvent attendu dans le CdCF des contraintes cinématiques portant sur ces grandeurs.

5.1 Vecteur position

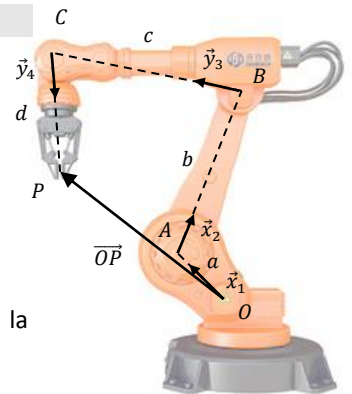
Un **vecteur position** \overline{OP} d'un point P fixe dans un solide 1, dans son mouvement par rapport à un solide de référence 0, est tel que :

- O est un point fixe dans 0 ;
- Le vecteur pointe vers P.

Exemple : Ecrire le vecteur position du robot industriel ci-contre.

On écrit le vecteur position :

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CP} = a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2 + c\vec{y}_3 + d\vec{y}_4$$



On laisse ce vecteur exprimé dans des **bases différentes**.
Il ne faut surtout pas le projeter⁽²⁾.

La courbe ainsi définie par ce vecteur position correspond à la trajectoire $T_{1/0}(P)$.

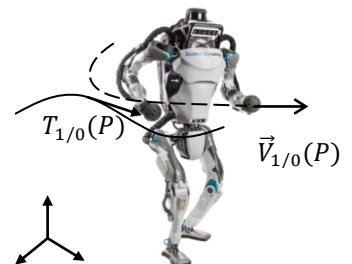
(2) Car sinon les expressions des vitesses et des accélérations seraient encore plus longues.

5.2 Vecteur vitesse

On appelle **vecteur vitesse** d'un point P dans le mouvement 1/0 la dérivée temporelle d'un vecteur position du point M, par rapport au repère R_0 :

$$\vec{V}_{1/0}(P) = \frac{d[\overline{OP}]_{/0}}{dt} \text{ en [m/s]}^{(3)(4)}$$

Le **vecteur vitesse est tangent à la trajectoire** $T_{1/0}(P)$.



(3) $\overline{O(t)P(t)}$ est une fonction du temps.

La dérivée ne dépend pas du repère, c'est la fonction $\overline{O(t)P(t)}$ qui dépend du repère d'observation.

(4) Lorsque l'on parle d'une vitesse, on doit se demander « La vitesse de quel point ? lors de quel mouvement ? »

5.3 Vecteur accélération

On appelle **vecteur accélération** d'un point P dans le mouvement 1/0 la dérivée temporelle du vecteur vitesse du point M, par rapport au repère R_0 :

$$\vec{A}_{1/0}(P) = \frac{d[\vec{v}_{1/0}(P)]_{/0}}{dt} \text{ en [m/s}^2\text{]}$$

5.4 Relation de dérivation vectorielle

La dérivée par rapport au temps d'un vecteur \vec{AB} dans une base 0 se calcule à partir de sa dérivée dans une base 1 et du vecteur rotation du mouvement 1/0.

$$\frac{d[\vec{AB}]_{/0}}{dt} = \underbrace{\frac{d[\vec{AB}]_{/1}}{dt}}_{\text{accroissement}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{AB}}_{\text{rotation}} \quad (1)(2)$$

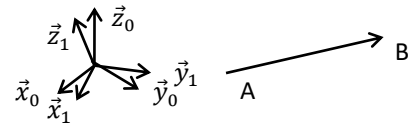
(1) La relation de dérivation vectorielle s'appelle aussi la formule de Bour.

(2) Attention, il faut remplacer \vec{AB} par son expression avant d'utiliser la formule de dérivation vectorielle !

Démonstration :

Soit $\vec{AB} = x \vec{x}_1 + y \vec{y}_1 + z \vec{z}_1$.

D'une part $\frac{d[\vec{AB}]_{/1}}{dt} = \dot{x} \vec{x}_1 + \dot{y} \vec{y}_1 + \dot{z} \vec{z}_1$



D'autre part $\frac{d[\vec{x}_1]_{/0}}{dt} = \frac{d[\cos \theta \vec{x}_0 + \sin \theta \vec{y}_0]_{/0}}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{x}_0 + \dot{\theta} \cos \theta \vec{y}_0 = \dot{\theta} \vec{y}_1 = \dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x}_1$

On a donc
$$\begin{aligned} \frac{d[\vec{AB}]_{/0}}{dt} &= \dot{x} \vec{x}_1 + \dot{y} \vec{y}_1 + \dot{z} \vec{z}_1 + x \frac{d[\vec{x}_1]_{/0}}{dt} + y \frac{d[\vec{y}_1]_{/0}}{dt} + z \frac{d[\vec{z}_1]_{/0}}{dt} \\ &= \dot{x} \vec{x}_1 + \dot{y} \vec{y}_1 + \dot{z} \vec{z}_1 + x \cdot \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x}_1 + y \cdot \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{y}_1 + z \cdot \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{z}_1 \\ &= \dot{x} \vec{x}_1 + \dot{y} \vec{y}_1 + \dot{z} \vec{z}_1 + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge (x \vec{x}_1 + y \vec{y}_1 + z \vec{z}_1) \\ &= \frac{d[\vec{AB}]_{/1}}{dt} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{AB} \end{aligned}$$

Exemple 1 : mouvement de rotation

Soit un solide 1 en mouvement de rotation par rapport à un autre solide 0. Soient A fixe dans 0 et B fixe dans 1 avec $\vec{AB} = R\vec{x}_1$.

$$\frac{d[\vec{AB}]_{/0}}{dt} = \frac{d[R\vec{x}_1]_{/0}}{dt} = \frac{d[R\vec{x}_1]_{/1}}{dt} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge R\vec{x}_1 = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge R\vec{x}_1 = \vec{0}$$

Exemple 2 : mouvement de translation

Soit un solide 1 en mouvement de translation par rapport à un autre solide 0. Soient A fixe dans 0 et B fixe dans 1 avec $\vec{AB} = \lambda \vec{x}_1$.

$$\frac{d[\vec{AB}]_{/0}}{dt} = \frac{d[\lambda \vec{x}_1]_{/0}}{dt} = \frac{d[\lambda \vec{x}_1]_{/1}}{dt} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \lambda \vec{x}_1 = \dot{\lambda} \vec{x}_1$$

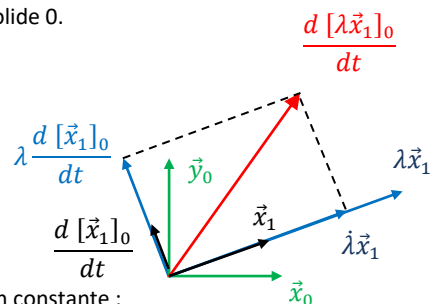
Exemple 3 : cas général

Soit un solide 1 en mouvement quelconque par rapport à un autre solide 0. Soient A fixe dans 0 et B fixe dans 1 avec $\vec{AB} = \lambda \vec{x}_1$.

$$\frac{d[\vec{AB}]_{/0}}{dt} = \frac{d[\lambda \vec{x}_1]_{/0}}{dt} = \lambda \vec{x}_1 + \lambda \frac{d[\vec{x}_1]_{/0}}{dt} = \lambda \vec{x}_1 + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \lambda \vec{x}_1$$

(a) (b) (c)

$$(uv)' = u'v + uv'$$



- le terme (a) représente la vitesse de variation ;
- le terme (b) représente la vitesse de variation de module à direction constante ;
- le terme (c) représente la vitesse de variation de direction à module constant.

(1) Car il ne peut pas s'accroître, il ne peut que tourner.

La **dérivée d'un vecteur unitaire** est le vecteur se trouvant à **+90°** multiplié par la **vitesse angulaire**.

$$\frac{d[\vec{x}_i]_{/j}}{dt} = \vec{\Omega}_{i/j} \wedge \vec{x}_i$$

Un vecteur de **norme constante** est **perpendiculaire** à sa dérivée.⁽¹⁾

5.5 Loi horaire

La **trajectoire**, la **position**, la **vitesse** ou l'**accélération** d'un point peut être **contrainte** ou **imposée**.

Exemples de contrainte :

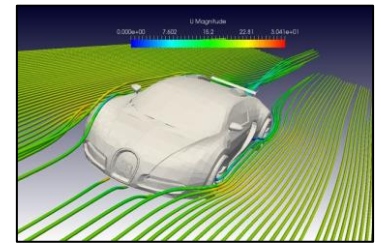
- le point P doit rester à une distance d du point O : $\|\vec{OP}\| = d$
- le point P doit rester à une hauteur h du « sol » : $\|\vec{OP}\| \cdot \vec{y}_0 = h$
- le point P doit suivre une trajectoire verticale : $\vec{OP} \cdot \vec{x}_0 = f(t)$
- le point P doit avoir une vitesse horizontale : $\vec{V}_{1/0}(P) = \begin{pmatrix} V_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_0}$
- le point P doit avoir une vitesse maximale : $\|\vec{V}_{1/0}(P)\| \leq V_{max}$

5.6 Champ d'un solide indéformable

Un champ est une application qui, à tout point d'un domaine géométrique, associe une grandeur physique scalaire ou vectorielle.

Les champs permettent de caractériser l'état d'un système étudié.

Dans le cas général, un champ est quelconque.



Champ quelconque des vecteurs vitesses de l'écoulement du fluide

Lors de l'utilisation d'un mécanisme, les solides qui le constituent se déforment sous l'action des efforts qu'ils subissent. Dans la suite, on fera l'hypothèse que ces déformations sont suffisamment petites pour que l'on puisse les négliger et on considérera les solides comme étant indéformables⁽²⁾.

(2) Les solides avec de grandes déformations (ressorts, barres de torsion...) sont exclus de cette définition.

Un solide indéformable est un ensemble de points deux à deux équidistants au cours du temps : $\forall t, \forall A \in S, \forall B \in S, \|\vec{AB}\| = \text{Constante}$

Le **champ de vecteurs vitesse** du mouvement 1/0 d'un solide indéformable est un champ de vecteurs équiprojectif, on a alors :

$$\vec{V}_{1/0}(B) = \vec{V}_{1/0}(A) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} \quad (3)$$

(3) Un moyen mnémotechnique pour la retenir est « BABAR » ($\vec{\Omega}$ étant la résultante R).

Démonstration : relation de Varignon

Soient A et B, deux points fixes dans le repère lié au solide 1 en mouvement par rapport à 0, on a :

$$\frac{d[\vec{AB}]_{/0}}{dt} = \frac{d[\vec{AB}]_{/1}}{dt} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{AB} \quad (4) \quad \text{or } \vec{AB} \text{ est fixe dans } R_1 \text{ donc } \frac{d[\vec{AB}]_{/1}}{dt} = \vec{0}$$

et $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ avec O l'origine du repère lié à 0

$$\text{donc } \frac{d[\vec{AB}]_{/0}}{dt} = \frac{d[\vec{OB}]_{/0}}{dt} - \frac{d[\vec{OA}]_{/0}}{dt} = \vec{V}_{1/0}(B) - \vec{V}_{1/0}(A)$$

$$\text{On obtient : } \vec{V}_{1/0}(B) = \vec{V}_{1/0}(A) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$$

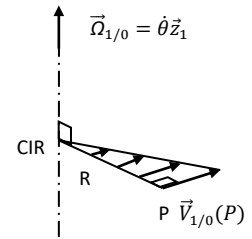
(4) Relation de dérivation vectorielle.

5.7 Mouvement de rotation

Dans un mouvement de rotation :

- Les vitesses des points de l'axe sont nulles.
- Les vitesses sont perpendiculaires au rayon et à l'axe.
- La norme de la vitesse est proportionnelle à la distance à l'axe de rotation et à la vitesse angulaire du mouvement.

$$\|\vec{V}_{1/0}(P)\| = R\dot{\theta} = R\omega$$



Démonstration : Triangle des vitesses

$$\|\vec{V}_{1/0}(P)\| = \|\vec{V}_{1/0}(O)\| + \overline{PO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = \|\overline{PO}\| \cdot \|\vec{\Omega}_{1/0}\| = R\dot{\theta}$$

5.8 Mouvement plan

On parle de **mouvement plan** lorsque les vitesses des solides restent dans un même plan vectoriel.

CIR

On appelle **CIR, centre instantané de rotation**, l'intersection de l'axe central du torseur avec le plan d'étude des mouvements.

5.9 Champ des vecteurs vitesse d'un solide en translation à trajectoire rectiligne

Pour un mouvement de translation :

- le vecteur rotation est **nul** $\vec{\Omega}_{1/0} = \vec{0}$;
- les bases sont **identiques** $B_1 = B_0$;
- l'axe du torseur est à l'infini (en 2D, le CIR est à l'infini) ;
- le champ des vecteurs vitesse est **uniforme** et colinéaire à la direction du mouvement avec $\vec{V}_{1/0}(P) = \dot{\lambda}\vec{x}_1$

Démonstration : Champ uniforme

$$\vec{V}_{1/0}(P) = \vec{V}_{1/0}(O) + \overline{PO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$$

5.10 Méthodologie pour calculer une vitesse

Pour déterminer $\vec{V}_{2/0}(P)$, quatre cas sont possibles :

- **si le mouvement de 2/0 est une rotation** alors la relation de Varignon en un point de l'axe donne $\vec{V}_{2/0}(P) = \overline{PO} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}$
- **si le mouvement de 2/0 est une translation** alors le champ est uniforme $\vec{V}_{2/0}(P) = \vec{V}_{2/0}(A)$ puis on détermine le nouveau vecteur par la composition des vecteurs vitesse ;
- **si le mouvement de 2/0 est une translation à trajectoire rectiligne** paramétrée par la longueur λ , alors la dérivée du vecteur position donne $\vec{V}_{2/0}(P) = \dot{\lambda}\vec{u}$;
- **sinon, on utilise la relation de composition des mouvements**, pour se ramener à des vitesses de mouvement élémentaire : $\vec{V}_{2/0}(P) = \vec{V}_{2/1}(P) + \vec{V}_{1/0}(P)$, puis déterminer les vecteurs composés par une des trois méthodes ci-dessus.

Une fois le résultat obtenu, on s'attachera à :

- **laisser le résultat dans des bases différentes**⁽¹⁾, ne pas projeter ;
- vérifier que le résultat est bien **homogène** à une vitesse [m/s] ;
- vérifier sur le schéma cinématique la **norme** ($V = R\omega$ ou $V = \dot{\lambda}$), la **direction** et le **sens** de la vitesse.

(1) Il est inutile de vouloir exprimer le vecteur vitesse dans une seule base (la base du repère de référence par exemple).

On se contentera juste d'exprimer le résultat dans l'ordre croissant des bases puis dans l'ordre croissant des vecteurs unitaires :

$$\vec{V}(B, 2/0) = \dots \vec{x}_1 + \dots \vec{y}_1 + \dots \vec{x}_2 + \dots \vec{y}_2$$

6 Torseur

6.1 Torseur cinématique

Grâce à la relation de Varignon, on peut, connaissant la vitesse d'un point d'un solide et son vecteur vitesse angulaire dans son mouvement par rapport à un repère de référence, **déterminer la vitesse de tous les autres points du solide**. La fonction vectorielle $\vec{V}_{2/1}$, le torseur cinématique, peut donc se réduire en l'expression de 2 vecteurs.

On appelle **torseur cinématique** $\vec{V}_{1/0}$ le champ des vecteurs vitesse défini pour le mouvement 1/0 de solides indéformables.

$$\vec{V}_{1/0} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{E}$$

$$A \mapsto \vec{V}_{1/0}(A) = \vec{V}_{1/0}(B) + \overline{AB} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} \quad (1)$$

Les **éléments de réduction** du torseur sont :

$$\vec{V}_{1/0} = A \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{1/0} \\ \vec{V}_{1/0}(A) \end{array} \right\} = A \left\{ \begin{array}{c} \omega_{x10}\vec{x} + \omega_{y10}\vec{y} + \omega_{z10}\vec{z} \\ v_{xA10}\vec{x} + v_{yA10}\vec{y} + v_{zA10}\vec{z} \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} \omega_{x10} & v_{xA10} \\ \omega_{y10} & v_{yA10} \\ \omega_{z10} & v_{zA10} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad (2)$$

$\vec{\Omega}_{1/0}$ est la **résultante cinématique**, appelé vecteur rotation [rad/s]. Elle est **invariante**.

$\vec{V}_{1/0}(A)$ est le **moment cinématique**, appelé vecteur vitesse de A. [m/s]

(1) Il y a le même lien entre le torseur $\vec{V}_{1/0}$ et la vitesse $\vec{V}_{1/0}(A)$ qu'entre la fonction f et l'image $f(x)$.

(2) La notation utilisée dans ce cours correspond à une fonction vectorielle.

Cependant, on pourrait utiliser une autre notation :

$$\mathcal{V}(1/0) = A \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(1/0) \\ \vec{V}(A, 1/0) \end{array} \right\}$$

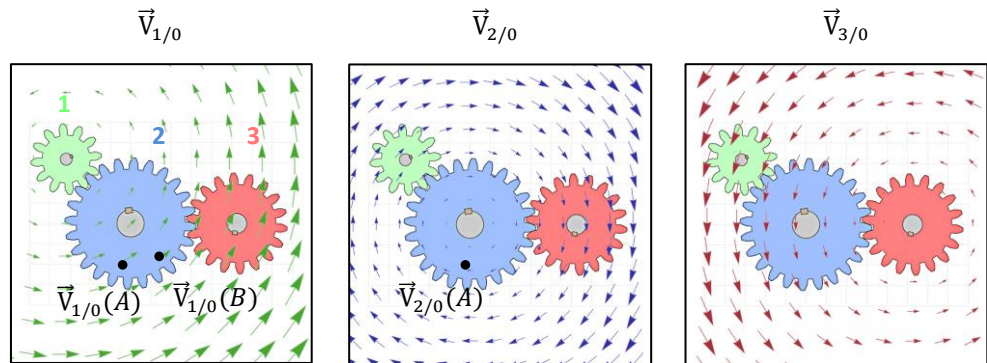
qui correspondrait à une fonction torsorielle.

\mathcal{V} comme vitesse.

En ce qui concerne l'accolade, de la même manière on peut définir la fonction exponentielle par :

$$\exp = \begin{cases} f = f' \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Exemple : torseurs dans un train d'engrenages



On définit une fonction vectorielle différente pour chacun des mouvements.

Entre $\vec{V}_{1/0}(A)$ et $\vec{V}_{1/0}(B)$ on change le point à mouvement constant : relation de Varignon.

Entre $\vec{V}_{1/0}(A)$ et $\vec{V}_{2/0}(A)$ on change de mouvement à point constant : composition des mouvements.

Champ des accélérations

En revanche, le champ des vecteurs accélération n'est pas un torseur, car il n'est pas équiprojectif.

6.2 Torseurs particuliers

(3) Pour le torseur nul, on pourrait aussi rencontrer $\mathcal{O}, \{0\}, \dots$

On ne le fait jamais parce qu'on n'en a pas besoin, mais on pourrait noter le moment en A : $\vec{0}(A)$ c'est la fonction nulle, le champ nul.

- Le **torseur nul**⁽³⁾ : $\vec{0} = \forall P \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$
- Le **torseur couple** : exemple, une liaison glissière de direction \vec{x} et de paramètre de mouvement λ : $\vec{V}_{1/0} = \forall P \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \lambda \vec{x} \end{array} \right\}$
- Le **torseur glisseur** : exemple, d'une liaison pivot d'axe (A, \vec{z}) et de paramètre de mouvement α : $\vec{V}_{1/0} = A \left\{ \begin{array}{c} \alpha \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$

7 Composition des mouvements

(1) Les fonctions se composent : $g \circ f$.

On appelle **composition des mouvements**⁽¹⁾ la composition des applications affines suivantes : $i/k = i/j + j/k$

7.1 Somme des vecteurs vitesse

On utilise une composition des mouvements pour sommer les vecteurs vitesses en un même point :

$$\vec{V}_{n/0}(P) = \vec{V}_{n/n-1}(P) + \dots + \vec{V}_{1/0}(P) \quad (2)$$

Conséquence : $\vec{V}_{i/j}(P) = -\vec{V}_{j/i}(P)$

Démonstration :

Soit trois solides : 2 ; 1 ; 0.

$$\vec{V}_{2/0}(P) = \frac{d[O_0P]_0}{dt} = \frac{d[O_0O_1]_0}{dt} + \frac{d[O_1P]_0}{dt} = \vec{V}_{1/0}(O_1) + \frac{d[O_1P]_1}{dt} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{O_1P} \quad (3)$$

$$\vec{V}_{2/0}(P) = \vec{V}_{1/0}(O_1) + \vec{V}_{2/0}(P) + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{O_1P} = \vec{V}_{2/1}(P) + \vec{V}_{1/0}(O_1) + \overrightarrow{PO_1} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = \vec{V}_{2/1}(P) + \vec{V}_{1/0}(P)$$

Résultat que l'on peut généraliser à n solides.

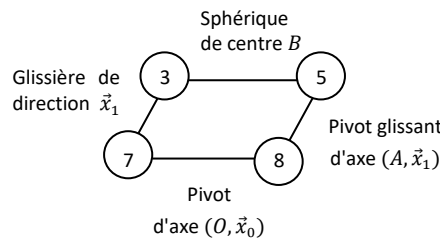
7.2 Somme des vecteurs rotation

On utilise une composition des mouvements pour sommer les vecteurs rotation :

$$\vec{\Omega}_{n/0} = \vec{\Omega}_{n/n-1} + \dots + \vec{\Omega}_{1/0} \quad (4)$$

Conséquence : $\vec{\Omega}_{i/j} = -\vec{\Omega}_{j/i}$

Exemple : Utiliser une composition des mouvements pour sommer les vitesses de rotation dans la chaîne fermée : 7-3-5-8-7



$$\vec{\Omega}_{7/3} + \vec{\Omega}_{3/5} + \vec{\Omega}_{5/8} + \vec{\Omega}_{8/7} = \vec{0}$$

7.3 Somme des torseurs cinématiques

On utilise une composition des mouvements pour sommer les torseurs cinématiques :

$$\vec{V}_{n/0} = \vec{V}_{n/n-1} + \dots + \vec{V}_{1/0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\Omega}_{n/0} \\ \vec{V}_{n/0}(A) \end{cases} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{n/n-1} \\ \vec{V}_{n/n-1}(A) \end{cases} + \begin{cases} \vec{\Omega}_{1/0} \\ \vec{V}_{1/0}(A) \end{cases}$$

Conséquence : $\vec{V}_{i/j} = -\vec{V}_{j/i}$

Les torseurs doivent être impérativement exprimés au **même point** pour pouvoir être additionnés !

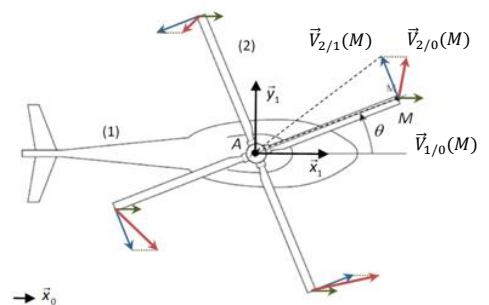
Exemple : Ecrire le torseur $\vec{V}_{2/0}$ de l'hélicoptère

$$\mathcal{V}(1/0) = \vec{V}_{1/0} = \begin{matrix} \vec{0} \\ \dot{x} \vec{x}_0 \end{matrix} = \begin{matrix} \vec{0} \\ \dot{x} \vec{x}_0 \end{matrix}$$

$$\mathcal{V}(2/1) = \vec{V}_{2/1} = \begin{matrix} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{matrix} = \begin{matrix} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ R \dot{\theta} \vec{y}_2 \end{matrix}$$

car $\vec{V}_{2/1}(M) = \vec{V}_{2/1}(A) + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = R \vec{x}_2 \wedge \dot{\theta} \vec{z}_2 = R \dot{\theta} \vec{y}_2$

$$\mathcal{V}(2/0) = \mathcal{V}(1/0) + \mathcal{V}(2/1) = \begin{matrix} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ \dot{x} \vec{x}_0 \end{matrix} = \begin{matrix} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ \dot{x} \vec{x}_0 + r \dot{\theta} \vec{y}_2 \end{matrix}$$

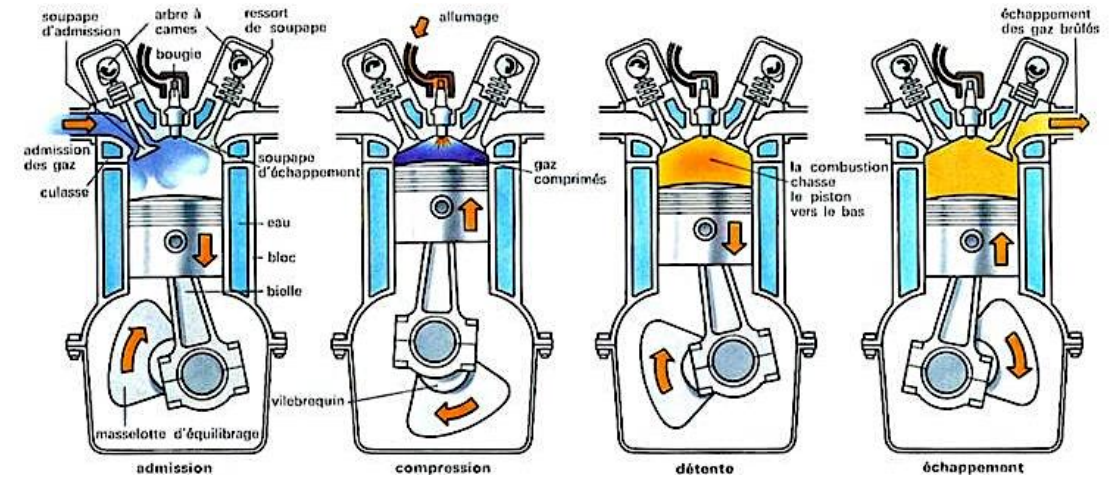


8 Loi entrée-sortie géométrique et cinématique

L'objectif de cette partie est de découvrir des démarches et des méthodes permettant d'obtenir la loi entrée-sortie en position d'un mécanisme en chaîne fermée.

Exemple : dispositif bielle-manivelle utilisé dans le moteur W16

Un moteur à 4 temps⁽¹⁾ possède 4 phases successives de combustion basées sur le cycle de Beau de Rochas.



La chaîne de puissance comporte un transmetteur bielle-manivelle qui transforme un mouvement de translation alternatif (du piston 3 par rapport au bâti 0) en un mouvement de rotation continu (de la manivelle 1 par rapport au bâti 0).

Objectif : déterminer les lois entrée-sortie en position et en vitesse du transmetteur « bielle-manivelle »

Le comportement cinématique du transmetteur « bielle-manivelle » est modélisé par le schéma cinématique⁽²⁾ ci-contre :

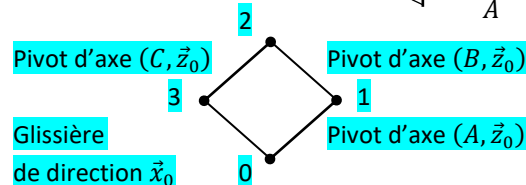
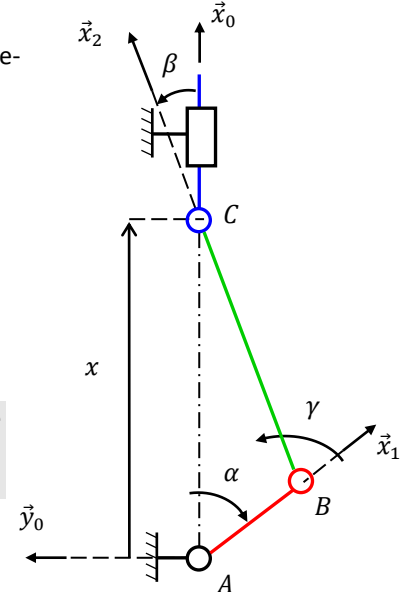
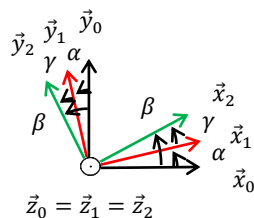
Constituants et paramétrage :

- **carter**⁽³⁾ **0**, repère associé $R_0 = (A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, fixe ;
- **vilebrequin** **1**, $\vec{AB} = e\vec{x}_1$, $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$;
- **bielle** **2**, $\vec{BC} = L\vec{x}_2$, $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$, $\gamma = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$;
- **piston** **3**, $\vec{AC} = x\vec{x}_0$.

Données :

$$e = 43 \text{ mm}, \phi_{\text{piston}} = 86 \text{ mm}, n = 16 \text{ pistons}, L = 154 \text{ mm}$$

Question 1 : Repasser en couleur les différents solides sur le schéma cinématique. Tracer le graphe des liaisons et la figure de calcul.



8.1 Paramètres du mouvement

On appelle **paramètre de mouvement d'entrée** le paramètre du côté de l'actionneur et **paramètre de mouvement de sortie** celui du côté de l'effecteur.

Question 2 : Compléter les caractéristiques géométriques e et L sur le schéma cinématique. Indiquer le paramètre d'entrée et le paramètre de sortie de ce transmetteur « bielle-manivelle ». Indiquer la loi que l'on cherche.

Le mouvement **3/0** est du côté de l'alimentation. Paramètre d'entrée : x
 Le mouvement **1/0** est du côté de l'effecteur. Paramètre de sortie : α
 Paramètre intermédiaire : β On cherche $\alpha = f(x)$ (ou $x = f(\alpha)$ ou $f(x, \alpha) = 0$)

(1) Voir les animations sur : <https://sciencesindustrielles.com/glossary/moteur-thermique>



(2) Voir animations sur : <https://sciencesindustrielles.com/glossary/cir/>



(3) On appelle carter l'ensemble des pièces qui enveloppent un mécanisme.

8.2 Fermeture angulaire

Question 3 : Ecrire une fermeture angulaire.

$$\begin{aligned}(\vec{x}_0, \vec{x}_1) + (\vec{x}_1, \vec{x}_2) + (\vec{x}_2, \vec{x}_0) &= 0 \\ \Rightarrow \alpha + \gamma - \beta &= 0\end{aligned}$$

8.3 Fermeture géométrique

On appelle loi entrée-sortie en position d'un mécanisme en chaîne fermée, la relation mathématique entre le paramètre de position d'entrée et celui de sortie.

Démarche pour déterminer cette loi entrée-sortie en position

1. **Écrire une relation de Chasles** entre les points caractéristiques des liaisons en parcourant la chaîne fermée : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \dots + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$
2. **Projeter l'équation de fermeture** dans une base choisie afin d'obtenir un système de 3 équations scalaires comportant les paramètres de mouvement d'entrée et de sortie.
3. **Éliminer les paramètres de mouvement** autres que ceux d'entrée et de sortie, en combinant les équations obtenues.

Pour éliminer un angle β présent dans 2 équations en cosinus et sinus :

Isoler le cosinus et le sinus, puis élever les 2 équations au carré, et enfin sommer les équations :

$$\begin{aligned}\begin{cases} f(\theta_e, \theta_s) + R \cos \beta = 0 \\ g(\theta_e, \theta_s) + R \sin \beta = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (R \cos \beta)^2 = f^2(\theta_e, \theta_s) \\ (R \sin \beta)^2 = g^2(\theta_e, \theta_s) \end{cases} \Rightarrow R^2(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) \\ &= f^2(\theta_e, \theta_s) + g^2(\theta_e, \theta_s) \Rightarrow R^2 = f^2(\theta_e, \theta_s) + g^2(\theta_e, \theta_s)\end{aligned}$$

Pour éliminer une longueur λ en facteur d'un cosinus et sinus :

Exprimer les relations sous la forme ci-dessous, puis diviser les équations :

$$\begin{aligned}\begin{cases} f(\theta_e, \theta_s) + \lambda \sin \theta_s = 0 \\ g(\theta_e, \theta_s) + \lambda \cos \theta_s = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \lambda \sin \theta_s = -f(\theta_e, \theta_s) \\ \lambda \cos \theta_s = -g(\theta_e, \theta_s) \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{\lambda \sin \theta_s}{\lambda \cos \theta_s} = \frac{-f(\theta_e, \theta_s)}{-g(\theta_e, \theta_s)} &\Rightarrow \tan \theta_s = \frac{f(\theta_e, \theta_s)}{g(\theta_e, \theta_s)} \quad (1)\end{aligned}$$

(1) Avec toutes les précautions nécessaires sur les valeurs de $g(\theta_e, \theta_s)$.

Question 4 : Déterminer la loi E/S en position du dispositif bielle-manivelle à l'aide d'une fermeture géométrique.

On cherche $x = f(\alpha)$.

Le problème est plan.

On écrit une fermeture géométrique :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Rightarrow e\vec{x}_1 + L\vec{x}_2 - x\vec{x}_0 = \vec{0}$$

On projette dans la base (\vec{x}_0, \vec{y}_0) :

$$\Rightarrow \begin{cases} e\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_0 + L\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_0 - x\vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0 = 0 \\ e\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_0 + L\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_0 - x\vec{x}_0 \cdot \vec{y}_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e \cos \alpha + L \cos \beta - x = 0 \\ e \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + L \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e \cos \alpha + L \cos \beta - x = 0 \\ e \sin \alpha + L \sin \beta = 0 \end{cases} \quad \text{On a 2 eq 3 inc et on veut 1 eq 2 inc.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L \cos \beta = -e \cos \alpha + x \\ L \sin \beta = -e \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow L^2(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = (-e \cos \alpha + x)^2 + (-e \sin \alpha)^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{L^2 - e^2 \sin^2 \alpha} + e \cos \alpha$$

La loi entrée sortie en position est aussi la **primitive** de la loi entrée-sortie en vitesse.

Il ne faut pas oublier de faire apparaître, lors de l'intégration, une **constante qui peut être déterminée pour une position particulière du transmetteur**.

8.4 Loi entrée-sortie en vitesse

L'objectif de cette partie est de découvrir des démarches et des méthodes permettant d'obtenir la loi entrée-sortie en vitesse d'un mécanisme en chaîne fermée.

On appelle loi entrée-sortie en vitesse d'un mécanisme en chaîne fermée, la relation mathématique entre la dérivée temporelle du paramètre de position d'entrée, et la dérivée temporelle du paramètre de position de sortie.

La loi entrée sortie en vitesse est la **dérivée** de la loi entrée-sortie en position.

Question 5 : En déduire la vitesse du piston par rapport au bâti (c'est-à-dire la loi E/S cinématique).

$$\Rightarrow V_{3/0}(C) = \dot{x} = \frac{-2e^2 \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \alpha}{2\sqrt{L^2 - e^2 \sin^2 \alpha}} - e \dot{\alpha} \sin \alpha$$

8.5 Fermeture cinématique

Autre démarche pour déterminer une loi entrée-sortie en vitesse

4. Écrire la **somme des torseurs cinématiques** en utilisant une composition des mouvements en parcourant la chaîne fermée : $\vec{V}_{n/0} = \vec{V}_{n/n-1} + \dots + \vec{V}_{1/0}$

Cette **équation torsorielle** donne **2 équations vectorielles** soit **6 équations scalaires** en tout.

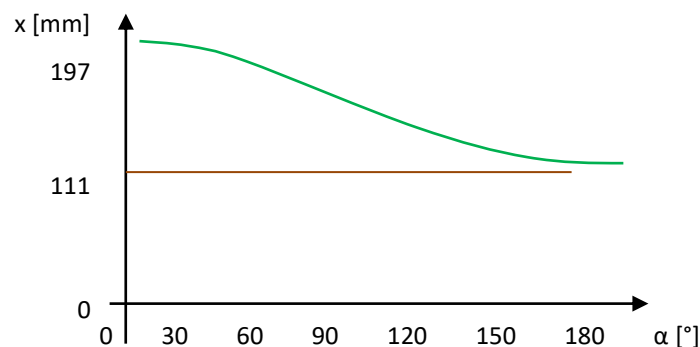
5. Déterminer, en fonction des paramètres de mouvement d'entrée et de sortie à faire apparaître, la ou les équations scalaires à écrire.

8.6 Linéarisation

Les lois entrée-sortie des mécanismes en chaîne fermée sont non-linéaires (à part celles du type vis-écrou). Elles ne peuvent donc pas être prise en compte dans une modélisation par schéma-bloc d'un SLCI où seuls des modèles linéaires sont utilisés.

Si et seulement si, le mécanisme évolue linéairement autour d'un point de fonctionnement ou d'une plage de points qui constituera le domaine de validité, la loi entrée-sortie peut alors être linéarisée.

Le tracé de la loi E/S en position du système bielle-manivelle du moteur W16 est le suivant :



Question 6 : À partir de la courbe ci-dessus, déterminer la course du piston. En déduire la cylindrée du moteur W16.

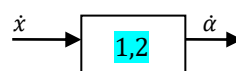
La course du piston est de : $course = PMH - PMB \approx 197 - 111 \approx 86 \text{ mm}$

La cylindrée du moteur W16 est de : $cylindrée = n \cdot course \cdot S = 16 \cdot course \cdot \pi \frac{\varnothing_{piston}^2}{4} \approx$

$$16 \cdot 86 \cdot \pi \frac{86^2}{4} \approx 7992915 \text{ mm}^3 \approx 8 \text{ l}$$

Question 7 : Proposer une linéarisation du comportement du système entre 60° et 120°.

Entre 60° et 120° : $x = a \alpha + b \Rightarrow \dot{x} = a \dot{\alpha} \Rightarrow \dot{x} \approx \frac{170-130}{60-120} \dot{\alpha} \Rightarrow \dot{x} \approx 0,8 \dot{\alpha} \Rightarrow \dot{\alpha} \approx 1,2 \dot{x}$



9 Contacts et liaisons

On s'intéresse ici à la description des surfaces réelles et aux modèles cinématiques associés.

9.1 Liaison

Une liaison est un lien entre les paramètres du mouvement, c'est un **modèle de comportement cinématique**.

Elle est indépendante de toute réalisation matérielle.

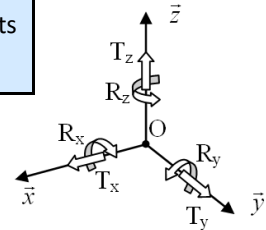
9.2 Degré de liberté

Deux solides sans relation ont 6 mouvements relatifs indépendants possibles.

On appelle **degré de liberté, DDL**, un des mouvements indépendants autorisés par une liaison.

Dans un **repère local associé à la liaison**, $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, les degrés de liberté correspondent usuellement à :

- des **rotations**, notées R_{O_x} , R_{O_y} et R_{O_z} ;
- des **translations**, notées T_x , T_y et T_z .



Pour une liaison : **Nombre de degré de liberté + Nombre de degré de liaison = 6.**

9.3 Liaisons usuelles

(1) Par exemple, le torseur

$$\vec{v}_{1/0} = A \begin{cases} \vec{0} \\ V_{x,1/0}\vec{x} + V_{y,1/0}\vec{y} \end{cases}$$

n'est pas une liaison usuelle car on ne peut pas la fabriquer directement.

On appelle **liaison usuelle**⁽¹⁾ un modèle de comportement cinématique possible que l'on peut nommer sans aucune référence technologique.

Ces **10** liaisons usuelles font l'objet d'une **norme** : NF EN 23952 / ISO 3952.

Les dix liaisons usuelles

Liaisons à direction	Liaisons à axe	Liaisons à centre
Glissière	Pivot	Sphérique
Plane	Pivot glissant	Sphérique à doigt
	Hélicoïdale	Sphère-plan
	Cylindre-plan	Sphère-cylindre

A ces 10 liaisons, on peut ajouter la liaison complète qui à 0 DDL et la liaison libre admet 6 DDL. Cette dernière liaison est parfois utile pour les liaisons équivalentes.

Tableau des liaisons parfaites usuelles

Voir tableau en feuille jointe.

Dans le torseur cinématique d'une liaison :

- Chaque paramètre cinématique non nul correspond à un DDL.
- Chaque paramètre cinématique nul correspond à un blocage.

Les liaisons sont supposées **cinématiquement parfaites** :

- **sans jeux** (jeu = espace entre deux surfaces permettant des mouvements de petite amplitude) ;
- de solides indéformables ;
- sans limite d'amplitude des mouvements ;
- **bilatérale**, il n'y a pas décollement.

9.4 Liaison équivalente

Une **liaison équivalente** correspond à la liaison qui modélise le même comportement que l'association des liaisons en série ou en parallèle qu'elle remplace.

Liaisons en série

Pour des liaisons en série :

- la liaison équivalente peut réaliser la somme des mouvements des liaisons qui la composent⁽¹⁾.
- la liaison équivalente ne peut transmettre un effort que si toutes les liaisons qui la composent le peuvent.

(1) En effet dans un bras robotisé anthropomorphe, le mouvement total est la somme des mouvements élémentaires.

La liaison équivalente entre des liaisons en **série** est la somme des torseurs cinématique.

$$\vec{V}_{2/0\ eq} = \vec{V}_{2/1} + \vec{V}_{1/0}$$

On peut aussi évaluer les torseurs des actions mécaniques.

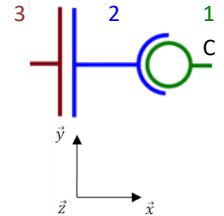
$$\vec{M}_{2\rightarrow 0\ eq} = \vec{M}_{2\rightarrow 1} = \vec{M}_{1\rightarrow 0} \quad (2)$$

(2) Torseur des actions mécaniques transmissibles, voir tableau des liaisons.

Exemple : déterminer la liaison équivalente d'une liaison sphérique et d'une liaison plane en série

On écrit une composition des mouvements.

$$\begin{aligned} \vec{V}_{3/1\ eq} &= \vec{V}_{3/2} + \vec{V}_{2/1} \\ &= \begin{Bmatrix} \omega_{x,3/2}\vec{x} \\ C \{ V_{y,3/2}\vec{y} + V_{z,3/2}\vec{z} \} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_{x,2/1}\vec{x} + \omega_{y,2/1}\vec{y} + \omega_{z,2/1}\vec{z} \\ C \{ \vec{0} \} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} (\omega_{x,3/2} + \omega_{x,2/1})\vec{x} + \omega_{y,2/1}\vec{y} + \omega_{z,2/1}\vec{z} \\ C \{ V_{y,3/2}\vec{y} + V_{z,3/2}\vec{z} \} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$



C'est une liaison sphère-plan de centre C et de normale \vec{x}

Liaisons en parallèle

Pour des liaisons en parallèle :

- la liaison équivalente ne peut réaliser un mouvement que si toutes les liaisons qui la composent le peuvent.
- la liaison équivalente peut transmettre la somme des efforts transmissibles des liaisons qui la composent.

La liaison équivalente entre des liaisons en **parallèle** est la somme des torseurs des actions mécaniques.

$$\vec{M}_{2\rightarrow 0\ eq} = \vec{M}_{2\rightarrow 1} + \vec{M}_{1\rightarrow 0}$$

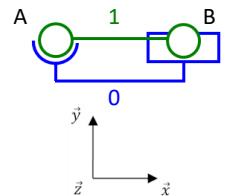
On peut aussi évaluer les torseurs cinématiques.

$$\vec{V}_{2/0\ eq} = \vec{V}_{2/1} = \vec{V}_{1/0}$$

Exemple : déterminer la liaison équivalente d'une liaison sphérique et une liaison sphère-cylindre en parallèle.

$$\begin{aligned} \vec{V}_{1/0}^A &= \begin{Bmatrix} \omega_{x,1/0}^A\vec{x} + \omega_{y,1/0}^A\vec{y} + \omega_{z,1/0}^A\vec{z} \\ A \{ \vec{0} \} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \omega_{x,1/0}^A\vec{x} + \omega_{y,1/0}^A\vec{y} + \omega_{z,1/0}^A\vec{z} \\ B \{ BA\vec{x} \wedge (\omega_{x,1/0}^A\vec{x} + \omega_{y,1/0}^A\vec{y} + \omega_{z,1/0}^A\vec{z}) \} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \omega_{x,1/0}^A\vec{x} + \omega_{y,1/0}^A\vec{y} + \omega_{z,1/0}^A\vec{z} \\ B \{ BA\omega_{y,1/0}^A\vec{z} - BA\omega_{z,1/0}^A\vec{y} \} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{V}_{1/0}^B = \begin{Bmatrix} \omega_{x,1/0}^B\vec{x} + \omega_{y,1/0}^B\vec{y} + \omega_{z,1/0}^B\vec{z} \\ B \{ V_{x,1/0}^B\vec{x} \} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$



On écrit une fermeture cinématique.

$$\vec{V}_{1/0}^A + \vec{V}_{0/1}^B = 0 \Rightarrow \vec{V}_{1/0}^{eq} = \vec{V}_{1/0}^A = \vec{V}_{1/0}^B = \begin{Bmatrix} \omega_{x,1/0}^B\vec{x} \\ B \{ \vec{0} \} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

C'est une liaison pivot d'axe (A, \vec{x}).

9.5 Les contacts

On s'intéresse maintenant aux contacts entre les solides ce sont des surfaces réelles. Les contacts temporaire, tels que les butées de fin de course ne sont pas pris en compte.

Deux surfaces réelles qui se touchent sont dites en **contact**.

Un contact est **modélisé**⁽¹⁾ par une liaison.

(1) Mais tous les contacts ne peuvent pas être modélisé par les liaisons normalisées. Celles-ci modélisent les contacts les plus courant.

(2) C'est-à-dire généré par translation. On rappelle qu'en math, un parallélépipède est un cylindre à base rectangulaire.

(3) On parle parfois abusivement de « Liaison rotule ».

(4) C'est-à-dire suivant une ligne et un anneau.

La liaison glissière modélise un contact cylindrique⁽²⁾ non de révolution.

La liaison plane modélise un contact plan.

La liaison pivot modélise un contact de révolution.

La liaison pivot glissant modélise un contact cylindrique de révolution.

La liaison hélicoïdale modélise un contact d'hélice.

La liaison cylindre-plan modélise un contact linéaire rectiligne.

La liaison sphérique modélise un contact sphère⁽³⁾.

La liaison sphérique à doigt modélise un contact sphère et ponctuel.

La liaison sphère plan modélise un contact ponctuel.

La liaison sphère-cylindre modélise un contact linéaire annulaire⁽⁴⁾.

La liaison complète modélise un contact encastré.

La liaison libre modélise un contact nul.

9.6 Cinématique du contact ponctuel

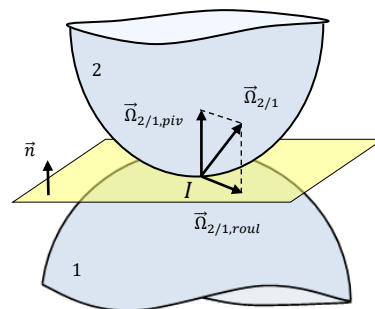
Roulement, pivotement et glissement

Deux solides en contact le sont toujours par l'intermédiaire d'une ou plusieurs surfaces.

Dans de nombreux mécanismes rencontrés, on peut considérer que la zone de contact entre deux solides en liaison est suffisamment petite pour faire l'hypothèse d'un contact ponctuel.

Soit deux solides 1 et 2 en **contact ponctuel** au point I , on peut définir :

- un **plan tangent commun** aux surfaces en contact ;
- une **normale** au contact \vec{n} .



$\vec{\Omega}_{2/1,piv}$ est le **vecteur de pivotement** de 2/1 en I .

C'est la composante de $\vec{\Omega}_{2/1}$ selon \vec{n} .

$\vec{\Omega}_{2/1,roul}$ est le **vecteur de roulement** de 2/1 en I .

C'est la composante de $\vec{\Omega}_{2/1}$ dans le plan.

Glissement et pénétration

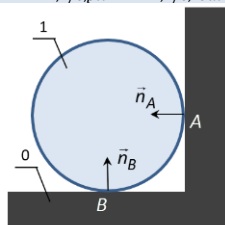
De même, on décompose le vecteur vitesse du point de contact.

$\vec{V}_{2/1,pen}(I)$ est le **vecteur vitesse de pénétration** de 2/1. C'est la composante de $\vec{V}_{2/1}(I)$ selon \vec{n} . Ce vecteur est **nul** car les solides ne se pénètrent pas.

$\vec{V}_{2/1,gl}(I)$ est le **vecteur vitesse de glissement** de 2/1. C'est la composante de $\vec{V}_{2/1}(I)$ dans le plan.

(5) Dans le cas de plusieurs contacts ponctuels, on a alors :

$$\begin{aligned}\vec{\Omega}_{1/0} &= \vec{\Omega}_{A,1/0,piv} + \vec{\Omega}_{A,1/0,roul} \\ &= \vec{\Omega}_{B,1/0,piv} + \vec{\Omega}_{B,1/0,roul}\end{aligned}$$



Pour déterminer le **vecteur vitesse de glissement**, on utilise une composition des mouvements dans la chaîne fermée du mécanisme : $\vec{V}_{2/1}(I) = \vec{V}_{2/0}(I) - \vec{V}_{1/0}(I)$

Le **torseur cinématique** de 2/1 au point I peut si besoin s'écrire :

$$\vec{V}_{2/1} = I \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}_{2/1}(I) \end{array} \right. = I \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{2/1,piv} + \vec{\Omega}_{2/1,roul} \\ \vec{V}_{2/1}(I) \end{array} \right. \quad (5)$$

On détermine ces composantes par des projections.

9.7 Contacts particuliers

Adhérence et roulement sans glissement

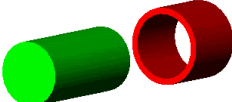


On appelle **roulement sans glissement, rsg**, le phénomène au point de contact I entre deux solides 1 et 2 en mouvement relatif caractérisé par une vitesse de glissement nulle.

$$\vec{V}_{2/1}(I) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{V}_{2/1} = {}_I \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{2/1,roul} \\ \vec{0} \end{array} \right.$$

Le phénomène de roulement sans glissement est présent en phase d'adhérence.

Guidages

Les **guidages** sont les **réalisations concrètes** des liaisons. Ils utilisent différentes technologies :

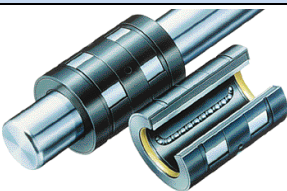
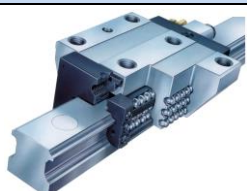
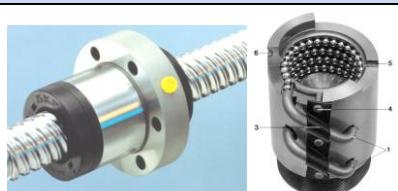



Glissement		Roulement
Contact direct	Coussinet	
		
<u>Avantage</u> : Fabrication simple	<u>Avantage</u> : Charge élevée, silencieux, montage simple, pas de grippage	<u>Avantage</u> : Bon rendement
<u>Inconvénient</u> : Frottement important, grippage ⁽¹⁾	<u>Inconvénient</u> : Frottements importants	<u>Inconvénient</u> : Encombrement, montage

(1) Endommagement d'un matériau par micro soudure. Ce phénomène se produit avec du glissement sur le couple de matériaux acier/acier mais pas avec acier/bronze.

👉 Le choix et la façon d'utiliser les roulements sont très complexes, des ouvrages entiers y sont consacrés.

Il ne s'agit pas ici de résumer en quelques lignes les différents cas possibles mais juste de souligner que le modèle (la liaison) choisi dépend du type de roulement, de la façon dont il a été installé sur le système et de ce que l'on veut faire du modèle.

Le choix du type de roulement dépend de la direction des charges.

Douille à billes	Glissière à billes	Vis à billes
		
Utilisées par trois ou quatre (sur deux colonnes différentes) pour réaliser un guidage en translation. <u>Modèle fonctionnel d'une douille seule</u> : pivot glissant	Permet de réaliser un guidage en translation. <u>Modèle fonctionnel</u> : glissière	Permet de réaliser un dispositif de transformation de mouvement vis-écrou. <u>Modèle fonctionnel</u> : hélicoïdale
Roulement à billes	Roulement à rouleaux ou à aiguilles	Rotule lisse
		
Utilisés par deux pour réaliser un guidage en rotation. <u>Modèle fonctionnel d'un roulement seul</u> : Si aucun rotulage n'est admis : pivot ou pivot glissant Si le rotulage est admis : sphérique ou sphère/cylindre Le centre est celui du roulement.		Permet des mouvements de rotation selon 3 axes, dont 2 de faible amplitude. La zone de contact est une portion de sphère. <u>Modèle fonctionnel</u> : sphérique

9.8 Méthodologie pour tracer un schéma cinématique

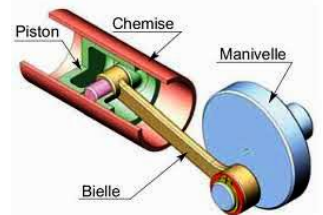
La démarche pour élaborer un schéma cinématique est la suivante :

- identifier les différents **CEC** ;
- identifier la nature des **contacts** entre les CEC ;
- identifier les **degrés de liberté** entre les CEC ;
- choisir des **liaisons** usuelles **modélisant les contacts** ;
- identifier les **caractéristiques géométriques** des liaisons (centres, axes, vecteurs) ;
- les tracer avec leurs **positions relatives** (parallélisme, perpendicularité, coïncidence...) ;
- tracer les **liaisons** en couleur.
- relier les liaisons par des **traits** en couleur.

Exemple : contact entre un piston et une chemise du moteur thermique W16

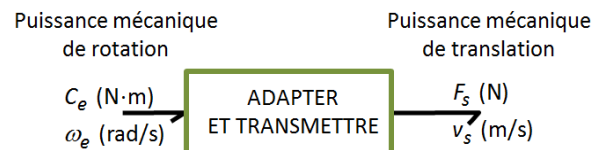
- si on suppose que la longueur L du piston n'est pas négligeable devant son diamètre d , $L \geq 0,25d$, alors les surfaces en contact sont **cylindre/cylindre**. La liaison associée est alors une liaison **pivot glissant**.

- sinon, si on suppose $L < 0,25d$, alors les surfaces en contact sont **disque/cylindre**. La liaison associée est alors une liaison **sphère cylindre**.



10 Transmission de puissance avec transformation de mouvement

Le but de cette partie est de déterminer les lois entrée-sortie cinématiques des transmetteurs. Quel que soit le mécanisme, on s'intéresse à l'évolution de la vitesse angulaire **avec transformation de mouvement**.

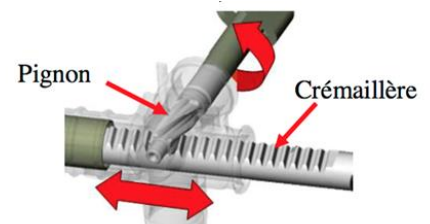


10.1 Pignon-crémaillère, pignons-chaînes, poulies-courroie, roue, tambour-câble

Ce transmetteur assure le roulement sans glissement d référence de la crémaillère.

$$\begin{array}{l}
 2\pi \rightarrow 2\pi R \\
 \theta \rightarrow x
 \end{array}
 \quad \text{donc} \quad
 x = \frac{2\pi R}{2\pi} \theta$$

La loi entrée-sortie cinématique est : $V_s = R \omega_e$
avec ω_e en $[rad/s]$, V_s en $[mm/s]$ et R en $[mm]$



Les dispositifs **poulies-courroie** ou **pignons-chaîne** peuvent être également utilisés comme transformateur de mouvement. Dans ce cas, les 2 roues ont même diamètre. Ils se comportent alors cinématiquement comme des transmetteurs pignon-crémaillère.

Tout **cylindre roulant sans glissement** sur un plan se comporte **cinématiquement comme un transmetteur pignon-crémaillère**.

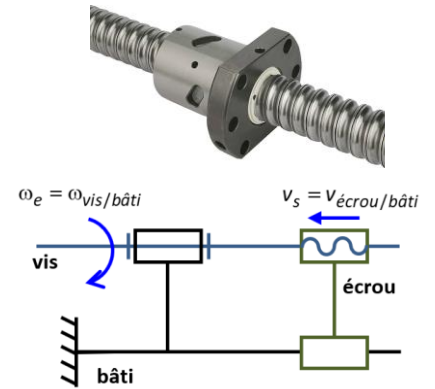


10.2 Vis-écrou

(1) Historiquement le système vis écrou a eu une importance considérable, puisqu'il a permis d'accéder aux échelles de fabrication microscopiques.

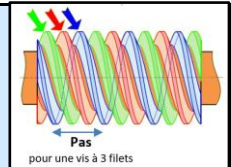
L'entrée est la rotation de la vis, la sortie la translation de l'écrou.
Le mécanisme vis-écrou⁽¹⁾ est généralement **irréversible**.

$$2\pi \rightarrow pas \quad \theta \rightarrow x \quad \text{donc} \quad x = \frac{pas}{2\pi} \theta$$



(2) Attention aux unités. Pour des degrés on aurait $\frac{pas}{360}$. Pour des tours on aurait $\frac{pas}{1}$.

La loi entrée-sortie cinématique est : $V_s = \frac{pas}{2\pi} \omega_e$ ⁽²⁾
Le pas est la distance parcourue par l'écrou pour un tour de vis.
Avec ω_e en [rad/s], v_s en [mm/s] et pas en [mm].



11 Transmission de puissance sans transformation de mouvement

Le but de cette partie est de déterminer les lois entrée-sortie cinématiques des transmetteurs. Quel que soit le mécanisme, on s'intéresse à l'évolution de la vitesse angulaire **sans transformation de mouvement**.



11.1 Rapport de transmission

Une loi entrée-sortie cinématique caractérise le comportement cinématique du transmetteur. Pour un **réducteur** ou un **multiplicateur**, elle est donnée par le **rapport de transmission** qui est le rapport entre la vitesse angulaire de sortie ω_s (ou N_s) et la vitesse angulaire d'entrée ω_e (ou N_e) :

$$r = \frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{\dot{\theta}_s}{\dot{\theta}_e} = \frac{N_s}{N_e} \quad \text{avec } \omega \text{ en rad/s et } N \text{ en tr/min. On a } \omega = \frac{2\pi}{60} N$$

On parle de **multiplicateur** si $|r| > 1$ ou de **réducteur** si $|r| < 1$.

11.2 Roues de friction

(3) Le mot friction est de la même famille que le mot frottement.

Roue de friction ⁽³⁾	
<u>Utilisation</u> : dynamo de vélo, téléferique	
<u>Avantages</u> : montage facile, coût	
<u>Inconvénients</u> : glissement possible	
<u>Rapport</u> : si rsg, $r = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{-R_1}{R_2} = \frac{-D_1}{D_2}$ Le sens de rotation est inversé.	

Démonstration :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{2/0}(I) &= \vec{V}_{2/0}(O_2) + \vec{IO}_2 \wedge \vec{\Omega}_{2/0} \\ \vec{V}_{2/0}(I) &= -R_2 \vec{y}_0 \wedge \omega_{2/0} \vec{z}_0 \\ \vec{V}_{2/0}(I) &= -R_2 \omega_{2/0} \vec{x}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{1/0}(I) &= \vec{V}_{1/0}(O_1) + \vec{IO}_1 \wedge \vec{\Omega}_{1/0} \\ \vec{V}_{1/0}(I) &= -R_1 \vec{y}_0 \wedge \omega_{1/0} \vec{z}_0 \\ \vec{V}_{1/0}(I) &= -R_1 \omega_{1/0} \vec{x}_0 \end{aligned}$$

Il y a rsg, donc :

$$\begin{aligned} -R_2 \omega_{2/0} \vec{x}_0 &= R_1 \omega_{1/0} \vec{x}_0 \\ R_2 \omega_{2/0} &= -R_1 \omega_{1/0} \end{aligned}$$

11.3 Poulies-courroie et pignons-chaîne

(1) Une courroie crantée ne glisse pas mais a un rendement plus faible. Il y a un peu plus de pertes à cause des surfaces de contact.

Poulies-courroie ⁽¹⁾	Pignons-chaîne
<u>Utilisation</u> : moteur thermique...	<u>Utilisation</u> : vélo...
<u>Avantages</u> : grand entraxe possible	<u>Avantages</u> : grand entraxe possible, rigidité, effort transmissible important
<u>Inconvénients</u> : glissement possible si courroie plate, rendement moins bon si courroie crantée	<u>Inconvénients</u> : coût
<p><u>Rapport</u> : $r = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{D_1}{D_2}$</p> <p>Le sens de rotation est identique.</p>	

Démonstration :

En supposant que la courroie tendue ne glisse pas sur les poulies, nous avons :

En A : $V_{courroie/0} = R_1 \omega_{1/0}$

En B : $V_{courroie/0} = R_2 \omega_{2/0}$, d'où $R_1 \omega_{1/0} = R_2 \omega_{2/0}$

11.4 Engrenage

On appelle **engrenage** l'entraînement de **deux** solides par des dents.

(2) La petite roue dentée est appelée « pignon » et la grande est appelée « roue », ou « couronne » dans le cas d'un engrenage intérieur.

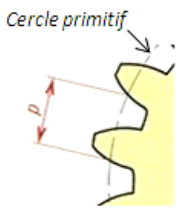
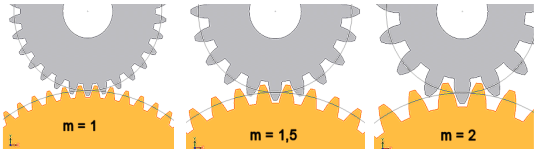
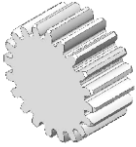

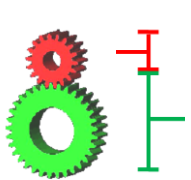
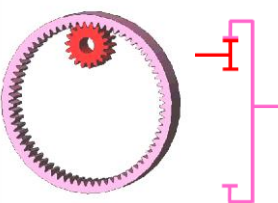
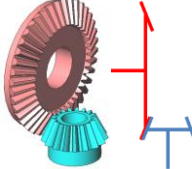
(3) Sur le schéma cinématique, on représente les cercles primitifs.

Engrenage ⁽²⁾⁽³⁾
<u>Utilisation</u> : montre, boîte de vitesse...
<u>Avantages</u> : pas de glissement
<u>Inconvénients</u> : coût

Caractéristiques des roues dentées

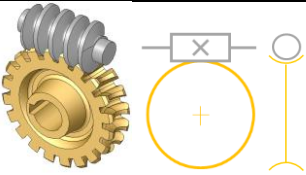
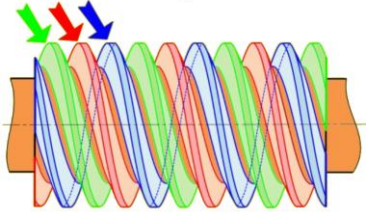
(1) ce sont les diamètres des roues de friction équivalentes qui donneraient la même cinématique

(2) Z comme Zahn qui veut dire dent en allemand.

Diamètre primitif	D_i diamètre du cercle primitif ⁽¹⁾ $D_i = m_i Z_i$		
Nombre de dents	Z_i ⁽²⁾		
Pas primitif	pas en [mm] longueur de l'arc de cercle entre deux dents $pas = \pi m_i = \frac{\pi D_i}{Z_i}$ Démonstration : Périmètre du cercle = $\pi D = pas Z$, on pose $m = \frac{pas}{\pi}$		
Module	m en [mm] caractérise la forme des dents  Pour que deux roues dentées engrènent, elles doivent avoir le même module .		
Entraxe	a_{12} distance entre les axes des roues dentées		
Profil	 <p>à denture droite <u>Avantage</u> : peut admettre des déplacements axiaux <u>Inconvénient</u> : vibration, bruyant</p>	 <p>à denture hélicoïdale <u>Avantages</u> : plus silencieux, transmet des couples plus importants <u>Inconvénient</u> : crée des efforts axiaux</p>	
	Engrenage cylindrique à contact extérieur	Engrenage cylindrique à contact intérieur	Engrenage conique
Forme			
Axes de rotation	Parallèles	Parallèles	Concourants
Rapport de transmission	$\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = -\frac{D_1}{D_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$	$\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = +\frac{D_1}{D_2} = +\frac{Z_1}{Z_2}$	$\left \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} \right = \frac{D_1}{D_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$ (3)
Entraxe	$a_{12} = \frac{D_1 + D_2}{2} = m \frac{Z_1 + Z_2}{2}$	$a_{12} = \frac{D_1 - D_2}{2} = m \frac{Z_1 - Z_2}{2}$	

(3) Si on s'intéressait au signe il faudrait poser une base en 3D et regarder les sens positifs.

(1) On parle de « vis » et non pas de « vis sans fin » car la vis est un composant qui a une fin.

Engrenage roue-vis ⁽¹⁾		
Forme		Exemple, vis à 3 filets : 
Axes de rotation	Orthogonaux non concourants (dits « gauches »)	
Rapport de transmission	$\left \frac{\omega_{roue/0}}{\omega_{vis/0}} \right = \frac{Z_{vis}}{Z_{roue}}$ <p>Avec Z_{vis} le nombre de filets de la vis</p> <p><u>Avantages</u> : rapport de réduction important (jusqu'à 150) et irréversibilité⁽²⁾ si nécessaire (la vis entraîne la roue mais la roue compte tenu de l'inclinaison de l'hélice, ne peut pas entraîner la vis), faible volume, changement de direction.</p> <p><u>Inconvénients</u> : faible rendement, forte usure.</p>	

(2) C'est-à-dire, dont la sortie ne peut pas faire bouger l'entrée. L'irréversibilité peut être utile pour des raisons de sécurité. Sur un treuil de levage par exemple, pour éviter que la charge ne devienne entraînée en cas de coupure d'énergie.

11.5

Train d'engrenages simple

Dans un transmetteur, on peut associer plusieurs engrenages à la suite pour augmenter le rapport de réduction ou de multiplication. On parle alors de **train d'engrenages**. Quand tous les axes de rotation des roues dentées sont fixes par rapport au bâti⁽³⁾, on parle de **train simple**.

Rapport de transmission d'un **train simple** d'engrenages avec des **axes parallèles** :

$$r = \frac{\omega_{s/0}}{\omega_{e/0}} = (-1)^n \frac{\prod Z_{menantes}}{\prod Z_{menées}} \quad (4)$$

avec n le nombre de **contacts extérieurs**

(3) On appelle bâti l'ensemble des pièces constituant le support d'une machine.

(4) Attention : Si le train comporte des engrenages coniques ou roue-vis on ne s'intéresse pas au signe et on note |r|. Sinon il faut définir un repère en 3D et regarder le sens de rotation de l'entrée et de la sortie.

11.6

Train épicycloïdal

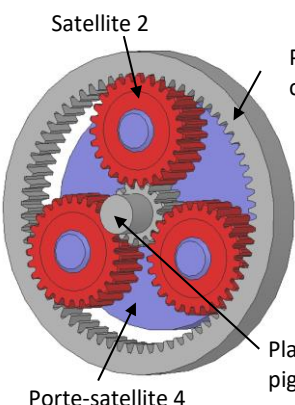
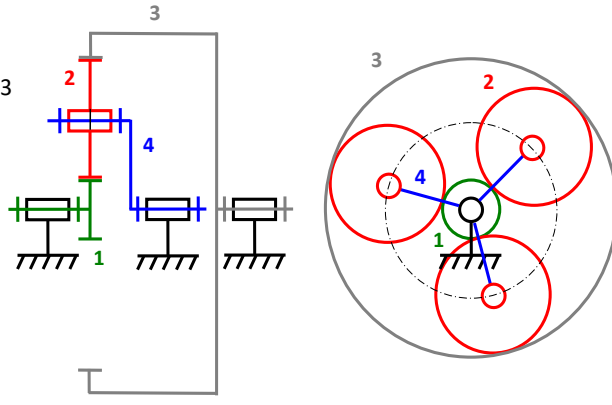
Pour obtenir un très grand rapport de transmission avec un train d'engrenages simple, il faut utiliser plusieurs étages, ce qui est lourd et encombrant. On utilise parfois des trains épicycloïdaux.

(5) Voir les animations sur <https://sciencesindustrielles.com/glossary/train-epicycloidal>



(6) Le mot épicycloïdal provient de la trajectoire de cycloïde d'une dent d'un satellite par rapport au planétaire intérieur.

épi : « sur, dessus »

Train épicycloïdal ⁽⁵⁾⁽⁶⁾	
	
<u>Utilisation</u> : moyeu à vitesses des vélos, différentiels, éoliennes, hélicoptère...	
<u>Avantages</u> : entrée et sortie coaxiales, bonne répartition des efforts donc bonne durée de vie, faible encombrement	
<u>Inconvénients</u> : coût, hyperstatisme	

satellite	Roue dentée dont son axe de rotation n'est pas fixe par rapport au bâti.
porte-satellite	Pièce en rotation d'axe fixe par rapport au bâti, sur laquelle sont montés le(s) satellite(s).
planétaire	Roue dentée (pignon ou couronne) d'axe fixe par rapport au bâti, qui engrène avec le(s) satellite(s).

(1) Cela implique qu'il faut même imaginer que certaines pièces sont « libérées ».

Démarche pour déterminer la loi entrée-sortie cinématique d'un train épicycloïdal :

1. On identifie les différentes classes d'équivalences cinématiques.
2. On se place dans le repère du porte-satellite⁽¹⁾ car dans le repère de celui-ci, les axes des pivots sont fixes.
3. On écrit une relation entre les vitesses angulaires des planétaires exprimées par rapport au porte-satellite. $\frac{\omega_{plA/PS}}{\omega_{plB/PS}} = (-1)^n \frac{\prod Z_{menantes}}{\prod Z_{menés}}$
4. On exprime les vitesses angulaires par rapport au bâti qui est fixe.
5. On écrit la loi entrée sortie $\frac{\omega_{S/0}}{\omega_{e/0}} = \dots$ ou en ligne $\dots \omega_{.../0} + \dots \omega_{.../0} + \dots \omega_{.../0} = 0$

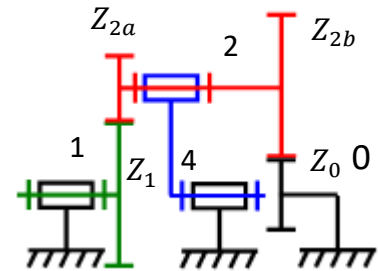
Application : rapport de transmission d'un train épicycloïdal

Soit 1 la pièce d'entrée de ce transmetteur et 4 la pièce de sortie.

Déterminer le rapport de transmission $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$.

Il y a 1 entrée et 1 sortie.

Satellite : **2** Porte-satellite : **4** Planétaire : **0** Planétaire : **1**



On se place dans le repère du porte-satellite 4

$$\frac{\omega_{0/4}}{\omega_{1/4}} = (-1)^n \frac{\prod Z_{menantes}}{\prod Z_{menés}} = (-1)^2 \frac{Z_1 Z_{2b}}{Z_{2a} Z_0} = \lambda$$

On écrit une composition des mouvements :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{-\omega_{4/0}}{\omega_{1/0} - \omega_{4/0}} &= \frac{Z_1 Z_{2b}}{Z_{2a} Z_0} \\ \Rightarrow -\omega_{4/0} &= \frac{Z_1 Z_{2b}}{Z_{2a} Z_0} (\omega_{1/0} - \omega_{4/0}) \\ \Rightarrow \left(\frac{Z_1 Z_{2b}}{Z_{2a} Z_0} - 1 \right) \omega_{4/0} &= \frac{Z_1 Z_{2b}}{Z_{2a} Z_0} \omega_{1/0} \\ \Rightarrow r = \frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}} &= \frac{\frac{Z_1 Z_{2b}}{Z_{2a} Z_0}}{\frac{Z_1 Z_{2b}}{Z_{2a} Z_0} - 1} = \frac{Z_1 Z_{2b}}{Z_1 Z_{2b} - Z_{2a} Z_0} \end{aligned}$$

Conditions géométriques de fonctionnement

Les conditions géométriques indispensables au montage et au fonctionnement d'un train épicycloïdal impliquent des relations entre les diamètres (ou rayons) primitifs des différentes roues dentées.

☞ Le satellite est la seule pièce non reliée au bâti.

☞ Dans cet exemple, on parle de satellite double.

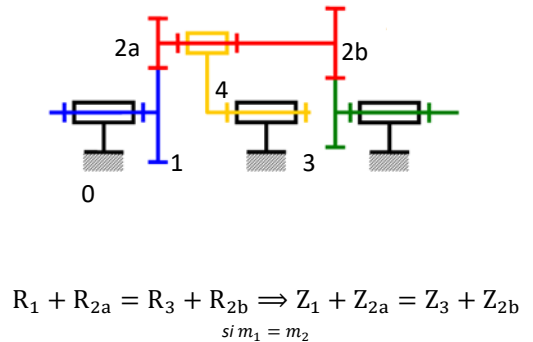
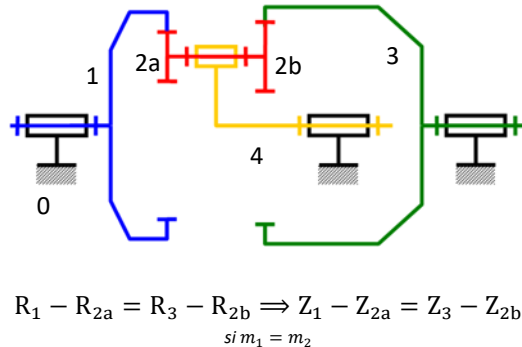
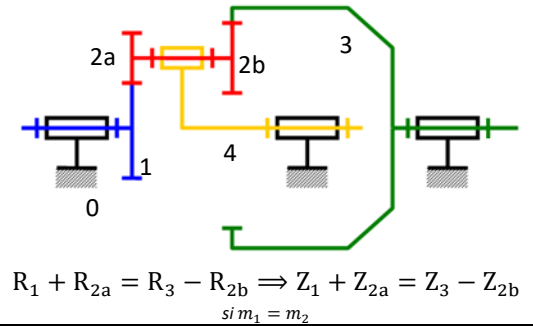
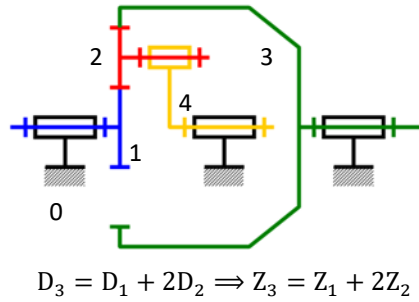
☞ Le porte-satellite n'est pas encastré, il s'agit donc bien d'un train épicycloïdal.

☞ Dans le repère du PS, le bâti n'est plus immobile.

☞ $\omega_{i/j} = -\omega_{j/i}$

$\omega_{i/k} = \omega_{i/j} + \omega_{j/k}$
 $= \omega_{i/j} - \omega_{k/j}$

Ces relations peuvent se traduire sous la forme de relations liant les nombres de dents de roues dentées à condition que les modules des différents engrenages soient égaux.



11.7 Accouplements mécaniques

Un **accouplement mécanique**, ou joint de transmission, appartient à la famille des transmetteurs. Il sert à relier deux arbres en **rotation** comportant éventuellement des **défauts d'alignement angulaires ou radiaux**.

© Voir les animations sur <https://sciencesindustrielles.com/glossary/accouplement-mecanique>



Accouplements permanents

Nom	Joint de Cardan	Joint de Oldham	Joint élastique
Forme			
Propriété	hétérocinétique si seul homocinétique si double	homocinétique	homocinétique

Accouplements temporaires

Nom	Embrayage	Limiteur de couple	Frein à disque	Frein à tambour	Roue libre
Forme					

ANNEXE

Produit scalaire

Le produit scalaire est une application qui à un couple de vecteur associe un nombre réel tel que :

$$E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Propriétés

Symétrique $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$	Distributif vis-à-vis de l'addition $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
--	---

Cas particuliers

Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est nul si :

- un des vecteurs est nul
- les deux vecteurs sont orthogonaux

Norme d'un vecteur

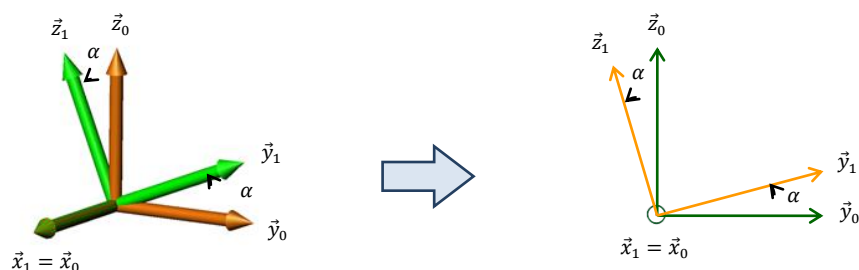
Pour un vecteur \vec{u} : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Figure de calcul

La démarche pour construire une figure de changement de base :

1. **Dessiner le vecteur unitaire commun⁽¹⁾ aux deux bases**, perpendiculaire au plan de la feuille et en l'orientant vers vous et écrire les deux vecteurs (exemple : $\vec{x}_1 = \vec{x}_0$);
2. **Dessiner la base associée au solide de référence** (exemple : B_1 si $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$) **de manière directe⁽²⁾**, en orientant le 2^{ème} vecteur unitaire vers la droite, et le 3^{ème} vers le haut ;
3. **Dessiner la base associée au solide en mouvement** (exemple : B_2 si $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$) **de manière directe** en la décalant dans le sens trigonométrique d'un angle petit et positif ($\approx 20^\circ$).
4. **Paramétrer** la figure avec l'angle et une flèche.

Figure de changement de base

Projection des vecteurs dans une base⁽³⁾ :

$$\vec{y}_1 = \cos \alpha \vec{y}_0 + \sin \alpha \vec{z}_0 \quad \vec{y}_0 = \cos \alpha \vec{y}_1 - \sin \alpha \vec{z}_1$$

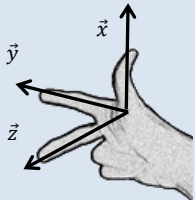
$$\vec{z}_1 = -\sin \alpha \vec{y}_0 + \cos \alpha \vec{z}_0 \quad \vec{z}_0 = \sin \alpha \vec{y}_1 + \cos \alpha \vec{z}_1$$

(1) Si un vecteur vient vers vous, en 2D on utilisera le symbole \odot

et si il va dans la direction opposé \otimes

Dans une figure de changement de base utilisera donc toujours le symbole \odot

(2) Un repère direct se retrouve avec la « règle » des 3 doigts de la main droite :



(3) Astuce pratique, pour des angles d'environ 30° :

« grande projection »
→ cosinus

« petite projection »
→ sinus

👉 Pour s'entraîner :

<https://sciencesindustrielles.com/logiciels>

→ QCM Prod

Produit vectoriel

Définition

Le produit vectoriel qui a un couple de vecteurs associe un **vecteur** $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :

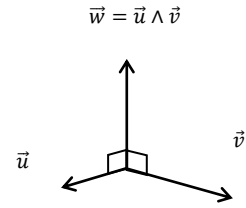
$$E \times E \rightarrow E$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{w} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \vec{n}$$

Avec \vec{n} un vecteur unitaire tel que :

$$\vec{n} \perp (\vec{u}, \vec{v})$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}) \text{ est une base directe}$$



Propriétés

Antisymétrique

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

Distributif vis-à-vis de l'addition

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

Cas particuliers

Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est nul si :

- un des vecteurs est nul, $\vec{u} = \vec{0}$ et/ou $\vec{v} = \vec{0}$
- les deux vecteurs sont colinéaires $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Produit mixte

Définition

Le produit mixte est une application qui à un triplet de vecteurs associe un nombre réel tel que :

$$E \times E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \mapsto (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

Propriétés

Changement de signe si l'on permute 2 vecteurs : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$

Permutation circulaire : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$

Champ vectoriel

Définition

On appelle champ de vecteurs une application qui à chaque point de l'espace affine associe un vecteur.

$$\mathcal{E} \rightarrow E$$

$$A \mapsto \vec{U}(A)$$

Propriétés

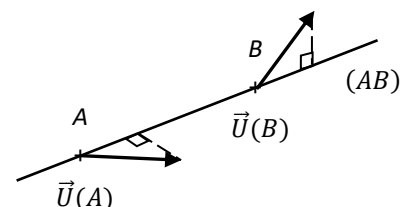
On dit qu'un champ est **uniforme** si

$$\forall A \in \mathcal{E}, \forall B \in \mathcal{E}, \vec{U}(A) = \vec{U}(B)$$

On dit qu'un champ est **équiprojectif** si

$$\forall A \in \mathcal{E}, \forall B \in \mathcal{E}, \vec{U}(A) \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{U}(B) \cdot \overrightarrow{AB}$$

Les 2 vecteurs $\vec{U}(A)$ et $\vec{U}(B)$ ont la même projection sur la droite (AB) .



Torseur

Définition

(1) Le mot « torseur », de la même famille que « torsade » et « tordre », vient de la forme remarquable d'un champ de vecteur équiprojectif.

(2) Ce qui veut dire que le torseur peut se réduire à l'expression de 2 vecteurs à partir desquelles on peut déterminer les autres.

Un torseur est un champ de vecteurs **équiprojectif**⁽¹⁾.

Un torseur est une application linéaire antisymétrique. Et il existe un vecteur \vec{R} tel que :

$$\vec{V}: \mathcal{E} \rightarrow E$$

$$B \mapsto \vec{V}(B) = \vec{V}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}$$

Les **éléments de réduction**⁽²⁾ du torseur sont :

\vec{R} est appelé le vecteur **résultante**.

$\vec{V}(A)$ est appelé le vecteur **moment**.

Exemple : champs de vitesse d'un torseur

Torseur glisseur $\vec{V}_{2/1} = \begin{matrix} 1 \vec{z} \\ A \ 0 \end{matrix}$	Torseur couple $\vec{V}_{2/1} = \begin{matrix} 0 \\ A \ 1 \vec{z} \end{matrix}$	Torseur quelconque $\vec{V}_{2/1} = \begin{matrix} 1 \vec{z} \\ A \ 1 \vec{z} \end{matrix}$

Axe central

(3) C'est l'axe de rotation d'un manège.

Pour un torseur à résultante non nulle, l'**axe central** est une droite de même direction que la résultante. Sur cette droite, le moment est minimal, il est appelé **moment central**.

Applications

$A \mapsto f(A)$: champ scalaire	ex : champ de pressions	$A \mapsto P(A)$
$A \mapsto \vec{f}(A)$: champ vectoriel	ex : champ de vitesses	$A \mapsto \vec{V}(A)$
$A \mapsto \bar{f}(A)$: champ tensoriel	ex : champ tensoriel	$A \mapsto \bar{I}(A)$
$\vec{u} \mapsto f(\vec{u})$: opérateur scalaire = forme	ex : produit scalaire	
$\vec{u} \mapsto \vec{f}(\vec{u})$: opérateur vectoriel	ex : produit vectoriel	

QUESTIONS DE COURS

- donner la méthode pour identifier un mouvement de rotation et de translation ;
- donner le nom de la liaison pour 2 solides en mouvement relatif de rotation, représenter en couleur le symbole normalisé associé ;
- donner le nom de la liaison pour 2 solides en mouvement relatif de translation à trajectoire rectiligne, représenter en couleur le symbole normalisé associé ;
- donner la différence entre un axe et une direction ;
- comment se nomme les deux représentations d'un modèle cinématique ;
- indiquer les trajectoires des points d'un solide en mouvement de translation à trajectoire rectiligne, en mouvement de translation à trajectoire circulaire, en mouvement de rotation ;
- donner un exemple de points coïncidents.

- que peut-on dire des bases dans le cas d'un mouvement de translation ?
- que peut-on dire des repères dans le cas d'un mouvement de translation ?
- donner le paramètre de mouvement d'une liaison glissière et d'une liaison pivot ;
- donner la différence entre un paramètre de mouvement et un paramètre caractéristique ;
- définir le vecteur position d'un point M ;
- indiquer la méthode pour réaliser une figure de changement de base ;
- donner les projections des différents vecteurs dans une figure de changement de base ;
- comment calcule-t-on une norme ;
- expliquer les 3 cas que l'on peut rencontrer lorsque l'on effectue le produit scalaire de vecteurs unitaires. Donner les méthodes utilisées pour trouver le résultat rapidement.

- que peut-on dire du vecteur vitesse angulaire dans le cas d'un mouvement de translation ?
- donner la relation du champ des vecteurs vitesse ;
- expliquer les 3 cas que l'on peut rencontrer lorsque l'on effectue le produit vectoriel de vecteurs unitaires. Donner les méthodes utilisées pour trouver le résultat rapidement ;
- donner les particularités d'un champ de vecteur vitesse des points d'un solide en mouvement de rotation ;
- donner les particularités d'un champ de vecteur vitesse des points d'un solide en mouvement de translation ;
- expliquer la méthode permettant de déterminer le vecteur vitesse, par rapport à un référentiel, d'un point fixe dans un solide.

- donner, dans le cas général, l'expression du torseur cinématique ;
- préciser la forme du torseur cinématique d'une liaison pivot. Indiquer l'ensemble des points pour lesquelles ce torseur a la même forme ;
- préciser la forme du torseur cinématique d'une liaison glissière. Indiquer l'ensemble des points pour lesquelles ce torseur a la même forme ;
- rappeler la relation de composition des torseurs cinématiques. Indiquer le nombre de relations vectorielles et scalaires induites par cette équation de torseur.

- définir le rapport de transmission ;
- donner la relation entre ω (en rad/s) et N (en tr/min) ;
- donner le rapport de transmission d'un transmetteur roues de friction. Quand est-il valide ?
- définir le « pas primitif » d'une roue dentée ;
- définir le module. Donner les 2 relations qui utilisent le module ;
- indiquer la condition nécessaire pour que 2 roues dentées puissent engrener ensemble ;
- donner les différents types d'engrenages, les rapports de transmission associés, et la valeur maximale de ce rapport ;
- donner l'entraxe d'un engrenage cylindrique à contact intérieur ;
- donner le rapport de transmission d'un train d'engrenage simple ;
- donner le rapport de transmission d'un transmetteur poulies-courroie ou pignons-chaîne. Donner leur avantage.

- expliquer la différence entre un train épicycloïdal et un train simple ;
- définir satellite, porte satellite, et planétaires ;
- donner un exemple d'une condition géométrique de fonctionnement qui implique une relation sur le nombre de dents des différentes roues dentées.

- quels sont les accouplements homocinétiques ?

- donner la loi entrée-sortie d'un transmetteur pignon-crémaillère ;
- quel composant peut avoir la même cinématique qu'un transmetteur pignon-crémaillère ?
- donner la loi entrée-sortie d'un transmetteur vis-écrou ;
- lequel de ces 2 transmetteurs peut être irréversible ?

- donner les définitions de degré de liberté et degré de liaison pour une liaison ;
- donner les symboles, le torseur cinématique et le torseur des actions mécaniques transmissibles dans la liaison...
- qu'est-ce qu'une liaison parfaite ?

- comment identifie-t-on le type de liaison lorsque l'on modélise un mécanisme réel ?
- donner les 3 étapes permettant de tracer un schéma cinématique.

- expliquer la notion de mobilité interne ;
- expliquer la méthode pour déterminer la loi entrée-sortie en position par fermeture géométrique ;
- donner les astuces qui permettent souvent d'éliminer un des paramètres de mouvement des équations obtenues.
- expliquer la notion de linéariser sur un domaine de validité.

- expliquer la méthode pour déterminer la loi entrée-sortie en vitesse par fermeture cinématique.

- comment obtient-on une vitesse angulaire de roulement et de pivotement ?
- donner l'expression de la vitesse de glissement d'un point J de contact entre deux solides 2 et 1 ;
- que dire sur la direction de ce vecteur vitesse de glissement ;
- comment faire pour déterminer ce vecteur vitesse ;
- que vaut ce vecteur lorsqu'il y a roulement sans glissement ?

Actions mécaniques

(1) Déterminer leurs formes, leurs dimensions et le matériau qui les constituent.

On a vu précédemment que l'on pouvait, à l'aide d'une simulation, prévoir le comportement cinématique d'un mécanisme.

Mais cela ne suffit pas pour concevoir un mécanisme ou vérifier qu'il répond bien aux attentes de ses utilisateurs. Il faut aussi s'intéresser aux **actions mécaniques** auxquelles ce dernier est soumis afin de :

- dimensionner⁽¹⁾ et choisir un composant ou des structures ;
- calculer les déformations induites par un chargement ;
- déterminer les équations dynamiques du mouvement.

C'est l'application du principe fondamental de la dynamique qui, après avoir identifié et modélisé les différentes actions mécaniques connues et recherchées, permet d'étudier la relation de cause à effet entre les mouvements (ou l'équilibre) d'un mécanisme et les actions mécaniques en présence.



Test de flexion d'une aile d'A350

1 Modélisation des AM

1.1 Concept d'action mécanique

Une **action mécanique** (notée AM) est un **phénomène** qui peut provoquer des déformations et des mouvements.

Une AM a toujours une origine et une cible. On utilisera la notation : $i \rightarrow j$.

Exemples :

- action de la terre sur le bateau : ter \rightarrow bateau
- action de l'eau sur le bateau : eau \rightarrow bateau
- action de l'air sur le cerf-volant : vent \rightarrow cerf - volant
- action du noyau interne sur la boussole : fer \rightarrow boussole



Un champ de force **modélise** une action mécanique.

Le champ de **moment**⁽²⁾ désigne l'effet d'un champ de force à distance.

(2) Une force peut provoquer une translation ou une rotation ! il faut donc une notion supplémentaire pour expliquer ce phénomène.

Il est donc illusoire de vouloir observer un champ de force. Une force est du domaine du modèle, une AM est du domaine du réel.

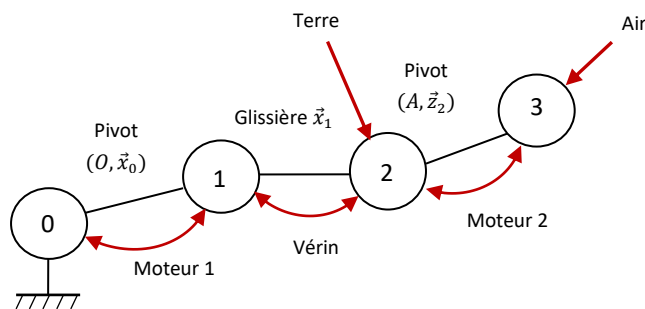
En pratique⁽³⁾, pour mesurer une AM, on utilisera la déformation d'un ressort, des jauges de déformation ou des cellules piézo-électrique.

(3) Pour savoir si une valise est lourde, il faut la mettre en mouvement ou lui faire provoquer une déformation !

1.2 Graphe de structure

Un **graphe de structure** ou **graphe d'analyse** est un **graphe des liaisons** complété des **actions mécaniques** sollicitant le mécanisme étudié. Il permet de recenser efficacement toutes les actions mécaniques.

Exemple : chaîne ouverte à 3 degrés de liberté.



1.3 Modélisation globale des AM

Torseur des AM

En cinématique du solide indéformable, on utilise le modèle du torseur pour décrire les mouvements. Par dualité, c'est donc ce même modèle que l'on utilise pour les actions mécaniques transmissibles.

On appelle **torseur des actions mécaniques** exercées de i sur j le torseur construit par dualité avec la cinématique pour exprimer la puissance développée lors d'un mouvement j/i . **Le torseur des AM modélise une AM.**

$$\vec{M}_{i \rightarrow j} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

$$A \mapsto \vec{M}_{i \rightarrow j}(A) = \vec{M}_{i \rightarrow j}(B) + \overline{AB} \wedge \vec{R}_{i \rightarrow j} \quad (1)$$

Les **éléments de réduction** du torseur sont :

$$\vec{M}_{i \rightarrow j} = \begin{matrix} \vec{R}_{i \rightarrow j} \\ A \vec{M}_{i \rightarrow j}(A) \end{matrix} = \begin{matrix} X_{i \rightarrow j} \vec{x} + Y_{i \rightarrow j} \vec{y} + Z_{i \rightarrow j} \vec{z} \\ L_{i \rightarrow j} \vec{x} + M_{i \rightarrow j} \vec{y} + N_{i \rightarrow j} \vec{z} \end{matrix} = \begin{matrix} X_{i \rightarrow j} & L_{i \rightarrow j} \\ Y_{i \rightarrow j} & M_{i \rightarrow j} \\ Z_{i \rightarrow j} & N_{i \rightarrow j} \end{matrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (2)(3)$$

$\vec{R}_{i \rightarrow j}$ est la **résultante**⁽⁴⁾ de l'AM de $i \rightarrow j$. Elle modélise la part de l'action mécanique qui génère ou modifie un mouvement de translation à trajectoire rectiligne, ou provoque une déformation de traction ou compression. Elle est en Newton [N] et est **invariante** ;

$\vec{M}_{i \rightarrow j}(A)$ le **moment**⁽⁵⁾ de l'AM de $i \rightarrow j$. Il modélise la part de l'action mécanique qui **génère ou modifie un mouvement de rotation**, ou provoque une déformation de torsion. Il est en Newton mètre [Nm] et **dépend du point d'expression du torseur**.

(1) Il y a le même lien entre le torseur $\vec{M}_{2 \rightarrow 1}$ et le moment $\vec{M}_{2 \rightarrow 1}(A)$ qu'entre la fonction f et l'image $f(x)$.

(2) La notation utilisée dans ce cours correspond à une fonction vectorielle.

Cependant, on pourrait utiliser une autre notation :

$$\mathcal{F}(i \rightarrow j) = \begin{matrix} \vec{R}(i \rightarrow j) \\ A \vec{M}(A, i \rightarrow j) \end{matrix}$$

qui correspond à une fonction torsorielle.

\mathcal{F} comme force, ce qui a

l'avantage donner en dans le cours de dynamique de 2nd année :

$$P(i \rightarrow j/k) = \mathcal{F}(i \rightarrow j) \circ \mathcal{V}(j/k)$$

(3) Attention, cette dernière notation n'est pratique que dans les rares cas où il n'y a qu'une seule base. Or il y a souvent plusieurs solides dans un mécanisme.

(4) On utilise le terme « résultante » car le modèle résulte de la somme de toutes les AM de contact réparties au niveau du contact entre les deux solides.

(5) On peut parler du moment d'une force ou du moment d'un couple.

(6) Glisseur : la force peut "glisser" en tout point de la droite d'action en modélisant la même action.

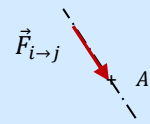
(7) La distance entre un point et une droite se mesure au niveau du projeté orthogonal du point sur la droite.

Cas particulier d'un torseur glisseur

Une force modélise une AM d'un certain type.

Une force est décrite par un **torseur glisseur**⁽⁶⁾ :

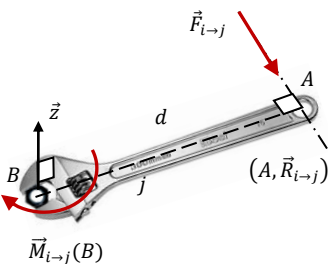
$$\vec{M}_{i \rightarrow j} = \begin{matrix} \vec{F}_{i \rightarrow j} \\ A \vec{0} \end{matrix}$$



Ce torseur est **invariant** pour tous les points $P \in (A, \vec{F}_{i \rightarrow j})$ appelée **droite d'action**.

Le **moment central** (c'est-à-dire le moment sur l'axe du torseur) d'une force résultante est **nul**.

Détermination du moment d'une force en un autre point que le point d'application :



$$\vec{M}_{i \rightarrow j} = \begin{matrix} \vec{F}_{i \rightarrow j} \\ A \vec{0} \end{matrix} = \begin{matrix} \vec{F}_{i \rightarrow j} \\ B \pm d \|\vec{F}_{i \rightarrow j}\| \vec{z} \end{matrix}$$

$$\text{car } \vec{M}_{i \rightarrow j}(B) = \vec{M}_{i \rightarrow j}(A) + \overline{BA} \wedge \vec{F}_{i \rightarrow j} = \pm d \|\vec{F}_{i \rightarrow j}\| \vec{z}$$

d est appelé **bras de levier** (distance entre B et la droite d'action)⁽⁷⁾

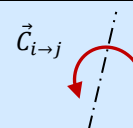
sens trigo $\rightarrow +$ et sens horaire $\rightarrow -$

Cas particulier d'un torseur couple

Un couple modélise une AM d'un certain type.

Un couple est décrit par un **torseur couple** :

$$\vec{M}_{i \rightarrow j} = \forall P \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{C}_{i \rightarrow j} \end{matrix}$$



Ce torseur est **invariant** pour tous les points P de l'espace. En effet :

$$\vec{M}_{i \rightarrow j}(B) = \vec{M}_{i \rightarrow j}(A) + \overline{BA} \wedge \vec{R}_{i \rightarrow j} = \vec{M}_{i \rightarrow j}(A) + \vec{0} = \vec{C}_{i \rightarrow j}$$

Exemple : champs de moments d'un torseur

Torseur glisseur $\vec{M}_{i \rightarrow j} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} 1 \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$	Torseur couple $\vec{M}_{i \rightarrow j} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ 1 \vec{z} \end{array} \right\}}$

Le torseur est une même fonction vectorielle mathématique qui peut représenter des grandeurs différentes selon son contexte.

En cinématique ces deux champs de vitesses représentent le champ des vitesses respectivement d'une rotation et d'une translation.

Pour une action mécanique, ils représentent le champ de moments. C'est-à-dire qu'en chaque point, le vecteur moment indique l'intensité du moment, et la direction autour de laquelle on va tourner.

AM réciproques

$i \rightarrow j$ est l'**action réciproque** de l'action mécanique $j \rightarrow i$.

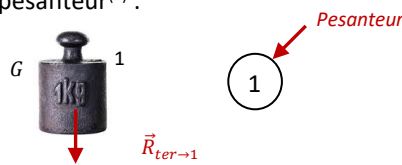
On admettra sans démonstration :

Théorème des actions réciproques : $\vec{M}_{i \rightarrow j} = -\vec{M}_{j \rightarrow i} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_{i \rightarrow j} \\ \vec{M}_{i \rightarrow j}(A) \end{cases} = - \begin{cases} \vec{R}_{j \rightarrow i} \\ \vec{M}_{j \rightarrow i}(A) \end{cases}$

1.4 Modéliser les AM usuelles

AM de la pesanteur

Considérons un solide 1 soumis à la pesanteur⁽¹⁾ :

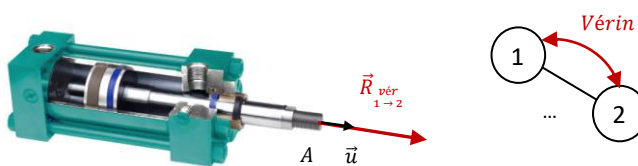


Le **poids** d'un solide 1 de masse m est une **force de résultante** $m\vec{g}$ passant par le **centre de masse**⁽²⁾ G :

$\vec{M}_{ter \rightarrow 1} = \underset{G}{\left\{ \begin{array}{l} -mg\vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$ valable $\forall P \in (G, \vec{z})$

AM d'un vérin

Considérons un vérin placé en parallèle d'une liaison.



(1) L'action mécanique de gravité est l'action de la matière sur la matière. La pesanteur prend en compte la gravité et l'accélération de la rotation de la Terre.

(2) Centre de masse est synonyme de centre d'inertie et de centra de gravité.

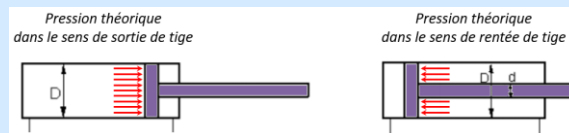
Si pour un vérin :

- le corps et la tige sont en **liaison articulaire (pivot ou sphérique)** à leur « point d'attache » ;
- et que **les poids du corps et de la tige sont négligés**,

alors le corps et la tige du vérin ne sont pas représentés sur le graphe d'analyse, et l'action du vérin est **modélisée par une force** de droite d'action passant par ses points d'attache :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{\text{vérin}} = A \left\{ \begin{array}{l} F_{1 \rightarrow 2} \vec{u} \\ \vec{0} \end{array} \right. = A \left\{ \begin{array}{l} pS \vec{u} \\ \vec{0} \end{array} \right. \quad \text{valable } \forall P \in (A, \vec{u})$$

Le vérin est de type pneumatique ou hydraulique.



avec : $p^{(1)}$ en $[Pa]$ la **pression uniforme** du fluide ;

S en $[m^2]$ la **surface de contact fluide/piston** :

$$S = \frac{\pi D^2}{4} \quad \text{pour une tige qui sort et } S = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} \quad \text{pour une tige qui rentre}$$

(1) Un Pascal :

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N.m}^{-2}$$

un Méga Pascal :

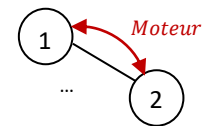
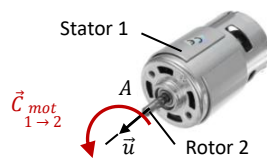
$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ N.mm}^{-2}$$

un bar :

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

AM d'un moteur électrique

Considérons un moteur placé en parallèle d'une liaison.

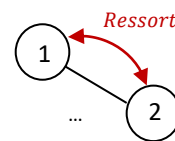


L'action mécanique **du stator d'un moteur électrique sur son rotor** est modélisée par un **couple orienté par l'axe** du moteur :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{\text{mot}} = A \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_{1 \rightarrow 2} \vec{u} \end{array} \right. \quad \text{valable } \forall P$$

AM d'un ressort de traction/compression

Considérons un ressort de traction/compression placé en parallèle d'une liaison. Soit λ la longueur du ressort.

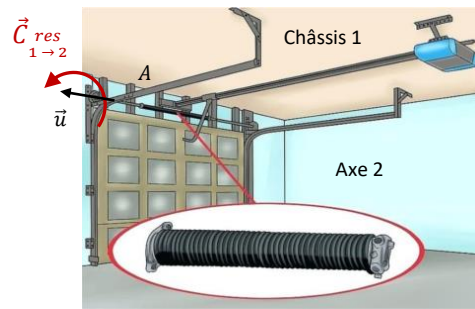


L'action d'un **ressort de traction/compression de longueur à vide λ_0** et de **raideur k** en $[N/m]$ est une **force passant par ses points d'attache** et d'intensité **proportionnelle à la variation de longueur** du ressort :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{\text{res}} = A \left\{ \begin{array}{l} -k(\lambda - \lambda_0) \vec{u} \\ \vec{0} \end{array} \right. \quad \text{valable } \forall P \in (A, \vec{u})$$

AM d'un ressort de torsion

Considérons un ressort de torsion placé en parallèle d'une liaison. Soit α l'angle du ressort.



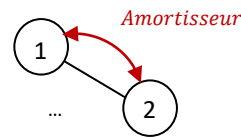
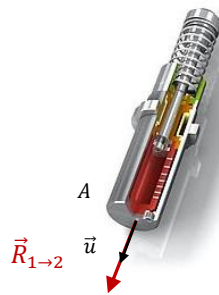
L'action d'un **ressort de torsion** d'angle à vide α_0 et de raideur k en $[Nm/rad]$ est un **couple**, d'intensité **proportionnelle à la variation de l'angle** du ressort :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{res} = A \begin{cases} \vec{0} \\ -k(\alpha - \alpha_0)\vec{u} \end{cases} \quad \text{valable } \forall P \in (A, \vec{u})$$

AM d'un amortisseur

Considérons un amortisseur⁽¹⁾ placé en parallèle d'une liaison. Soit c le coefficient d'amortissement de l'amortisseur.

(1) Attention, un amortisseur est souvent mis en parallèle d'un ressort, cependant ce sont deux composants indépendants.

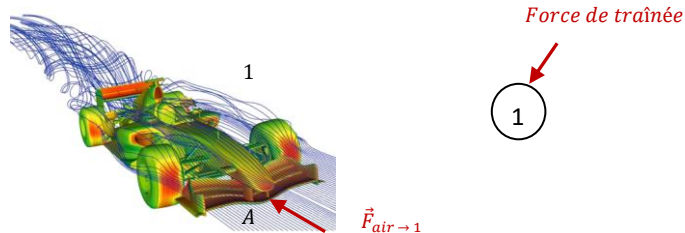


L'action d'un **amortisseur** de coefficient d'amortissement c en $[N/(m/s)]$ est une **force**, d'intensité **proportionnelle à la vitesse** de l'amortisseur :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{amo} = A \begin{cases} -c(\dot{\lambda} - \dot{\lambda}_0)\vec{u} \\ \vec{0} \end{cases} \quad \text{valable } \forall P \in (A, \vec{u})$$

AM de traînée

Considérons un solide 1 soumis à au frottement visqueux de l'air :



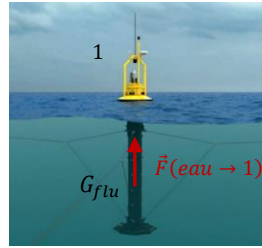
La **force de traînée** de l'air sur la voiture due au frottement fluide visqueux est :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{air} = A \begin{cases} \frac{1}{2} C_x \rho S V^2 \vec{u} \\ \vec{0} \end{cases} \quad \text{valable } \forall P \in (A, \vec{u})$$

avec : ρ en $[kg/m^3]$ la **masse volumique** du fluide ;
 S en $[m^2]$ la **surface projetée de pénétration** ;
 V en $[m/s]$ la **vitesse** de déplacement ;
 C_x le **coefficient de traînée** dans l'air.

AM de la poussée d'Archimède

Considérons une bouée houlomotrice 1 soumis à l'action de la poussée d'Archimède :



Poussée d'Archimède



La **poussée d'Archimède** de l'eau sur la bouée est :

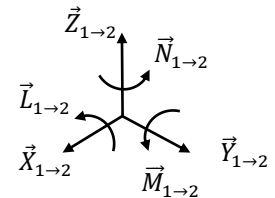
$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2}^{eau} = G_{flu} \begin{cases} \rho V g \vec{z} \\ \vec{0} \end{cases} \quad \text{valable } \forall P \in (G_{flu}, \vec{z})$$

avec : ρ en $[kg/m^3]$ la **masse volumique** du fluide ;
 V en $[m^3]$ le **volume de fluide** déplacé ;
 g en $[m/s^2]$ l'**accélération** de la gravité.

AM transmissibles par une liaison

Une liaison entre deux solides 1 et 2 permet les mouvements relatifs entre ces deux solides, mais aussi de transmettre des actions mécaniques d'un solide à l'autre.

Les composantes des vecteurs $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{M}_{1 \rightarrow 2}(A)$ sont ici appelées **inconnues de liaisons**. En général, dans les problèmes rencontrés, elles sont inconnues et on ne cherche pas à les déterminer, sauf si l'on cherche à dimensionner des éléments technologiques qui réalisent une liaison.



Une **liaison parfaite** est une liaison **cinématiquement parfaite** ne **dissipant pas d'énergie**⁽¹⁾ quels que soient les efforts transmis par cette liaison et quelles que soient les amplitudes et vitesses des mouvements relatifs. Conséquences :

Les torseurs des actions mécaniques et cinématiques d'une liaison parfaite ont une **forme duale**.

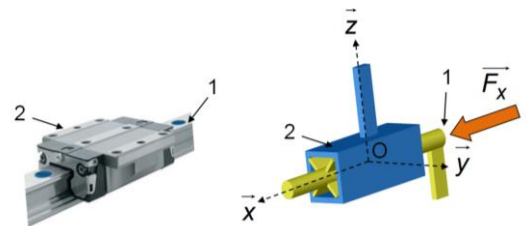
- pour chaque degré de liberté supprimé, il existe une composante d'action mécanique susceptible d'être transmise par la liaison ;
- à l'inverse, aucune composante d'action mécanique ne peut être transmise là où un mouvement relatif est possible.

Exemple : liaison glissière de direction \vec{x} entre 1 et 2

La liaison comprend 1 degré de liberté : T_x .

La liaison ne peut transmettre d'action élémentaire \vec{F}_x , d'où $X_{1 \rightarrow 2} = 0$.

Si on applique une force \vec{F}_x sur la pièce 1, la pièce 2 ne « ressent » rien, car la force n'est pas transmise d'un solide à l'autre par l'intermédiaire de la liaison.



A un degré de liberté en translation supprimé correspond une composante de la résultante de l'action mécanique

$$\vec{V}_{2/1} = P \begin{cases} 0 \vec{x} + 0 \vec{y} + 0 \vec{z} \\ V_{x,2/1} \vec{x} + 0 \vec{y} + 0 \vec{z} \end{cases} \quad \vec{M}_{1 \rightarrow 2} = P \begin{cases} 0 \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ L_{1 \rightarrow 2} \vec{x} + M_{1 \rightarrow 2} \vec{y} + N_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \end{cases} \quad (2)$$

A un degré de liberté en rotation supprimé correspond une composante du moment de l'action mécanique

Voir Tableau des liaisons pour les autres liaisons.

(1) Liaison sans frottement, le frottement étant considéré comme une résistance au mouvement.

Cette hypothèse vient s'ajouter aux deux autres hypothèses de liaison parfaite découvertes dans le cours de cinématique :

- surface de contact géométriquement parfaite ;

- jeux de fonctionnement nuls entre les surfaces de contact.

(2) Les zones de validité du torseur cinématique et du torseur des actions mécaniques transmissibles sont identiques.

2 Statique

2.1 Théorème de l'équilibre

Référentiel Galiléen

Un référentiel est l'association d'un repère géométrique et d'une échelle de temps.

En SI, on considère Galiléen :

- tout repère **fixe** par rapport à la Terre ;
- ou tout repère en mouvement de **translation à trajectoire rectiligne uniforme** par rapport à la Terre.

Equilibre et statique

On appelle **équilibre** un mouvement nul.

La **statique** est l'étude des états d'équilibres.

Théorème de l'équilibre

Théorème de l'équilibre (TE)⁽¹⁾⁽²⁾ :

Si un système matériel Σ est à l'**équilibre** par rapport à un **référentiel Galiléen** alors la **somme des torseurs des actions mécaniques du milieu extérieur sur Σ est nulle.**

$$\forall t, \forall P \quad \vec{V}_{\Sigma/R_g}(P) = \vec{0} \Rightarrow \forall t \sum_i \vec{M}_{i \rightarrow \Sigma} = 0 \Rightarrow \sum_i A \begin{Bmatrix} \vec{R}_{i \rightarrow \Sigma} \\ \vec{M}_{i \rightarrow \Sigma}(A) \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Le Principe Fondamental de la Statique (PFS) est un cas particulier du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) appliqué à un ensemble de solides en équilibre.

L'équation torsorielle ci-dessus conduit donc à l'écriture de **2 équations vectorielles** :

Théorème de la Résultante Statique (TRS) : $\sum_i \vec{R}_{i \rightarrow \Sigma} = \vec{0}$

Théorème du Moment Statique (TMS) au point A : $\sum_i \vec{M}_{i \rightarrow \Sigma}(A) = \vec{0}$

Après avoir exprimé ces vecteurs dans une seule et unique base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, chacune de ces équations vectorielles donne 3 équations scalaires, soit **6 équations scalaires** au total :

$$\begin{aligned} \vec{R}_{\Sigma \rightarrow \Sigma} \cdot \vec{x} &= 0 \quad (4) & \vec{M}_{\Sigma \rightarrow \Sigma}(A) \cdot \vec{x} &= 0 \\ \vec{R}_{\Sigma \rightarrow \Sigma} \cdot \vec{y} &= 0 & \vec{M}_{\Sigma \rightarrow \Sigma}(A) \cdot \vec{y} &= 0 \\ \vec{R}_{\Sigma \rightarrow \Sigma} \cdot \vec{z} &= 0 & \vec{M}_{\Sigma \rightarrow \Sigma}(A) \cdot \vec{z} &= 0 \end{aligned}$$

(1) Appelé parfois Principe Fondamental de la Statique (PFS) si on n'a pas admis un principe plus général avant.

(2) La réciproque est fautive.

(3) On pourrait aussi noter :

$$\sum_i \mathcal{F}(i \rightarrow S) = \mathcal{O}$$

(4) On note $\vec{\Sigma}$ le complémentaire de Σ .

2.2 Théorème d'un système soumis à 2 torseurs glisseurs

Exemple : Soit un solide S à l'équilibre, soumis à 2 forces :

On isole {S}.

On fait l'Inventaire des Actions Mécaniques Extérieures à {S} :

Rédaction 1 :

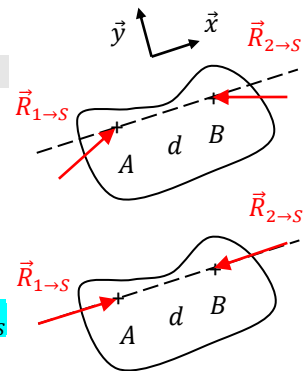
$$\vec{M}_{1 \rightarrow S} = A \begin{Bmatrix} \vec{R}_{1 \rightarrow S} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = B \begin{Bmatrix} \vec{R}_{1 \rightarrow S} \\ \vec{BA} \wedge \vec{R}_{1 \rightarrow S} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{M}_{2 \rightarrow S} = B \begin{Bmatrix} \vec{R}_{2 \rightarrow S} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

car $\vec{M}_{1 \rightarrow S}(B) = \vec{M}_{1 \rightarrow S}(A) + \vec{BA} \wedge \vec{R}_{1 \rightarrow S}$

On applique le Principe Fondamental de la Statique en B à {S} :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow S} + \vec{M}_{2 \rightarrow S} = \vec{0}$$

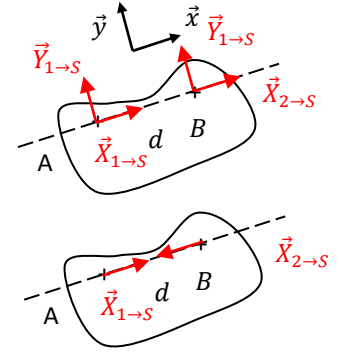
$$\Rightarrow B \begin{Bmatrix} \vec{R}_{1 \rightarrow S} + \vec{R}_{2 \rightarrow S} = \vec{0} \\ \vec{BA} \wedge \vec{R}_{1 \rightarrow S} = \vec{0} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} &\vec{R}_1 \text{ et } \vec{R}_2 \text{ sont de même direction, de même norme et sens contraire} \\ &\rightarrow \text{les deux droites d'actions sont identiques et passent par (AB)} \end{aligned}$$



Rédaction 2 :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow S} = \begin{cases} X_{1 \rightarrow S} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow S} \vec{y} \\ \vec{0} \end{cases} = \begin{cases} X_{1 \rightarrow S} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow S} \vec{y} \\ -d\vec{x} \wedge (X_{1 \rightarrow S} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow S} \vec{y}) \end{cases}$$

et $\vec{M}_{2 \rightarrow S} = \begin{cases} X_{2 \rightarrow S} \vec{x} + Y_{2 \rightarrow S} \vec{y} \\ \vec{0} \end{cases}$



On applique le Principe Fondamental de la Statique en B à {S} :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow S} + \vec{M}_{2 \rightarrow S} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_{1 \rightarrow S} + X_{2 \rightarrow S} = 0 \\ Y_{1 \rightarrow S} + Y_{2 \rightarrow S} = 0 \\ B \quad -d\vec{x} \wedge (X_{1 \rightarrow S} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow S} \vec{y}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{1 \rightarrow S} = -X_{2 \rightarrow S} \\ Y_{1 \rightarrow S} = -Y_{2 \rightarrow S} \\ Y_{1 \rightarrow S} = 0 \end{cases}$$

Conclusion :

donc $\vec{M}_{1 \rightarrow S} = -\vec{M}_{2 \rightarrow S} = \begin{cases} F \vec{x} \\ \vec{0} \end{cases}$ il n'y a plus qu'une inconnue, l'intensité de la force.

(1) *Exemple : bielle, corps de vérin + tige, roue avant de voiture...*
(avec l'hypothèse pesanteur négligé sur S)

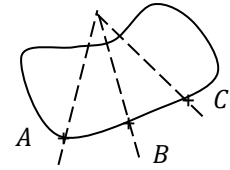
Si un système matériel $\Sigma^{(1)}$ est en **équilibre** soumis à **2 torseurs glisseurs** (c'est-à-dire 2 forces) alors les torseurs glisseurs sont **opposés**, autrement dit :

- les **résultantes** sont **opposées** (même direction, même norme, sens contraire) ;
- les **droites d'action** sont **identiques** et **passent par les points d'application**.

2.3 Théorème d'un solide soumis à 3 torseurs glisseurs

(2) Si elles sont parallèles, alors elles sont « concourantes en un point à l'infini ».

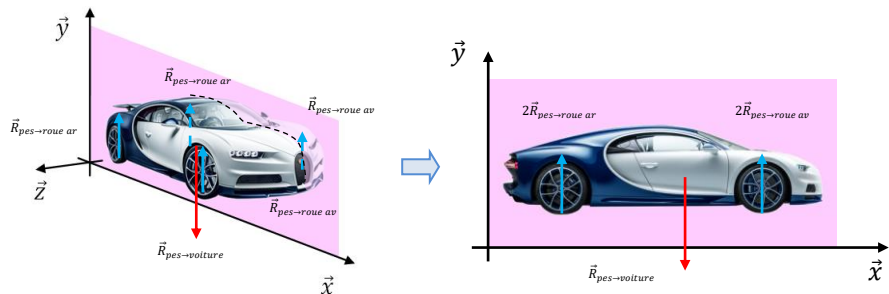
Si un solide est en équilibre et est soumis à 3 forces, alors ces forces sont coplanaires et de somme nul, de plus elles sont concourantes en un même point ou parallèles⁽²⁾ et la somme des moments est nulle.



2.4 Hypothèse problème plan

On peut admettre que l'on est face à un **problème plan** si :

- la **géométrie des liaisons** du mécanisme présente un **plan de symétrie** ;
- les résultantes sont **parallèles** au plan de symétrie ;
- les moments sont **perpendiculaires** au plan de symétrie.



Dans ce cas, les composantes qui correspondent à des actions mécaniques susceptibles de faire sortir les solides du plan sont **nulles**.

Problème plan (O, \vec{x}, \vec{y})	$\vec{M}_{1 \rightarrow 2} = \begin{cases} X_{1 \rightarrow 2} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ L_{1 \rightarrow 2} \vec{x} + M_{1 \rightarrow 2} \vec{y} + N_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \end{cases} = \begin{cases} X_{1 \rightarrow 2} \vec{x} + Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y} \\ N_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \end{cases}$
---------------------------------------	---

L'hypothèse de problème plan permet de simplifier l'écriture des torseurs et d'alléger la mise en œuvre du Théorème de l'équilibre.
Seules 3 équations scalaires seront issues du PFS (au lieu de 6) : 2 pour les résultantes et 1 pour le moment.

Liaisons modélisables par des torseurs glisseurs

Les actions mécaniques transmissibles dans les liaisons **sphérique**, **sphère-cylindre** et **sphère-plan** sont toujours modélisables par des **torseur glisseur** (force).

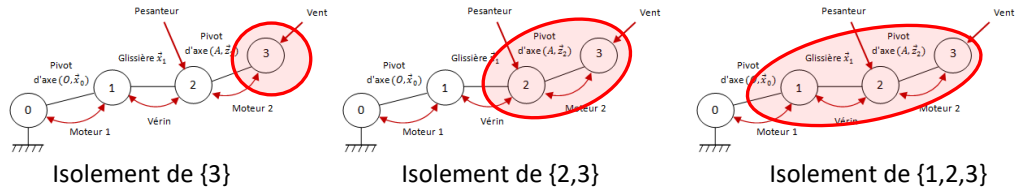
Avec l'**hypothèse problème plan**, il faut y rajouter les liaisons **pivot**, **pivot glissant** et **cylindre-plan** dont l'axe est perpendiculaire au plan.

2.5 Méthodologie pour une étude statique

(1) On n'isole jamais le bâti.

- dessiner le **graphe de structure** ;
- réaliser les **figures de changement de base** ;
- **représenter** des forces et distances sur le schéma cinématique.
- Définir un **isolement**⁽¹⁾ :
 - Dans une chaîne ouverte, isoler l'extrémité de la chaîne ouverte en conservant l'actionneur à dimensionner comme action extérieure.
 - Dans une chaîne fermée, isoler les ensembles de solides soumis à deux forces (bielle, vérin, roue non-motrice, bouée...) puis isoler un ensemble de solides qui permet de relier les actions mécaniques extérieures aux actions mécaniques à déterminer (liaison ou actionneur).
- lister les **hypothèses** (problème plan, liaison parfaite, pesanteur négligée...) ;
- faire l'**Inventaire des Actions Mécaniques Extérieures**, en écrivant leur torseur, et en tenant compte des hypothèses ;
- appliquer le **TRS/TMS/PFS** afin d'éliminer les inconnues ou utiliser sans démonstration les résultats concernant les solides soumis à deux glisseurs ;
- **résoudre** le système d'équations ;
- **application numérique** et comparaison au CdCF.

Exemple de stratégie d'isolement : chaîne ouverte à 3 degrés de liberté



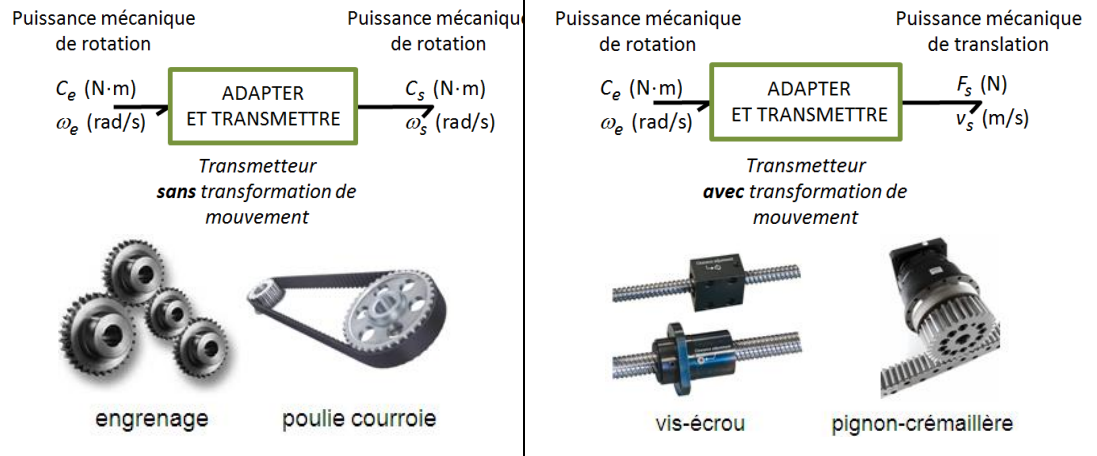
AM à déterminer	Isolement	Théorème	Projection	Résultat
Moteur 2	{3}	Théorème du moment statique en A $\vec{M}_{\vec{3} \rightarrow 3}(A) \cdot \vec{z}_2 = 0$	sur \vec{z}_2	$\vec{M}_{\text{mot } 2}^{\text{2} \rightarrow 3}(A) = f(\vec{R}_{\text{vent} \rightarrow 3})$
Vérin	{2,3}	Théorème de la résultante statique $\vec{R}_{\vec{2} \rightarrow 3} + \vec{R}_{\vec{2} \rightarrow 2} + \vec{R}_{\vec{2} \rightarrow 3} \cdot \vec{x}_1 = 0$	sur \vec{x}_1	$\vec{R}_{\text{vér}}^{\text{1} \rightarrow 2} = f(\vec{R}_{\text{vent} \rightarrow 3}, \vec{R}_{\text{pes} \rightarrow 2})$
Moteur 1	{1,2,3}	Théorème du moment statique en O $\vec{M}_{\vec{1} + \vec{2} + \vec{3} \rightarrow 1 + 2 + 3}(O) \cdot \vec{x}_0 = 0$	sur \vec{x}_0	$\vec{M}_{\text{mot } 1}^{\text{0} \rightarrow 1}(O) = f(\vec{R}_{\text{vent} \rightarrow 3}, \vec{R}_{\text{pes} \rightarrow 2})$

3 Loi entrée-sortie en effort

3.1 Loi entrée-sortie en effort d'un transmetteur

Généralement, les transmetteurs usuels (engrenages, poulie-courroie, vis-écrou...) sont entraînés par un actionneur rotatif (moteur, ...) qui exerce un couple C_e . La pièce d'entrée du transmetteur tourne alors à la vitesse ω_e par rapport au bâti.

En sortie, selon que le transmetteur ait transformé le mouvement ou pas, ce dernier exercera une force F_s ou un couple C_s . La pièce de sortie avancera à la vitesse V_s ou tournera à la vitesse ω_s par rapport au bâti.



Une loi entrée-sortie en effort caractérise le comportement en effort du composant de la chaîne de puissance, elle en est le modèle en effort.

Exemples pour les transmetteurs usuels :

$$C_s = f(C_e) \text{ ou } F_s = f(C_e)$$

(1) Si on néglige les pertes, alors $\frac{|P_s|}{|P_e|} = 1$

Dans le cas général, en régime permanent :

$$\frac{|P_s|}{|P_e|} = \eta \quad (1)$$

3.2 Hypothèses

La loi entrée-sortie en effort des transmetteurs usuels peut se déterminer rapidement à partir de leur **loi entrée-sortie cinématique, dans les conditions suivantes** :

- **fonctionnement en régime permanent**, c'est-à-dire lorsque l'actionneur tourne à vitesse constante ;
- **liaisons parfaites** entre les pièces qui constituent le transmetteur, pas de phénomènes dissipatifs (frottement sec ou visqueux) ;
- **action de la pesanteur** sur les pièces qui constituent le transmetteur, et **action interne de ressorts... négligeables** devant les autres actions mécaniques mises en jeu.

3.3 Loi entrée-sortie des transmetteurs usuels sans transformation de mouvement

Transmetteurs train d'engrenages, poulies-courroie crantée, pignons-chaîne

Loi entrée-sortie cinématique : $|\omega_s| = r |\omega_e|$ avec r le rapport de transmission

Loi entrée-sortie en effort : $|C_s| = \frac{\eta}{r} |C_e|$

Un réducteur diminue la vitesse de rotation et augmente le couple.

3.4 Loi entrée-sortie des transmetteurs usuels avec transformation de mouvement

Transmetteur pignon-crémaillère

$$\begin{matrix} 2\pi \rightarrow 2\pi R \\ \theta \rightarrow x \end{matrix} \quad \text{donc} \quad |x| = \frac{2\pi R}{2\pi} |\theta|$$

Loi entrée-sortie cinématique : $|V_s| = R|\omega_e|$

Loi entrée-sortie en effort : $|F_s| = \frac{1}{R}\eta|C_e|$

Transmetteur vis-écrou

$$\begin{matrix} 2\pi \rightarrow pas \\ \theta \rightarrow x \end{matrix} \quad \text{donc} \quad |x| = \frac{pas}{2\pi} |\theta|$$


Loi entrée-sortie cinématique : $|V_s| = \frac{pas}{2\pi} |\omega_e|$

Loi entrée-sortie en effort : $|F_s| = \frac{2\pi}{pas}\eta|C_e|$

4 Modélisation des AM avec frottement

4.1 Phénomène de frottement

(2) La science du frottement s'appelle la tribologie.

(3)  Expérience et animation sur le frottement :

<https://sciencesindustrielles.com/glossary/frottement/>

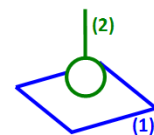
4.2

Modélisation globale des AM sans frottement

Concernant les solides, le mouvement relatif est à observer au niveau du contact entre ces éléments, il est donc nécessaire de se placer au niveau local, au niveau d'un point de contact.

On rappelle la forme du torseur des actions mécaniques transmissibles dans le cas d'une **liaison sphère-plan parfaite** de centre I et de normale \vec{z} :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2} = I \begin{Bmatrix} \vec{N}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = I \begin{Bmatrix} N_{1 \rightarrow 2} \vec{n} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$



Dans le cas d'une hypothèse de problème plan, le torseur des actions mécaniques transmissibles dans une liaison cylindre-plan a la même forme.

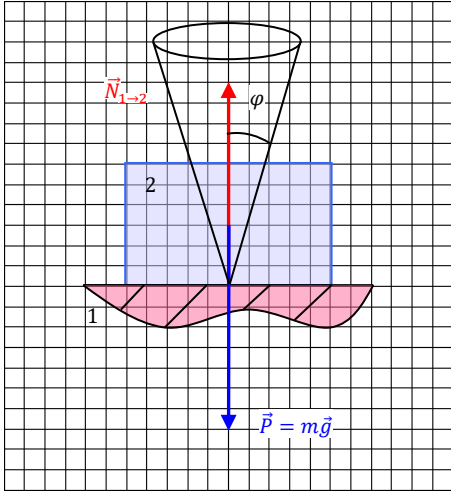
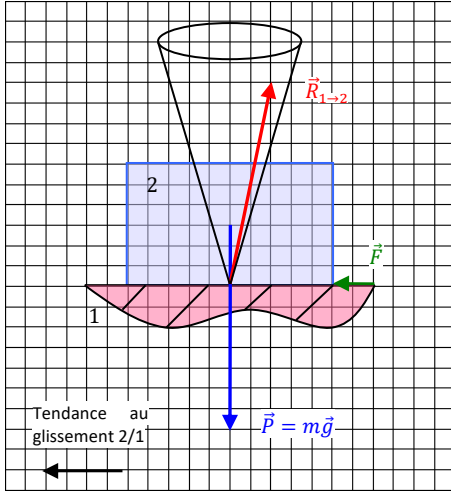
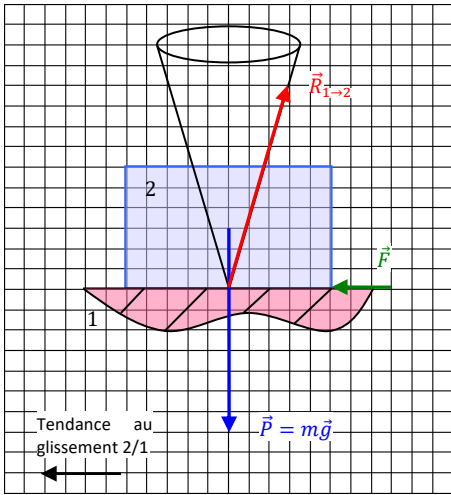
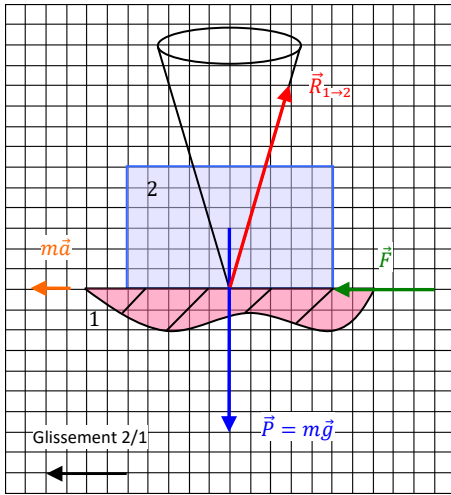


4.3 Modélisation globale des AM avec frottement

Résistance au glissement : Modèle de Coulomb

Exemple : Soit 2 solides en contact. On applique une force \vec{F} de norme de plus en plus importante sur le solide 2 avec comme objectif de le faire glisser. On prendra $f = 0,3$ et une échelle de $10\text{ N} = 1\text{ carreau}$.

(1) Parler de "tendance au glissement" présuppose déjà d'avoir résolu l'étude de manière intuitive, c'est donc une erreur de raisonnement. Cependant dans un souci de simplification nous utiliserons ce vocabulaire.

On pose 2 sur 1	On pousse faiblement avec $F = 20\text{ N}$
ADHÉRENCE avec frottement	ADHÉRENCE avec frottement Tendance au glissement ⁽¹⁾
	
$\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} = N_{1 \rightarrow 2} \vec{n}$ $\vec{R}_{1 \rightarrow 2} \text{ est à l'INTERIEUR du cône d'adhérence}$	$\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2} = N_{1 \rightarrow 2} \vec{n} + T_{1 \rightarrow 2} \vec{t}$ <p>avec $T_{1 \rightarrow 2} < f N_{1 \rightarrow 2}$ et $f = \tan(\varphi)$</p> $\vec{R}_{1 \rightarrow 2} \text{ est à l'INTERIEUR du cône d'adhérence}$ $\vec{T}_{1 \rightarrow 2} \text{ s'oppose à la tendance au glissement 2/1}$
On pousse davantage avec $F = 30\text{ N}$	On pousse davantage avec $F = 50\text{ N}$
ADHÉRENCE avec frottement Limite du glissement	GLISSEMENT avec frottement
	
$\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2} = N_{1 \rightarrow 2} \vec{n} + T_{1 \rightarrow 2} \vec{t}$ <p>avec $T_{1 \rightarrow 2} = f N_{1 \rightarrow 2}$ et $f = \tan(\varphi)$</p> $\vec{R}_{1 \rightarrow 2} \text{ est SUR le cône d'adhérence}$ $\vec{T}_{1 \rightarrow 2} \text{ s'oppose à la tendance au glissement 2/1}$	$\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2} = N_{1 \rightarrow 2} \vec{n} + T_{1 \rightarrow 2} \vec{t}$ <p>avec $T_{1 \rightarrow 2} = f N_{1 \rightarrow 2}$ et $f = \tan(\varphi)$</p> $\vec{R}_{1 \rightarrow 2} \text{ est SUR le cône d'adhérence}$ $\vec{T}_{1 \rightarrow 2} \text{ s'oppose au glissement de 2/1}$

On constate expérimentalement que la composante tangentielle atteint un maximum et **sature**. Afin de modéliser le phénomène de frottement on construit le **modèle de Coulomb**.

Soient deux solides 1 et 2 en contact ponctuel au point P et ayant une tendance au glissement ou un glissement relatif. La résultante de l'action mécanique de 1 sur 2 au point P s'écrit :

$$\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2} = N_{1 \rightarrow 2} \vec{n} + T_{1 \rightarrow 2} \vec{t}$$

- $\vec{N}_{1 \rightarrow 2}$ est la **composante normale** de l'effort de contact de 1 sur 2 ;
- $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ est la **composante tangentielle** de l'effort de contact de 1 sur 2. C'est cette composante qui modélise la **résistance au glissement**.

ADHÉRENCE	GLISSEMENT
<p style="text-align: center;">$T_{1 \rightarrow 2} < f N_{1 \rightarrow 2}$</p>	<p style="text-align: center;">$T_{1 \rightarrow 2} = f N_{1 \rightarrow 2}$</p>

Loi de Coulomb : $|T_{1 \rightarrow 2}| \leq f |N_{1 \rightarrow 2}|$

- f le coefficient de frottement [sans dimension] avec $f = \tan(\varphi)$.
- φ le demi-angle au sommet du cône de frottement.

La force résultante $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ ne sort jamais du cône de frottement.

Elle est à l'**intérieur** du cône en cas d'**adhérence**.

Elle est **sur le cône** en cas de **glissement**.

Coefficient de frottement

Matériaux en contact	Coefficient de frottement f		Exemples d'utilisation
	Nature du frottement		
	à sec	lubrifié	
Acier / Acier	0,15 à 0,20	0,10	Variateur à friction
Acier / Bronze	0,15	0,10	Roue-vis, coussinet
Acier / Caoutchouc	0,25 à 0,45		Poulie-courroie
Acier / garnitures	0,20 à 0,50		Frein, embrayage
Caoutchouc / Goudron	0,8	0,5	Pneumatique

La valeur du **coefficient de frottement** dépend, par ordre d'importance décroissant :

- du **couple de matériaux** ;
- de la **lubrification** ;
- de la rugosité des surfaces ;
- de la température.

La valeur du coefficient de frottement ne dépend pas :

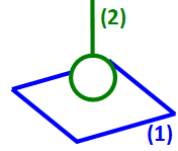
- de la forme et l'aire de la surface de contact ;
- de l'intensité de l'effort normal.

Résolution

Dans le système d'équations issue du PFS, on a ajouté une inconnue $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$. On ne peut pas résoudre sans ajouter une équation.

On fera souvent l'hypothèse que l'on se trouve à la limite du glissement, on ajoute ainsi une équation de comportement.

Ainsi la forme du torseur des actions mécaniques transmissibles dans le cas d'une liaison sphère-plan non parfaite de contact I et de normale \vec{z} où la tendance au glissement se fait suivant \vec{y} est :



$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2} = I \left\{ \begin{array}{l} \vec{T}_{1 \rightarrow 2} + \vec{N}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{array} \right. = I \left\{ \begin{array}{l} Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y} + Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right. \quad (1)$$

Avec $|Y_{1 \rightarrow 2}| \leq f |Z_{1 \rightarrow 2}|$, le sens de la tendance au glissement de 2/1 donnera le signe de $Y_{1 \rightarrow 2}$.

Dans le cas d'une hypothèse de problème plan, le torseur des actions mécaniques transmissibles dans une liaison cylindre-plan de ligne de contact perpendiculaire au plan et de normale \vec{z} où la tendance au glissement se fait suivant \vec{y} , a la même forme.

Phénomène d'arc-boutement

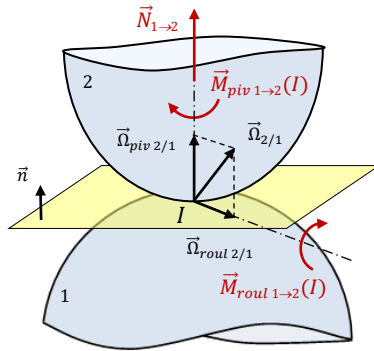
On appelle **arc-boutement**, le phénomène issu du frottement pour lequel un équilibre subsiste indépendamment de l'intensité de l'effort qui tend à le rompre.

On appelle **coincement**, le phénomène issu du frottement pour lequel un équilibre persiste alors que la même cause de l'équilibre a disparu.

Modélisation des AM de résistance au roulement et au pivotement

Le raisonnement effectué pour le glissement peut être appliqué au roulement et au pivotement.

Soit I un point de contact entre deux solides 1 et 2. Selon les cas, l'action mécanique de $1 \rightarrow 2$ est modélisée en I , par le torseur suivant :



Par analogie avec les lois de Coulomb :

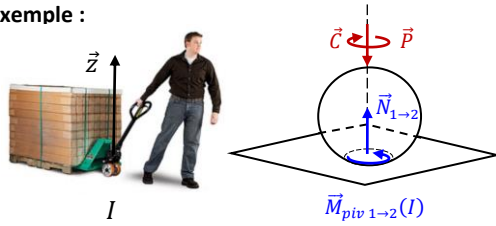
- le **roulement** ou la tendance au roulement donnera naissance à une **résistance au roulement** modélisée par un **moment de résistance au roulement** ;
- le **pivotement** modélisée par un **moment de résistance au pivotement**

Pivotement ou tendance au pivotement	Roulement ou tendance au roulement
$\vec{M}_{1 \rightarrow 2} = I \left\{ \begin{array}{l} \vec{N}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{piv 1 \rightarrow 2}(I) \end{array} \right.$	$\vec{M}_{1 \rightarrow 2} = I \left\{ \begin{array}{l} \vec{N}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{roul 1 \rightarrow 2}(I) \end{array} \right.$
<p>$\vec{M}_{piv 1 \rightarrow 2}(I)$ est le moment de résistance au pivotement en I.</p>	<p>$\vec{M}_{roul 1 \rightarrow 2}(I)$ est le moment de résistance au roulement en I.</p>
<ul style="list-style-type: none"> - Il s'oppose au pivotement ou à la tendance au pivotement de 2/1. - Il est dirigé suivant la normale au contact. - $\ \vec{M}_{piv 1 \rightarrow 2}(I)\ \leq \delta \ \vec{N}_{1 \rightarrow 2}\$ 	<ul style="list-style-type: none"> - Il s'oppose au roulement ou à la tendance au roulement de 2/1 - Il est contenu dans le plan tangent au niveau du contact - $\ \vec{M}_{roul 1 \rightarrow 2}(I)\ \leq \eta \ \vec{N}_{1 \rightarrow 2}\$

(1) La direction de la composante de résistance au glissement dépend de la direction de la tendance au glissement de 2/1.

Avec δ , le **coefficient de résistance au pivotement** en $[m]$.

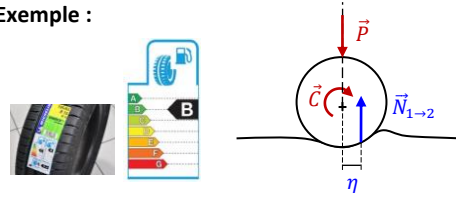
Exemple :



En phase de virage avec ce chariot de manutention, il existe un moment de résistance au pivotement du sol sur la roue autour de (I, \vec{z}) qui s'oppose à l'action mécanique fournie par l'utilisateur pour orienter la roue directrice.

Avec η **coefficient de résistance au roulement** en $[m]$

Exemple :



Parmi les critères à étudier lors de l'achat de pneumatique pour sa voiture, il y a l'indice de résistance au roulement. Plus celui-ci est bon, plus la consommation de carburant sera faible.

On notera enfin que les phénomènes de **résistance au glissement**, au **pivotement** et au **roulement** peuvent se **combinaer** et être rencontrés dans une même étude.

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2} = I \left\{ \begin{array}{l} \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{piv\ 1 \rightarrow 2}(I) + \vec{M}_{roul\ 1 \rightarrow 2}(I) \end{array} \right.$$

5 Modélisation locale des AM

5.1 AM à distance et de contact

On distingue les actions mécaniques à distance et de contact.

Les **actions mécaniques à distance** agissent sur tout le volume du solide.

Exemples : actions magnétiques, action de la pesanteur...

Les **actions mécaniques de contact** agissent directement sur la surface du solide.

Exemples : pression d'un fluide, pression de contact entre deux solides...

Une **action** mécanique de $i \rightarrow j$ est toujours répartie sur la surface (action de contact) ou sur le volume (action à distance) du solide j , contrairement à ce que pouvait laisser croire le modèle utilisé jusqu'à maintenant (action appliquée en un point).

La **modélisation locale** permettra donc de **modéliser finement** ces actions à distances et ces actions de contact⁽¹⁾.

Le point de vue local concerne le modèle proposé pour un point. L'expression de la force élémentaire $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ varie en fonction de la nature du contact, associé à P :

Nature du domaine	Élément géométrique différentiel	Nom	Unité	Force élémentaire $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$
Point	1	Force F	$[N]$	\vec{F}
Ligne	dl	Force linéique p	$[Nm^{-1}]$	$\vec{p}dl$
Surface	dS	Force surfacique p	$[Pa] = [Nm^{-2}]$	$\vec{p}dS$
Volume	dV	Force volumique q	$[Nm^{-3}]$	$\vec{q}dV$

L'ensemble des forces élémentaires agissant sur l'ensemble des éléments concerné par l'action mécanique est appelé **champ de forces** associé à l'action mécanique.

C'est la connaissance de ce champ de forces qui peut permettre d'étudier les déformations d'un solide soumis à une action mécanique.

(1) Cette modélisation est aussi nécessaire pour la prise en compte des résistances au glissement.

5.2 Modèle local d'une AM à distance

Soit P, un point appartenant à un solide 2 et concerné par une action mécanique à distance. On modélise localement l'action mécanique à distance par une **force élémentaire** $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ agissant sur un volume dV de dimension réduite défini au voisinage de P, telle que : $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{q} dV$.

L'action mécanique local de la pesanteur sur un solide 1 :

$$d\vec{F}_{ter \rightarrow 1} = -dm g \vec{z} = -\rho g dV \vec{z} \quad \forall P \in 1$$

5.3 Modèle local d'une AM de contact

Soit P, un point appartenant à un solide 2 et concerné par une action mécanique de contact. On modélise localement l'action mécanique de contact par une **force élémentaire** $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ agissant sur une ligne dl ou une surface dS de dimension réduite défini au voisinage de P, telle que :

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = d\vec{N}_{1 \rightarrow 2} + d\vec{T}_{1 \rightarrow 2} = dN_{1 \rightarrow 2} \vec{n} + dT_{1 \rightarrow 2} \vec{t} \quad (1)$$

où :

- $d\vec{N}_{1 \rightarrow 2}$ est la **force élémentaire de pression** normale au plan de contact ;
- $d\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ est la **force élémentaire de résistance au glissement** appartenant au plan tangentiel de contact : $|dT_{1 \rightarrow 2}| \leq f |dN_{1 \rightarrow 2}|$.

(1) Pour l'action de contact d'un fluide sur un solide en statique, on n'a pas de composantes tangentielles.

En revanche en mécanique des fluides pour l'écoulement d'un fluide, oui. Mais c'est hors programme.

Phénomènes d'adhérence et de glissement

On distingue plusieurs cas :

(2) avec $N_{j \rightarrow i} \geq 0$.

	sans FROTTEMENT	avec FROTTEMENT
ADHERENCE $\vec{V}_{i/j}(I) = \vec{0}$ (absence de mouvement relatif)		On pose : $d\vec{F}_{j \rightarrow i} = dN_{j \rightarrow i} \vec{n} + dT_{j \rightarrow i} \vec{t}$ avec $ dT_{j \rightarrow i} < f dN_{j \rightarrow i} \quad (2)$ On ne sait pas toujours résoudre l'exercice car on a ajouté une inconnue.
GLISSEMENT $\vec{V}_{i/j}(I) \neq \vec{0}$ (mouvement relatif)	On pose : $d\vec{F}_{j \rightarrow i} = dN_{j \rightarrow i} \vec{n} \quad (3)$	On pose : $d\vec{F}_{j \rightarrow i} = dN_{j \rightarrow i} \vec{n} + dT_{j \rightarrow i} \vec{t}$ avec $ dT_{j \rightarrow i} = f dN_{j \rightarrow i} \quad (3)$ On sait résoudre l'exercice car on a ajouté une équation et une inconnue. Cette composante tangentielle est : - colinéaire au vecteur vitesse de glissement : $dT_{j \rightarrow i} \vec{t} \wedge \vec{V}_{i/j}(I) = \vec{0}$ - de sens opposé au vecteur vitesse de glissement : $dT_{j \rightarrow i} \vec{t} \cdot \vec{V}_{i/j}(I) < 0$

(3) dans ce cours, on confondra coefficient de frottement d'adhérence f_a et coefficient de frottement de glissement f_g . qui auraient 2 valeurs légèrement différentes avec $f_g < f_a$.

5.4 Relation entre le modèle local et le modèle global

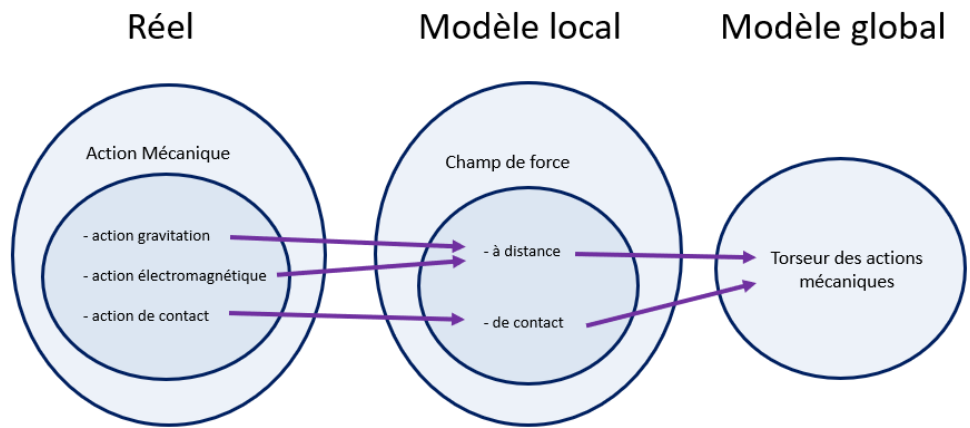
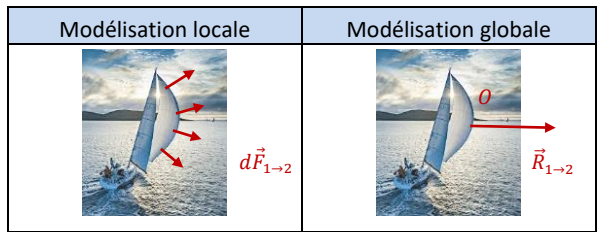
Dans le but d'appliquer le principe fondamental de la statique ou de la dynamique à un mécanisme, on fait l'hypothèse que les pièces qui les constituent, sont indéformables. Dans ce cas, on a intérêt à utiliser un modèle global des actions mécaniques comme cela a été fait jusqu'à maintenant.

Le **modèle global d'une action mécanique** est l'action équivalente à l'ensemble des actions locales.

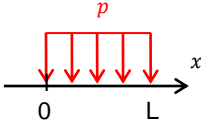
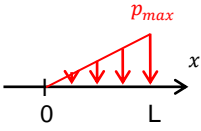
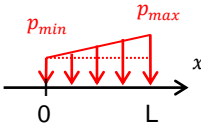
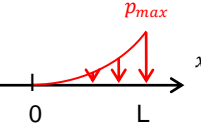
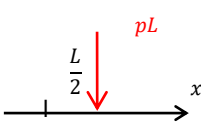
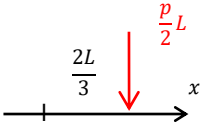
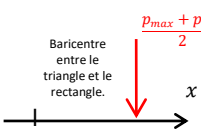
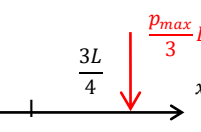
Soit une AM de 1 → 2 décrite du point de vue local sur un domaine $D^{(1)}$ par la force élémentaire $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$, le torseur des AM de 1 → 2 s'écrit :

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2} = A \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{1 \rightarrow 2}(A) \end{array} \right. = A \left\{ \begin{array}{l} \int_D d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ \int_D \vec{AP} \wedge d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right.$$

- (1) une ligne : \int
- une surface : \iint
- un volume : \iiint



Exemples de répartitions de pression

Pression constante	Pression linéaire	Pression affine	Pression quadratique
			
			
$p(x) = p$	$p(x) = \frac{p_{max}}{L} x$	$p(x) = \frac{p_{max} - p_{min}}{L} x + p_{min}$	$p(x) = \frac{p_{max}}{L^2} x^2$

QUESTIONS DE COURS

- donner l'expression d'un torseur d'AM ;
 - donner la relation du champ des moments d'un torseur ;
 - donner les expressions d'un torseur couple et d'un torseur glisseur ;
 - expliquer le calcul d'un moment par la méthode du bras de levier ;
 - donner le torseur des actions mécaniques de la pesanteur, d'un vérin, d'un moteur, d'un ressort et des liaisons pivot, glissière ;
 - donner les relations entre les différentes unités de pression ;
 - donner la démarche à utiliser pour une étude statique.
-
- donner le torseur de l'action mécanique transmissible dans la liaison ;
 - préciser le théorème d'un solide soumis à 2 actions mécaniques modélisables par des forces (torseurs glisseurs) ;
 - donner le nom des liaisons dont l'AM transmissible est modélisable par un torseur glisseur ;
 - donner la stratégie d'isolement à utiliser pour déterminer l'action fournie à l'effecteur de la chaîne de puissance d'un mécanisme en chaîne fermée ;
-
- quand peut-on admettre l'hypothèse « problème plan » ?
 - que se passe-t-il dans l'écriture d'un torseur quand on fait l'hypothèse problème plan ?
 - donner le nom des liaisons dont l'AM transmissible est modélisable par un torseur glisseur lors d'une hypothèse problème plan ;
-
- donner la stratégie d'isolement à utiliser pour déterminer les actions fournies aux effecteurs de chaque chaîne de puissance d'un mécanisme en chaîne ouverte ;
 - donner les hypothèses simplificatrices qui permettent de déterminer rapidement une première approximation de la loi entrée-sortie en effort ;
 - donner les lois entrée-cinématique et en effort des transmetteurs usuels (réducteur, pignon-crémaillère, vis-écrou).
-
- expliquer les phénomènes de frottement et d'adhérence ;
 - donner les lois de Coulomb pour une action mécanique de contact ponctuel ;
 - comment trouve-t-on le sens et la direction de la composante tangentielle de résistance au glissement de contact ?
 - modéliser les AM transmissibles dans une liaison sphère-plan avec prise en compte de la résistance au glissement ;
 - donner la notion d'arc-boutement ;
 - que vérifie comme loi un solide arc-bouté ?
 - modéliser les AM transmissibles dans une liaison sphère-plan avec prise en compte des résistances au pivotement et roulement.
-
- donner le modèle local d'une action mécanique à distance ;
 - donner le modèle local d'une action mécanique de contact linéique ou surfacique ;
 - donner la relation entre le modèle local et le modèle global.

Systeme à évènements discrets


(1) Systèmes du premier ou du 2^{ème} ordre
 (2) Echelon, rampe ou sinusoïde.

On a étudié plus tôt dans l'année la façon dont se comportaient les systèmes continus usuels⁽¹⁾ lorsqu'ils étaient soumis à des entrées, elles aussi usuelles⁽²⁾. Dans ce cours, on s'intéresse au comportement des systèmes à événement discrets (SED).

Les systèmes à événements discrets (SED) se définissent par opposition aux systèmes continus dont l'évolution est continue dans le temps et peut être décrite par des équations différentielles. Dans un SED, le passage d'un état à un autre est déclenché par des événements ponctuels. Contrairement aux systèmes continus où les informations traitées sont de nature analogique, les systèmes à événements discrets manipulent des informations logiques ou numériques.

Les SED sont le plus souvent séquentiels, c'est-à-dire que la ou les sorties dépendent de la combinaison des entrées et de l'état précédent des sorties

Exemple : télécommande de téléviseur

Un appui sur le bouton  entraîne soit l'allumage ou soit l'extinction du téléviseur.

Ainsi, dans la cas d'un SED séquentiels :

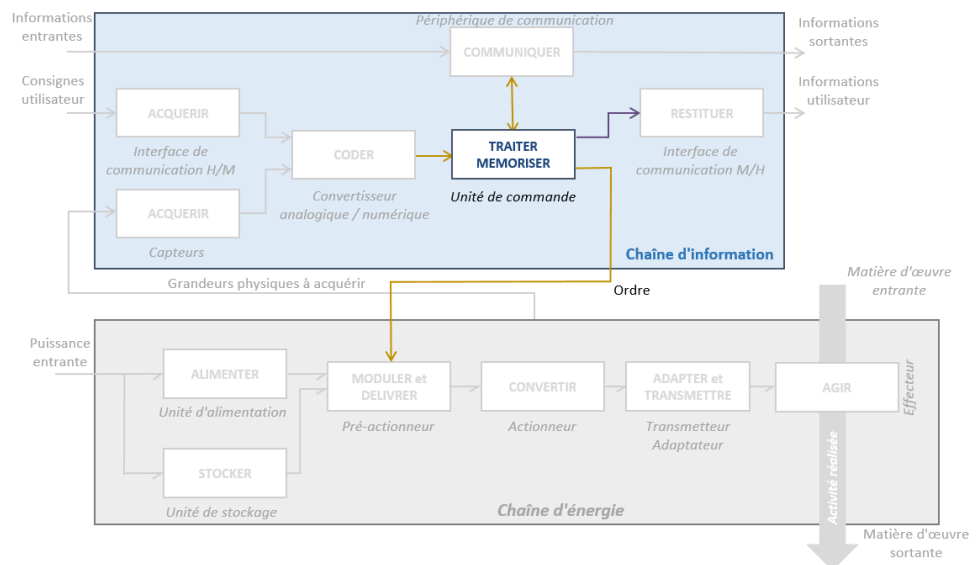
- une même cause (même combinaison des entrées) peut produire des effets différents ;
- le temps peut être une cause déclenchante ;
- l'effet peut persister si la cause disparaît.



Carte Arduino

L'unité de commande de ces systèmes à événements discrets est très souvent réalisée à partir de circuits logiques et de calculateurs.

Elle est programmée à partir de l'analyse d'un cahier des charges avec comme objectif, d'aboutir à un fonctionnement du système conforme aux attentes de ses utilisateurs.



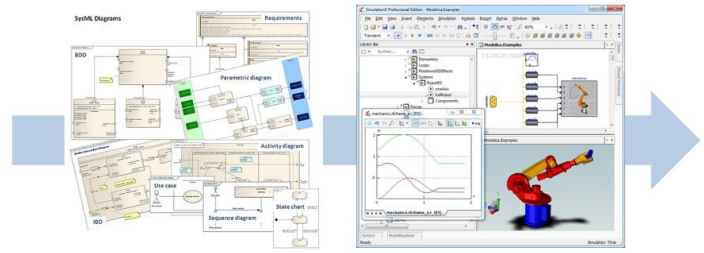
Unité de commande : fonction, entrée et sorties

Les **entrées** des SED sont des informations en provenance de l'IHM et des **capteurs**. Les **sorties** sont des **commandes** vers les **IMH** et les **réactionneurs** des différentes chaînes fonctionnelles.

Comme pour toutes les autres étapes de conception d'un nouveau système, il se révèle plus efficace techniquement et économiquement de modéliser la structure du programme et de la simuler, avant tout choix de langage de programmation et réalisation du programme.

Cette démarche structurée s'inscrit dans un contexte plus large d'ingénierie système.

Elle peut être mise en œuvre via le langage SysML et plus particulièrement grâce à l'utilisation des diagrammes d'état.



Ingénierie système : diagramme du langage SysML et logiciels de simulation associés

1 Diagramme d'état (stm)

1.1 Présentation

(1) Chaque bloc d'un bdd ou d'un ibd ne conduit pas nécessairement à un diagramme d'état.

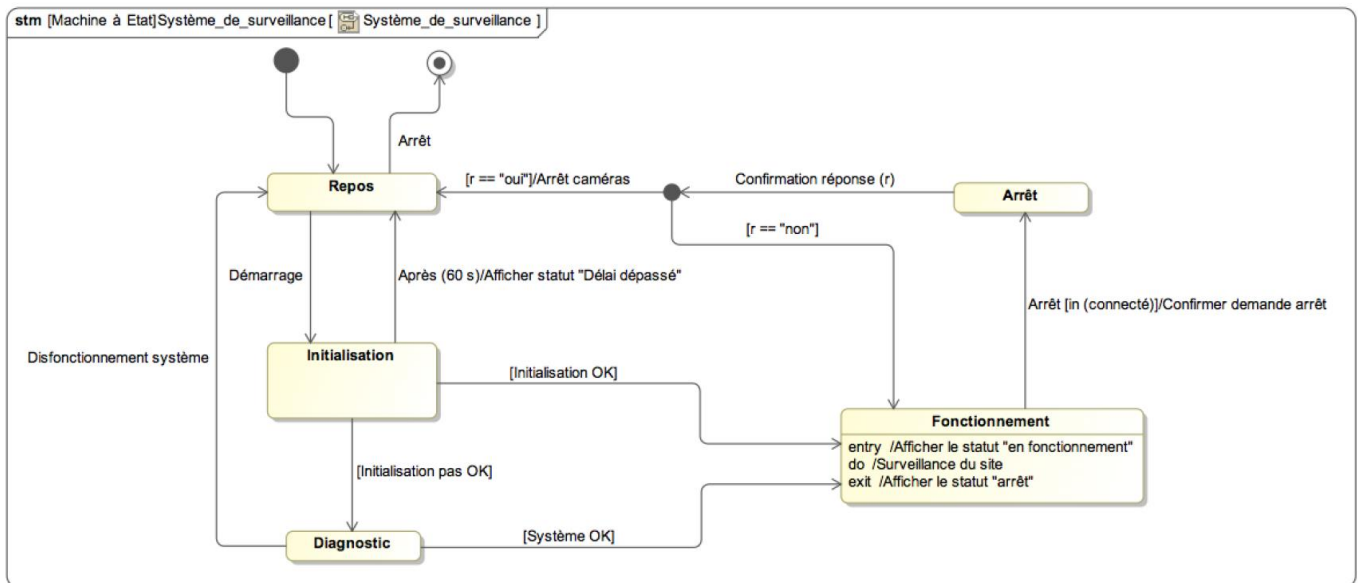
En langage SysML, un diagramme d'état (stm) est nécessairement associé à un bloc⁽¹⁾ du diagramme de définitions de blocs (bdd) ou du diagramme de blocs internes (ibd). Ce bloc peut être le système, un sous-système ou un composant.

Le **diagramme d'état** représente le **comportement** du système et ses changements d'état en fonction des interactions.

Exemple : dispositif de vidéo surveillance

Le diagramme ci-dessous décrit le fonctionnement d'un système de vidéo-surveillance. On y trouve :

- 5 états : *Repos*, *Initialisation*, *Diagnostic*, *Arrêt* et *Fonctionnement* ;
- des transitions entre les états, représentées par des flèches, et qui précisent sous quelles conditions le système passe d'un état à un autre.



On peut remarquer, avec cet exemple, que la représentation du **comportement** est en générale fonctionnelle dans les diagrammes d'état. Aucune information technique sur la manière dont sont transmises les informations, ni sur la façon dont sont réalisées les activités, n'est précisée.

1.2 État et ses activités associées

(1) Représenté graphiquement par un rectangle aux bords arrondis.

Un **état**⁽¹⁾ modélise une **phase du fonctionnement** du système.
Pendant cette période, l'état est dit **actif** et le système accomplit :
- une simple **activité** ;
- OU une séquence d'activités ;
- OU est **en attente**.
En dehors de cette période, l'état est dit **inactif**.

Par définition :

- il n'y a qu'**un seul état actif** à chaque instant ;
- un état possède un **titre unique** dans le diagramme.

Le lancement des activités à l'intérieur de l'état actif est organisé selon des mots réservés :

entry	Activité ayant une fin ⁽²⁾ , elle ne peut pas être interrompue . Elle est exécutée lors de l' activation de l'état .
do	Activités interruptibles . Elles sont exécutées dans l' ordre de leur écriture , à partir de l'instant où l'activité associée à entry est terminée.
exit	Activité ayant une fin ⁽²⁾ , elle ne peut pas être interrompue . Elle est exécutée lors de la désactivation de l'état , à l'instant de la sortie de l'état.

TITRE

Entry / activité1
Do / activité2
Exit / activité3

(2) En général une activité instantanée : allumer un voyant, incrémenter un compteur, éteindre un voyant...

Remarques :

- les trois comportements **entry**, **do** et **exit** ne peuvent être **utilisés qu'une seule fois par état**, mais il est également possible de n'en **utiliser qu'une partie** (seulement **entry** par exemple) ;
- si **aucun mot** réservé n'est utilisé, cela correspond à un **do** ;
- un **état vide** (sans activité) indique un **état d'attente** ;

1.3 Franchissement des transitions

Une fois recensés tous les états d'un système, il faut ensuite en modéliser ses évolutions en identifiant les conditions de changement d'état.

(3) Représentée graphiquement par une flèche.

Une **transition**⁽³⁾ modélise la possibilité d'un **passage** instantané d'un **état** vers un **autre**.

On appelle **état source** l'état de départ d'une transition, et **état cible** l'état d'arrivée d'une transition

La **transition** :

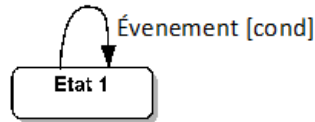
- est **instantanée** ;
- n'est évaluée que si l'état source est actif.

Son **franchissement** est **conditionné** par des **événements déclencheurs** et des **conditions de garde**.

Ces événements et conditions de franchissement ainsi que l'éventuel effet associé à la transition sont indiqués le long de la flèche qui la symbolise suivant la notation :

événement [garde] / effet





Une transition réflexive entraîne une sortie de l'état puis un retour dans ce même état, avec appel des éventuelles activités *exit* et *entry*.

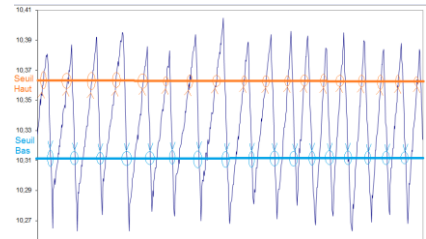
1.4 Evènement

(1) Sur le front montant.

Un **évènement** correspond au changement d'état d'une variable observée. Il est **daté** dans le temps et il est **traité instantanément** lors de son **occurrence**⁽¹⁾ (apparition).

Exemples :

Appui sur un bouton, arrivée en fin de course d'un mécanisme, dépassement d'une valeur seuil...



Un **évènement** n'est **jamais mémorisé** et est donc perdu s'il ne mène à aucune évolution du diagramme d'état.

Il est possible d'utiliser des variables internes (compteurs ou horloge) pour spécifier un évènement déclencheur :

when Se déclenche lors du changement d'état d'une valeur interne au diagramme d'état. Il permet par exemple d'utiliser un compteur : *when(N=3)*.

after (T) se déclenche après une durée T passé dans l'état d'amont. Il permet de réaliser une temporisation.

at (D) se déclenche à la date D dans un référentiel de temps dont l'origine correspond généralement au démarrage du fonctionnement du système.

(2) Ces activités doivent donc avoir une fin.

Si une **transition** n'a **pas d'évènement** spécifié, l'**évènement** déclencheur **implicite** est la fin des **d'activités**⁽²⁾ liées au **do de l'état source**.

1.5 Garde

(3) Vrai ou faux, généralement notée 1 ou 0.

La **garde** est une **condition de franchissement** de la transition. C'est une condition logique⁽³⁾ évaluée à l'instant de l'évènement déclencheur.

Contrairement à l'évènement qui, lui, est localisé dans le temps, la garde traduit une condition qui dure dans le temps et qui doit persister.

Exemple :

Pour un bouton :

- l'évènement est associé à l'instant où le bouton est enfoncé ;
- la garde est associé à l'état du bouton : enfoncé ou non.



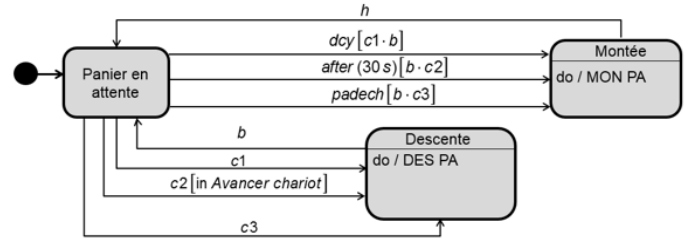
Si une **garde** n'est **pas présente** le long d'une transition, elle est **considérée** comme toujours **vraie**.

La syntaxe d'une condition de garde vérifiant si l'état TOTO est actif est : **[in TOTO]**.

(1) On verra en pratique que cette règle n'est pas toujours respectée dans les diagrammes d'état rencontrés.

Equation logique

La condition **logique** évaluée pour la garde peut-être le résultat d'une combinaison de l'état de plusieurs grandeurs logiques, on parle alors du résultat d'une équation logique.



Dans ce type d'équation, on utilise des opérateurs logiques selon les règles de l'algèbre de BOOLE. Ces 4 opérateurs logiques sont : **OUI**, **NON**, **OU**, **ET**. Ils permettent de réaliser les opérations de base :

(2) Remarque : le symbole = ne traduit pas une égalité mais une identité d'état (0 ou 1, Vrai ou Faux).

Entrées : a et b résultat : S ⁽²⁾			
OUI	notée $S = a$	<i>qui donne à S la valeur 1 si et seulement si</i>	$a = 1$
NON (appelé aussi « complément »)	notée $S = \bar{a}$		$a = 0$
OU (appelé aussi « somme logique »)	notée $S = a + b$		$a = 1$ OU $b = 1$
ET (appelé aussi « produit logique »)	notée $S = a \cdot b$		$a = 1$ ET $b = 1$

L'opérateur logique **OU** correspond à un montage en **parallèle**.
L'opérateur logique **ET** correspond à un montage en **série**.

1.6 Effet

Un **effet** est une **activité** accomplie lorsque la **transition est franchie**.

Les activités associées aux effets sont considérées instantanées, par exemple on peut définir une variable /N=1

Une transition peut ne pas avoir d'effet associé.

1.7 Pseudos-états

Un **pseudo-état** est un état ne pouvant **pas** avoir d'**activité**.

Ils servent essentiellement comme éléments de liaison et pour indiquer l'état initial ou l'arrêt du diagramme d'état.

1.8 Pseudo-état initial ●→

Unique et obligatoire, il est activé au **lancement** de la machine à états et marque le début de l'exécution du diagramme d'état. Il n'a aucune transition entrante.

Pseudo-état final →⊙

Optionnel⁽³⁾, il signe la **fin de l'exécution du diagramme d'état**. Il n'a aucune transition sortante.

(3) Il peut y en avoir plusieurs car différents scénarios peuvent être possibles pour mettre fin à un diagramme d'état.

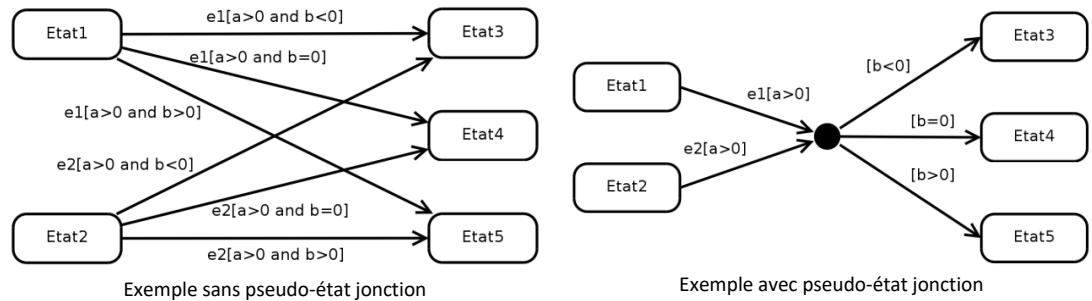
1.10 Pseudo-état jonction ●

Utilisé pour **regrouper** (« factoriser ») des **conditions de franchissement de transition**, en particulier des gardes communes à un événement.

Il permet de partager des segments de transition et d'aboutir à une notation plus lisible des chemins alternatifs.

L'évaluation des **conditions de garde** en **aval** du pseudo-état est réalisée **avant** qu'il ne soit atteint.

Exemples : pseudo-état jonction



1.11 Pseudo-état décision

Utilisé pour une sélection ou une convergence de séquences exclusives.

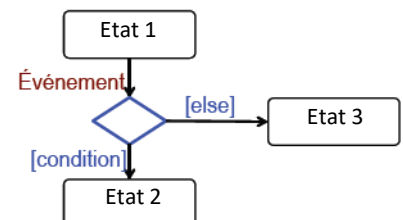
L'évaluation des **conditions de garde** en **aval** du pseudo-état est réalisée **au moment**⁽¹⁾ où il est atteint.

Les **conditions de gardes** doivent être **exclusives**.

L'utilisation d'une clause `[else]` est recommandée après un pseudo-état décision, car elle garantit un modèle correct en englobant tout ce qui n'est pas décrit dans les autres expressions logiques et en assurant ainsi qu'un moins un segment en aval est franchissable.

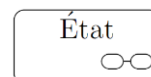
Exemple :

Ci-contre, dès que l'événement apparaît, le pseudo-état décision est atteint. Si la condition est vraie, c'est l'état 2 qui devient actif, sinon, c'est l'état 3.



1.12 État composite

Un **état composite** décrit les **évolutions internes** d'un **état** à l'aide d'un **autre diagramme d'état**.

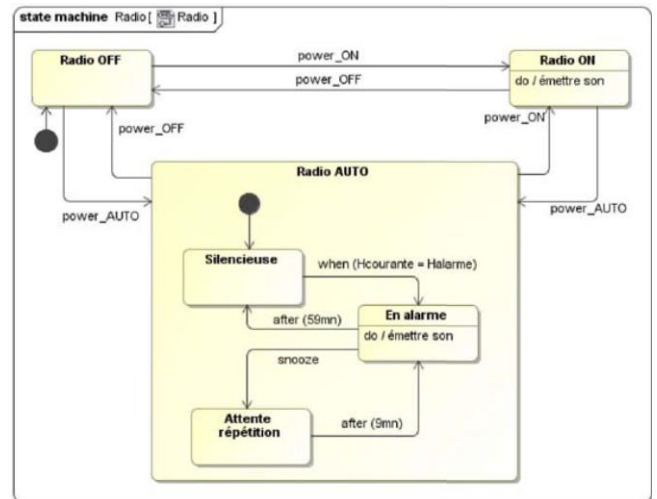
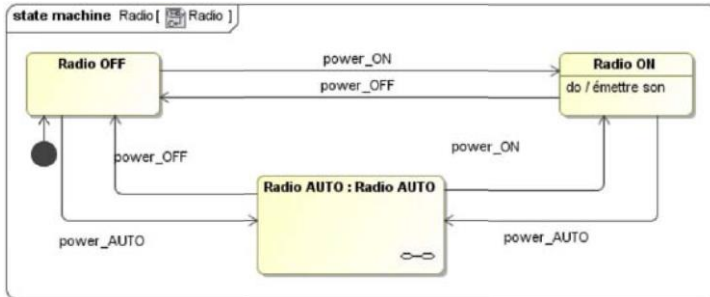


Pour repérer un état composite, un signe symbolisant des lunettes est apposé sur l'état.

Cette structure qui englobe plusieurs sous-états exclusifs considérés comme *hiérarchiquement inférieur* au diagramme principal, permet de rendre ce dernier plus lisible en entrant séparément dans le détail des évolutions internes du système.

(1) Contrairement au pseudo-état jonction.

Exemple : radio-réveil



Une transition qui atteint la bordure d'un état composite est équivalente à une transition qui atteint l'état initial de sa région interne.

Une transition qui sort de la bordure d'un état composite est équivalente à une transition qui sort de tous les états de sa région interne.

1.13 Historique d'un état composite

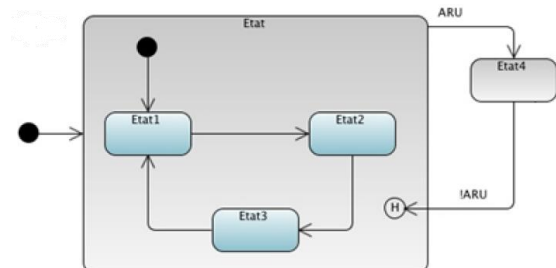
L'état actif au moment de la sortie d'un état composite peut être mémorisé par l'indication historique.

(H)

Lors de la réactivation de l'état composite, celui-ci se réactive à cet état.

Exemple :

L'historique est utilisé ici pour permettre à un système de recommencer en cours de cycle lors du redémarrage après un appui sur l'arrêt d'urgence (ARU).



1.14 État composite orthogonal

Dans un état composite orthogonal, plusieurs diagrammes d'états peuvent évoluer **simultanément** dans des régions séparées par des pointillés.

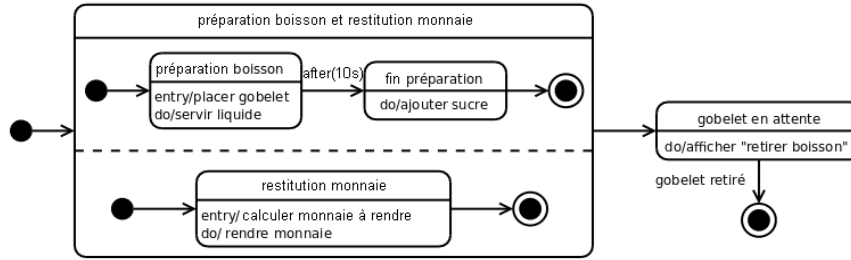
Les différentes régions de l'état orthogonal fonctionnent en **parallèle** sans aucune influence les unes sur les autres⁽¹⁾.

Une transition qui atteint la bordure d'un état composite orthogonal est équivalente à une transition qui atteint les états initiaux de toutes ses régions.

Toutes les régions d'un état composite orthogonal doivent atteindre leur état final pour que l'état composite soit considéré comme **terminé**. Ce n'est qu'à cette condition que la transition de sortie de l'état composite devient franchissable.

(1) Dans ce cas de figure plusieurs états sont actifs en même temps (un seul par région).

Exemple : distributeur de boissons



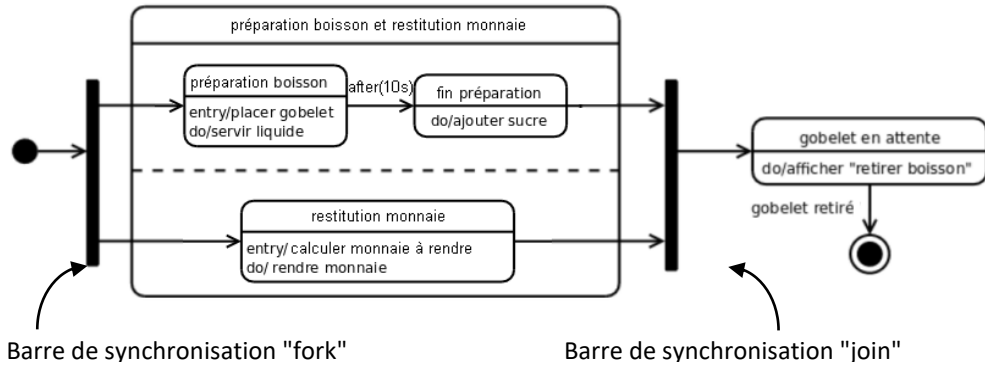
L'activation et la sortie d'un état composite orthogonal peuvent être également symbolisés par des barres de synchronisation *fork* et *join* qui fonctionnent par paire.

- Les transitions, nécessairement automatiques⁽¹⁾, qui partent d'une barre de synchronisation *fork* sont franchissables simultanément.
- La transition qui part d'une barre de synchronisation *join* n'est franchissable qu'après le franchissement de toutes les transitions, nécessairement automatiques, qui convergent vers cette barre.

(1) Sans événement ni garde associée.

Exemple : distributeur de boissons

Le diagramme d'état ci-dessous décrit le même comportement que celui présenté précédemment.



Barre de synchronisation "fork"

Barre de synchronisation "join"

2 Diagramme de séquence (sd)

Un autre diagramme du langage SysML permet de décrire le comportement séquentiel d'un système. Il s'agit du diagramme de séquence.

2.1 Diagramme de séquence

Un diagramme de séquence est rattaché à un cas d'utilisation et décrit ce dernier en entier ou en partie, ce qui correspond à un scénario de fonctionnement possible, défini dans un cadre précis.

Il décrit, dans l'ordre chronologique, l'enchaînement des interactions⁽²⁾ entre les acteurs du système ou entre des composants du système eux-mêmes.

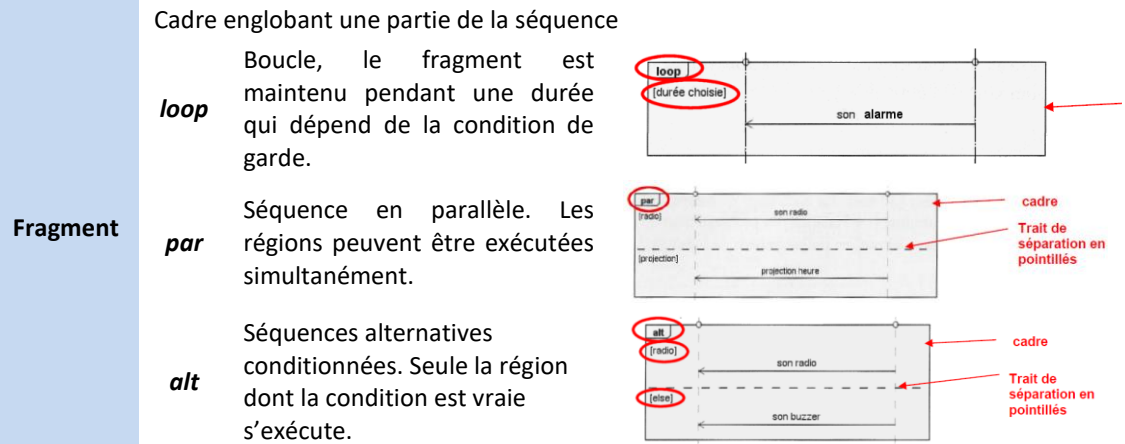
(2) Appelés messages

Les principaux éléments sont :

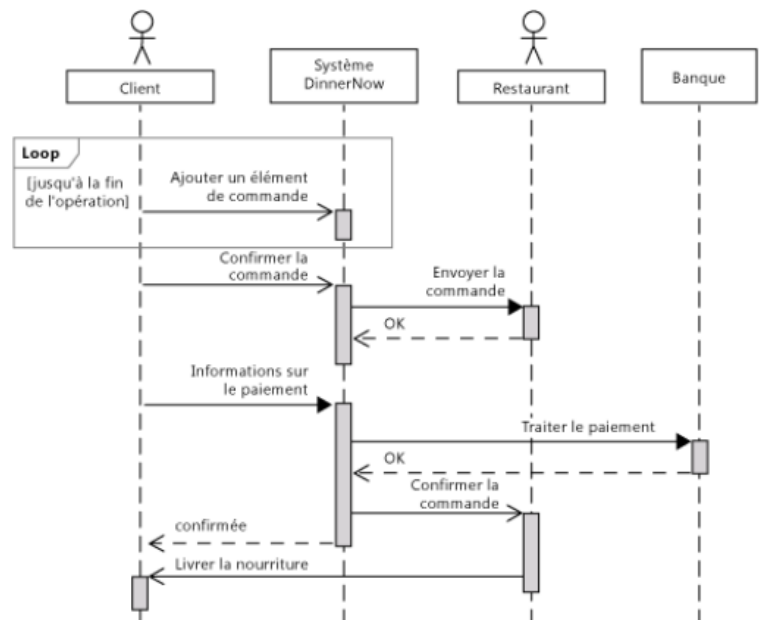
Ligne de vie	Ligne verticale en pointillée. Une pour chaque élément dialoguant (acteur, système, sous-système ou composant).
Période d'activité	Bande verticale sur une ligne de vie. Optionnelles elles facilitent la lecture du diagramme.
Message	Flèche horizontale unidirectionnelle entre deux lignes de vie représentant un élément de communication. Elle déclenche une période d'activité (un comportement) chez le receveur du message, pour qui, l'arrivée d'un message est un événement déclencheur. Ce message peut être :

- synchrone : l'émetteur attend une réponse, son comportement est bloqué pendant l'attente ;
- asynchrone : l'émetteur n'attend pas de réponse, son comportement continu ;
- une réponse.

Il est possible d'avoir un message réflexif correspondant à une interaction interne au composant.



Exemple : système de vente de repas en ligne



3 Mesurer et coder une position angulaire

3.1 Familles de capteurs

Pour contrôler le bon fonctionnement d'une chaîne d'énergie, il est nécessaire de mesurer des grandeurs physiques. Les 3 types de capteurs qui permettent d'acquérir des grandeurs sont :

- **les capteurs** : délivre une information **analogique** (potentiomètre linéaire, rotatif, règle magnétique, cellule magnétorésistive, tachymètre , génératrice tachymétrique, accéléromètre, débitmètre, dynamomètre, jauges de déformation, cellules piézo-électriques, manomètre...)
- **les codeurs** : délivre une information **numérique** (codeur incrémental, absolu)
- **les détecteurs** : délivre une information **logique** (détecteur fin de course ILS, détecteur à effet hall, boutons...)

On distingue également ;

les capteurs actifs : Ils ont besoin dans la plupart des cas d'apport d'énergie extérieure pour fonctionner

les capteurs passifs : Le phénomène physique qui est utilisé pour la détermination du mesurande effectue directement la transformation en grandeur électrique

3.2 Vocabulaire de métrologie

(1) La beauté n'est pas une grandeur mais on peut lui associer des critères qui eux le sont.

Grandeur : Phénomène physique mesurable.⁽¹⁾

Mesure : Évaluation d'une grandeur par comparaison avec une autre grandeur de même nature prise pour unité.

Mesurande : Grandeur à mesurer.

Résolution : Plus petite variation de grandeur mesurable par le capteur.

Ex : Le codeur incrémental à une résolution de 0,087°.

Sensibilité : Variation du signal de sortie par rapport à la variation du signal d'entrée.

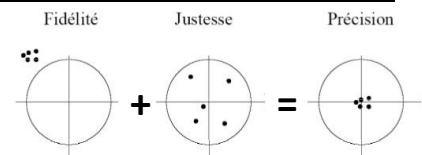
Ex : Le capteur de température LM35 a une sensibilité de 10mV/°C.

(2) La fidélité concerne le système, la justesse et la précision concernent la mesure.

Fidélité : Répétabilité de la mesure.⁽²⁾

Justesse : Réponse proche de la valeur vraie.

Précision : Écart entre la valeur vraie et la valeur mesurée.



3.3 Les codeurs

Le codeur est généralement placé en amont du réducteur, car pour un même mouvement, on obtient plus d'impulsion et donc une meilleure résolution.

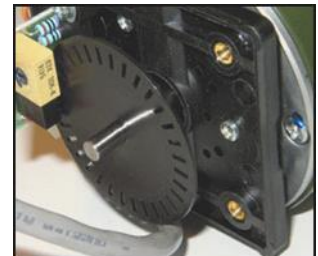
Codeur incrémental (ou roue codeuse)

Codeur incrémental (ou roue codeuse) :

Un codeur incrémental est un générateur d'impulsions qui fournit 2 voies en **quadrature** et un top zéro. Elles sont divisées en n secteurs angulaires égaux, alternativement opaques et transparents.

Ils fonctionnent sur le principe de **comptage** et **décomptage d'impulsions** et donne donc le déplacement relatif.

n s'appelle le nombre de périodes, c'est le nombre d'impulsions qui sont délivrées par le codeur pour un tour complet de son disque.



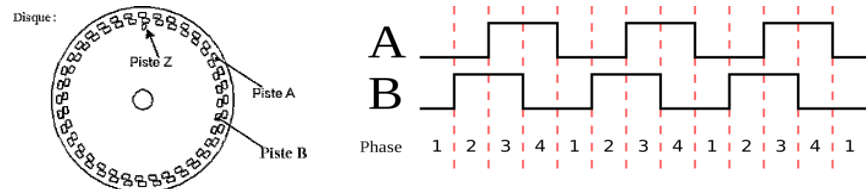
Codeur incrémental

Avantages :

- Mesure prise à coût raisonnable ;
- Entrées de comptage adaptées (voies A, B, Z) en standard sur les automates programmables récents ;
- Obtention aisée de la vitesse par intégration numérique.

Inconvénients :

- Perte totale des informations en cas de coupure d'énergie ;
- Nécessite une procédure de prise d'origine.

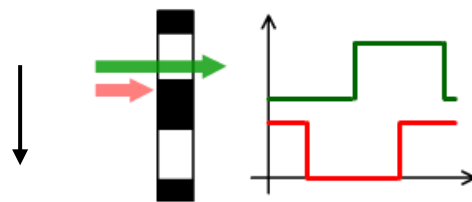


Disque d'un codeur incrémental et pistes en quadrature de phase

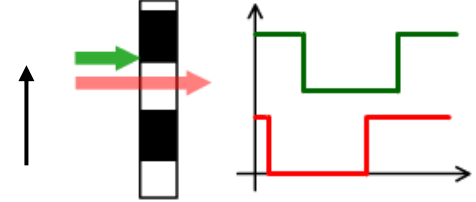
Les pistes intérieures et extérieures sont en **quadrature de phase**, ce qui permet de :

- connaître le **sens de rotation** du capteur
- **améliorer par 2 la résolution** du capteur.

Déterminer le sens de rotation



Le front montant de la voie verte se présente avant celui de la voie rouge.



Le front montant de la voie rouge se présente avant celui de la voie verte.

Codeur absolu (ou numérique)

Codeur absolu (ou numérique) :

Délivre un signal image de la position à mesurer **sous forme d'un code numérique binaire** et donne le déplacement absolu.

Il dispose de N pistes, généralement agencées suivant le code **Gray**.

La piste intérieure correspond au bit de poids le plus fort.



Codeur absolu

Avantages :

- Chaque secteur possédant son code unique, il est inutile de déterminer le sens de rotation ;
- Pas de perte d'information en cas de coupure d'énergie ;
- Code connu en permanence, pas besoin de procéder à la Prise d'Origine Machine lors de la mise sous tension ;
- Pas d'erreur de lecture avec le code Gray.

Inconvénients :

- Relativement onéreux ;
- Interface avec la commande plus complexe (N entrées) ;
- Nécessite un transcodeur pour reconvertir le signal en binaire naturel.



Disque et pistes d'un codeur absolu

(1) Le code Gray n'est pas pondéré, on ne peut pas faire d'opérations arithmétiques avec.

Le **code Gray**⁽¹⁾, également appelé binaire réfléchi, est un code **binaire** qui présente la particularité qu'**un seul bit change d'état entre deux combinaisons successives**. Ce qui permet d'éviter des erreurs de lecture.

Code binaire

	2^2	2^1	2^0
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

Code Gray

	2^2	2^1	2^0
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	1
3	0	1	0
4	1	1	0
5	1	1	1
6	1	0	1
7	1	0	0

3.4 Systèmes de numération

Base binaire : Pour un nombre codé sur $n + 1$ (signe) bits, chaque bit i vaut 2^i en décimal (Décimal Codé Binaire DCB).

Base octale : Peut compter de 0 à 7. Équivaut à un regroupement de 3 bits.

Base hexadécimale : Peut compter de 0 à 15, (avec 0, 1, ..., 8, 9, A, B, ..., E, F). Équivaut à un regroupement de 4 bits. Les octets sont souvent écrits sous la forme de deux chiffres hexadécimaux en informatique.

Théorie des mécanismes

(1) le mot *mécanisme* est synonyme du mot *transmetteur*.

Les mécanismes⁽¹⁾ transmettent et adaptent une énergie mécanique en une autre énergie mécanique. Pour les concevoir, on peut mener deux approches :

- Une approche technologique, pour l'art du choix et de l'assemblage des composants ;
- Une approche mécanique, pour les outils et les méthodes de calcul à appliquer sur les modèles associés.

La **théorie des mécanismes** est l'étude des **architectures** des mécanismes.

Cette théorie relève de l'approche mécanique. Elle s'appuie sur la théorie des graphes, et sur les techniques de résolutions des systèmes d'équations linéaires. L'objectif est de :

- Mettre en équation le problème ;
- Evaluer les possibilités de résolution ;
- Automatiser la recherche d'influence de chacun des paramètres ;
- Comparer des solutions technologiques ;
- Evaluer la montabilité et la robustesse d'une architecture.

1 Paramétrage

1.1 Poser les variables

On appelle **paramètres du mouvement, ou variables** les grandeurs variables : $\lambda, x, y, z, r, \dots$

On appelle **paramètres caractéristiques, ou invariants** les grandeurs constantes : $a, b, c, d, e, R, L, l, \dots$

1.2 Mobilité et degré de liberté

On appelle **mobilité** (m) la différentielle d'un paramètre de mise en position.

Un mouvement possible n'est pas un mouvement effectif, par exemple, un mouvement peut être autorisé entre deux Classes d'Equivalences Cinématiques (CEC) mais bloqué dans une chaîne fermée.

On ne cherche pas à évaluer la variation effective d'un paramètre, mais sa capacité à évoluer.

On appelle **degré de liberté** (ddl) une mobilité non nulle.

C'est ainsi que par rapport à un repère :

- Un solide possède 6 mobilités ;
- Un solide possède au plus 6 ddl.

2 Approche cinématique

Soit un graphe des liaisons connu pour un mécanisme donné, ou proposé pour un mécanisme à concevoir. On note :

N_p le nombre de sommets du graphe ;

N_L le nombre d'arcs du graphe⁽¹⁾.

(1) N_p fait référence à nombre de pièces, N_L à nombre de liaisons.

2.1 Nombre de cycles indépendants

La théorie des mécanismes concerne l'étude des chaînes fermées. On cherche donc à les dénombrer.

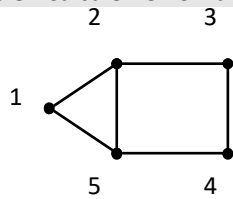
On appelle **nombre de cycles** μ , ou **nombre cyclomatique**, le nombre de chaînes fermées indépendantes à parcourir pour décrire un graphe des liaisons.

$$\mu = 1 + N_L - N_p$$

		Nombre de sommets		
		1	2	3
Nombre d'arcs	0	• $\mu = 0$	/	/
	1	/	— $\mu = 0$	/
	2	/	⤿ $\mu = 1$	— — $\mu = 0$
	3	/	⤿⤿ $\mu = 2$	⤿ — — $\mu = 1$

Ajouter un arc augmente μ de 1.
Ajouter un arc et un sommet ne change pas μ .

Exemple : Calculer le nombre de cycles du graphe suivant



$$\mu = 1 + N_L - N_p = 1 + 6 - 5 = 1$$

2.2 Nombre d'équations

Chaque fermeture cinématique donne 6 équations scalaires.

Exemple :

Dans l'exemple ci-dessus, il y a par exemple la chaîne 1-2-5-1 et la chaîne 2-3-4-5-2.

$$\text{Et donc } \vec{V}_{1/2} + \vec{V}_{2/5} + \vec{V}_{5/1} = \vec{0} \text{ et } \vec{V}_{2/3} + \vec{V}_{3/4} + \vec{V}_{4/5} + \vec{V}_{5/2} = \vec{0}$$

Le nombre d'équations cinématiques E_c est :

$$E_c = 6\mu$$

2.3 Nombre d'inconnues

Le nombre d'inconnues cinématiques I_c est la somme des ddl des liaisons⁽¹⁾.

(1) changer une liaison modifie donc le décompte.

2.4 Indice de mobilité

On doit résoudre un système d'équations linéaires homogènes de E_c équations et de I_c inconnues que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$E_c \text{ lignes } \left\{ \underbrace{\left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right)}_{I_c \text{ colonnes}} \right\} \begin{pmatrix} I_c \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \end{pmatrix}$$

On appelle **indice de mobilité**⁽²⁾ l'entier relatif $I_c - E_c$, différence entre le nombre d'inconnues cinématiques et le nombre d'équations cinématiques.

(2) le mot indice, est à entendre au sens de détective, il donne une indication sur la mobilité.

Si $I_c > E_c$ alors l'indice de mobilité donne le nombre d'inconnues qu'il faut basculer dans le second membre (c'est-à-dire fixer) pour pouvoir résoudre.

2.5 Degré de mobilité

(1) par exemple une équation $0 = 0$ n'est pas significative

On pose r_c le rang du système. Le rang désigne le nombre d'équations indépendantes. C'est également le nombre d'équation significative⁽¹⁾. Le rang r_c permet de distinguer les inconnues principales (qui peuvent être motorisées) et les inconnues secondaires.

$$E_c \text{ lignes} \left\{ \underbrace{\left(\begin{array}{c} \boxed{} \\ \vdots \\ \boxed{} \end{array} \right)}_{I_c \text{ colonnes}} \underbrace{\left(\begin{array}{c} m \end{array} \right)}_m \left(I_c \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $r_c = I_c$ la seule solution est la nullité de toutes les inconnues, donc de tous les paramètres cinématiques. Il n'y a alors aucun mouvement possible et le mécanisme est rigide.

On appelle loi entrée-sortie d'un mécanisme toutes relation entre des inconnues cinématiques principales. Un mécanisme admet au plus r_c lois entrée-sortie.

On appelle **degré de mobilité m** d'un mécanisme le nombre, entier naturel, de mouvements indépendants possibles.

$$m = I_c - r_c \geq 0 \text{ }^{(2)(3)}$$

Le degré de mobilité représente les paramètres du mouvement qu'il faut fixer pour que le mécanisme ne bouge plus.

(2) car mathématiquement, on a obligatoirement :

$$r_c \leq \min(I_c, E_c) \leq I_c$$

(3) on distingue parfois

$$m = m_u - m_i \quad \mathbf{2.6}$$

avec m_u les mobilités utiles, qui participent à la loi entrée-sortie.

m_i les mobilités internes, qui ne participent pas à la loi entrée-sortie.

Mais ce vocabulaire est très mal choisi. Interne s'oppose à externe, utile s'oppose à inutile. Or en pratique, toutes les mobilités sont internes et utiles.

(4) les chaînes ouvertes sont évidemment isostatiques, on ne s'intéresse dans ce chapitre qu'aux chaînes fermées.

Degré de statisme

Certaines équations ne servent pas à la résolution.

On appelle **degré de statisme** ou **degré d'hyperstatisme h** d'un mécanisme le nombre, entier naturel :

$$h = E_c - r_c$$

Si $h = 0$ alors le mécanisme est dit **isostatique**⁽⁴⁾.

Si $h > 0$ alors le mécanisme est dit **hyperstatique** de degré h.

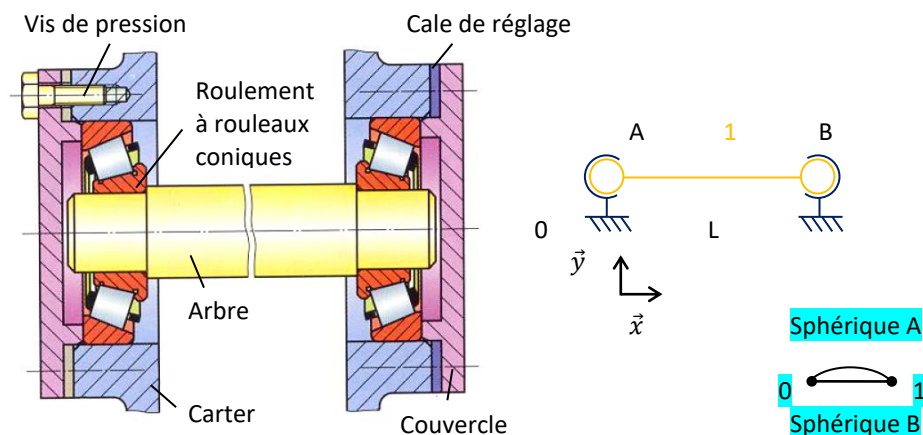
Le degré de statisme h représente le nombre de ddl manquant pour garantir un **montage** du mécanisme **sans contraintes**.

Il exprime le nombre d'équations ne servant pas à la résolution.

$$E_c \text{ lignes} \left\{ \underbrace{\left(\begin{array}{c} \boxed{} \\ \vdots \\ \boxed{} \end{array} \right)}_{I_c \text{ colonnes}} \underbrace{\left(\begin{array}{c} m \\ \\ \\ \end{array} \right)}_m \left(I_c \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple :

On considère le guidage d'un arbre 1 monté avec deux roulements par rapport à un alésage 0. Déterminer le degré de mobilité et de statisme.



L'indice de mobilité est $I_c - E_c = (3 + 3) - 6.1 = 0$

On pose les torseurs cinématiques :

$$\vec{V}_{1/0}^A = A \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{1/0}^A \\ \vec{0} \end{array} \right. = A \left\{ \begin{array}{l} \omega_{x,1/0}^A \vec{x} + \omega_{y,1/0}^A \vec{y} + \omega_{z,1/0}^A \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right.$$

$$\vec{V}_{1/0}^B = B \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{1/0}^B \\ \vec{0} \end{array} \right. = B \left\{ \begin{array}{l} \omega_{x,1/0}^B \vec{x} + \omega_{y,1/0}^B \vec{y} + \omega_{z,1/0}^B \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right. = A \left\{ \begin{array}{l} \omega_{x,1/0}^B \vec{x} + \omega_{y,1/0}^B \vec{y} + \omega_{z,1/0}^B \vec{z} \\ -L\omega_{z,1/0}^B \vec{y} + L\omega_{y,1/0}^B \vec{z} \end{array} \right.$$

$$\vec{V}_{1/0}^B(A) = \vec{V}_{1/0}^B(B) + \overline{AB} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}^B = L\vec{x}_1 \wedge (\omega_{x,1/0}^B \vec{x} + \omega_{y,1/0}^B \vec{y} + \omega_{z,1/0}^B \vec{z}) = -L\omega_{z,1/0}^B \vec{y} + L\omega_{y,1/0}^B \vec{z}$$

$$\vec{V}_{1/0}^A - \vec{V}_{1/0}^B = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_{x,1/0}^A - \omega_{x,1/0}^B = 0 \\ \omega_{y,1/0}^A - \omega_{y,1/0}^B = 0 \\ \omega_{z,1/0}^A - \omega_{z,1/0}^B = 0 \\ 0 = 0 \\ -L\omega_{z,1/0}^B = 0 \\ L\omega_{y,1/0}^B = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{x,1/0}^A \\ \omega_{y,1/0}^A \\ \omega_{z,1/0}^A \\ \omega_{x,1/0}^B \\ \omega_{y,1/0}^B \\ \omega_{z,1/0}^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_c \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} \omega_{x,1/0}^A \\ \omega_{y,1/0}^A \\ \omega_{z,1/0}^A \\ \omega_{x,1/0}^B \\ \omega_{y,1/0}^B \\ \omega_{z,1/0}^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ h \{ \underbrace{\hspace{10em}}_{r_c} \underbrace{\hspace{1em}}_m \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_{x,1/0}^A = \omega_{x,1/0}^B \\ \omega_{y,1/0}^A = 0 \\ \omega_{z,1/0}^A = 0 \\ \omega_{y,1/0}^B = 0 \\ \omega_{z,1/0}^B = 0 \end{array} \right.$$

On a un système de 5 équations et 6 inconnues.

Le rang $r_c = 5$

La mobilité⁽¹⁾ $m = 1$ avec $\omega_{x,1/0}^A$ ou $\omega_{x,1/0}^B$ inconnue principale, et donc motorisable. Il n'y a plus qu'une rotation possible.

Calcul :

Le degré de statisme est $h = E_c - r_c = 6 - 5 = 1$ avec une équation de la forme $0 = 0$ pour les vitesses en A selon \vec{x} . Le système est donc hyperstatique de degré 1.

Interprétation :

On peut expliquer cet hyperstatisme par une contrainte géométrique de longueur selon \vec{x} . En effet, si on imagine que la pièce 1 est mal usiné, alors le mécanisme devient immontable.



Remédiation :

On peut pallier ce problème en ajoutant des cales de réglages.

(1) on peut aussi voir la mobilité directement sur le schéma cinématique.

2.7 Interprétation et remédiation

(1) la géométrie est l'étude des longueurs et des angles.

(1) Par exemple :

Un entraxe correspond à 1 distance.

Un parallélisme à 2 angles.

Une coaxialité à 2 distances et 2 angles.

Les **contraintes géométriques**⁽¹⁾⁽²⁾ peuvent être des **distances** ou des **angles**.

Les **remédiations** du constructeur lors de la conception peuvent être de différentes natures :

- Présence de jeux dans un guidage pour changer une liaison ;
- Introduction d'un solide intermédiaire pour changer une liaison ;
- Accouplements mécaniques (joint de Oldham, joint de Cardan...) ;
- Cale de réglage ;
- Cotation géométriques fines et couteuses.

3 Approche dynamique

Cette partie détaille une seconde approche de la théorie des mécanismes qui conduit au même résultat que précédemment.

Soit un graphe des liaisons connu pour un mécanisme donné, ou proposé pour un mécanisme à concevoir. On note :

N_p le nombre de sommets du graphe ;

N_L le nombre d'arcs du graphe⁽²⁾.

(2) N_p fait référence à nombre de pièces, N_L à nombre de liaisons.

3.1 Nombre d'équations

Chaque isolement d'une CEC donne 6 équations scalaires.

On étudie les $N_p - 1$ mouvements par rapport à un repère.

Le nombre d'**équations statiques** E_s est :

$$E_s = 6(N_p - 1)$$

3.2 Nombre d'inconnues

Le nombre d'**inconnues statiques** I_s est la somme des AM transmissibles par les liaisons parfaites⁽³⁾.

(3) changer une liaison modifie donc le décompte.

3.3 Indice de mobilité

On doit résoudre un système d'équations linéaires homogènes de E_s équations et de I_s inconnues que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$E_s \text{ lignes} \left\{ \underbrace{\left(\begin{array}{c} \phantom{\hspace{1cm}} \\ \phantom{\hspace{1cm}} \\ \phantom{\hspace{1cm}} \end{array} \right)}_{I_s \text{ colonnes}} \left(\begin{array}{c} I_s \\ \\ \end{array} \right) = (\text{Second membre})$$

Le second membre comprend les AM extérieures autre que les composantes de liaison et les composantes dynamiques éventuelles.

Par dualité des torseurs cinématiques et des AM :

$$I_c + I_s = 6N_L$$

L'indice de mobilité est :

$$I_c - E_c = 6N_L - I_s - 6\mu = 6N_L - I_s - 6(1 + N_L - N_p) = -I_s - 6(1 - N_p) = E_s - I_s$$

3.4 Degré de statisme

On pose r_s le rang du système.

$$E_s \text{ lignes} \left\{ \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \square & \text{---} \\ \hline r_s & h \end{array} \right)}_{I_s \text{ colonnes}} \right\} \begin{pmatrix} I_s \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Second membre}^{(1)} \end{pmatrix}$$

(1) ce second membre se compose d'actions mécaniques externes ou internes.

Si $r_s = I_s$ la seule solution est la nullité de toutes les inconnues, donc de tous les AM des liaisons.

(2) Adjectif : isostatique, hyperstatique.

Substantif : isostatisme, hyperstatisme.

Un mécanisme est dit **isostatique** si, en l'absence de sollicitations extérieures, toutes les AM des liaisons parfaites sont nulles.

Un mécanisme est dit **hyperstatique** si, en l'absence de sollicitations extérieures, il existe des AM des liaisons parfaites non-nulles⁽²⁾.

On appelle **degré de statisme** ou **degré d'hyperstatisme h** d'un mécanisme le nombre, entier naturel :

$$h = I_s - r_s \geq 0^{(3)}$$

Si $h = 0$ alors le mécanisme est dit **isostatique**.

Si $h > 0$ alors le mécanisme est dit **hyperstatique** de degré h.

Le degré de statisme h représente le nombre d'inconnues principales du système ne comportant que les AM des liaisons parfaites.

C'est aussi le nombre d'inconnues ne pouvant pas être déterminées à l'aide de la statique ou de la dynamique.

(3) car mathématiquement, on a obligatoirement :

$$r_s \leq \min(I_s, E_s) \leq I_s$$

(4) Il faut utiliser le cours sur la Résistance Des Matériaux (RDM) qui est hors programme.

3.5 Degré de mobilité

Dans l'approche dynamique, le degré de mobilité correspond au nombre d'équations superflues pour déterminer les inconnues de liaisons.

$$E_s \text{ lignes} \left\{ \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \square & \text{---} \\ \hline r_s & h \end{array} \right)}_{I_s \text{ colonnes}} \right\} \begin{pmatrix} I_s \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Second membre} \end{pmatrix}$$

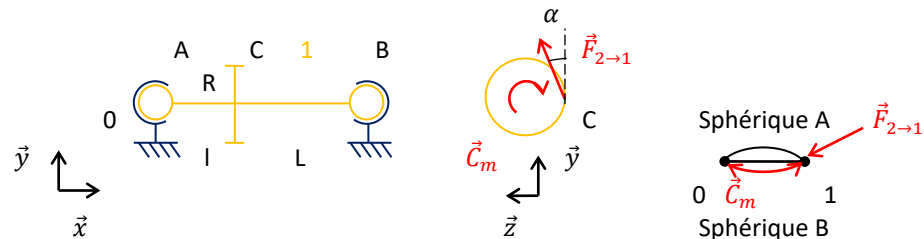
Avec $m = E_s - r_s$.

Là où n'apparaît aucune inconnue de liaison apparaît une possibilité de mouvement.

Les équations inutiles ne sont pas forcément de la forme $0 = 0$ car le second membre peut être non nul.

Exemple :

On reprend l'exercice précédent mais on ajoute un pignon à l'arbre et un couple moteur. On souhaite connaître les valeurs des composantes d'actions mécaniques de liaison en fonction des sollicitations extérieures.



L'indice de mobilité est $E_s - I_s = 6(N_p - 1) - I_s = 6(2 - 1) - 6 = 0$

On pose les torseurs des AM :

$$\vec{M}_{0 \rightarrow 1}^A = \begin{cases} \vec{R}_{0 \rightarrow 1}^A \\ \vec{0} \end{cases} = \begin{cases} X_{0 \rightarrow 1}^A \vec{x} + Y_{0 \rightarrow 1}^A \vec{y} + Z_{0 \rightarrow 1}^A \vec{z} \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\vec{M}_{0 \rightarrow 1}^B = \begin{cases} \vec{R}_{0 \rightarrow 1}^B \\ \vec{0} \end{cases} = \begin{cases} X_{0 \rightarrow 1}^B \vec{x} + Y_{0 \rightarrow 1}^B \vec{y} + Z_{0 \rightarrow 1}^B \vec{z} \\ \vec{0} \end{cases} = \begin{cases} X_{0 \rightarrow 1}^B \vec{x} + Y_{0 \rightarrow 1}^B \vec{y} + Z_{0 \rightarrow 1}^B \vec{z} \\ -LZ_{0 \rightarrow 1}^B \vec{y} + LY_{0 \rightarrow 1}^B \vec{z} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_{1/0}^B(A) &= \vec{M}_{1/0}^B(B) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_{1/0}^B = L\vec{x} \wedge (X_{0 \rightarrow 1}^B \vec{x} + Y_{0 \rightarrow 1}^B \vec{y} + Z_{0 \rightarrow 1}^B \vec{z}) = -LZ_{0 \rightarrow 1}^B \vec{y} + LY_{0 \rightarrow 1}^B \vec{z} \\ \vec{M}_{2 \rightarrow 1} &= C \begin{cases} F_{2 \rightarrow 1} \cos \alpha \vec{y} + F_{2 \rightarrow 1} \sin \alpha \vec{z} \\ \vec{0} \end{cases} = A \begin{cases} F_{2 \rightarrow 1} \cos \alpha \vec{y} + F_{2 \rightarrow 1} \sin \alpha \vec{z} \\ RF_{2 \rightarrow 1} \sin \alpha \vec{x} - lF_{2 \rightarrow 1} \sin \alpha \vec{y} + lF_{2 \rightarrow 1} \cos \alpha \vec{z} \end{cases} \\ \vec{M}_{2 \rightarrow 1}(A) &= \vec{M}_{2 \rightarrow 1}(C) + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}_{2 \rightarrow 1} = (L\vec{x} + R\vec{y}) \wedge (F_{2 \rightarrow 1} \cos \alpha \vec{y} + F_{2 \rightarrow 1} \sin \alpha \vec{z}) \\ &= RF_{2 \rightarrow 1} \sin \alpha \vec{x} - lF_{2 \rightarrow 1} \sin \alpha \vec{y} + lF_{2 \rightarrow 1} \cos \alpha \vec{z} \\ \vec{M}_{2 \rightarrow 1} &= A \begin{cases} \vec{0} \\ -C_m \vec{x} \end{cases}\end{aligned}$$

Le théorème de l'équilibre (TE) en A donne :

$$\begin{aligned}\Rightarrow \begin{cases} \vec{M}_{0 \rightarrow 1}^A + \vec{M}_{0 \rightarrow 1}^B + \vec{M}_{2 \rightarrow 1} + \vec{M}_{0 \rightarrow 1}^{mot} = \vec{0} \\ X_{0 \rightarrow 1}^A + X_{0 \rightarrow 1}^B + Y_{0 \rightarrow 1}^B = -F_{2 \rightarrow 1} \cos \alpha \\ Y_{0 \rightarrow 1}^A + Z_{0 \rightarrow 1}^B = -F_{2 \rightarrow 1} \sin \alpha \\ Z_{0 \rightarrow 1}^A = C_m - RF_{2 \rightarrow 1} \sin \alpha \\ -LZ_{0 \rightarrow 1}^B = lF_{2 \rightarrow 1} \sin \alpha \\ LY_{0 \rightarrow 1}^B = -lF_{2 \rightarrow 1} \cos \alpha \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{0 \rightarrow 1}^A \\ Y_{0 \rightarrow 1}^A \\ Z_{0 \rightarrow 1}^A \\ X_{0 \rightarrow 1}^B \\ Y_{0 \rightarrow 1}^B \\ Z_{0 \rightarrow 1}^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_{2 \rightarrow 1} \cos \alpha \\ -F_{2 \rightarrow 1} \sin \alpha \\ C_m - RF_{2 \rightarrow 1} \sin \alpha \\ lF_{2 \rightarrow 1} \sin \alpha \\ -lF_{2 \rightarrow 1} \cos \alpha \end{pmatrix} \\ \Rightarrow E_s \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{0 \rightarrow 1}^A \\ Y_{0 \rightarrow 1}^A \\ Z_{0 \rightarrow 1}^A \\ Y_{0 \rightarrow 1}^B \\ Z_{0 \rightarrow 1}^B \\ X_{0 \rightarrow 1}^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_{2 \rightarrow 1} \cos \alpha \\ -F_{2 \rightarrow 1} \sin \alpha \\ lF_{2 \rightarrow 1} \sin \alpha \\ -lF_{2 \rightarrow 1} \cos \alpha \\ C_m - RF_{2 \rightarrow 1} \sin \alpha \end{pmatrix} \\ m \{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{r_s} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_h \end{array} \right\} \\ \Rightarrow \begin{cases} X_{0 \rightarrow 1}^A = -X_{0 \rightarrow 1}^B \\ Y_{0 \rightarrow 1}^A = \frac{l-L}{L} F_{2 \rightarrow 1} \cos \alpha \\ Z_{0 \rightarrow 1}^A = \frac{l-L}{L} F_{2 \rightarrow 1} \sin \alpha \\ Y_{0 \rightarrow 1}^B = -\frac{l}{L} F_{2 \rightarrow 1} \cos \alpha \\ Z_{0 \rightarrow 1}^B = -\frac{l}{L} F_{2 \rightarrow 1} \sin \alpha \\ C_m = RF_{2 \rightarrow 1} \sin \alpha \end{cases}\end{aligned}$$

On a un système de **6** équations et **8** inconnues.

Le rang du système homogène $r_s = \mathbf{5}$ Le rang du système non-homogène $r_s = \mathbf{6}$

On peut donc exprimer 6 inconnues en fonctions de 2 inconnues principales, par exemple $X_{0 \rightarrow 1}^B$ et $F_{2 \rightarrow 1}$. Il y a 5 équations et une loi entrée-sortie. Celle-ci aurait pu être obtenue directement.

La mobilité $m = \mathbf{1}$ avec une équation de la forme $0 = 0$ pour les moments en A selon \vec{x} .

Calcul :

Le degré de statisme est $h = I_s - r_s = (3 + 3) - 5 = \mathbf{1}$ avec $X_{0 \rightarrow 1}^A$ ou $X_{0 \rightarrow 1}^B$ inconnue principale. Le système est donc hyperstatique de degré 1.

Interprétation :

Idem

Remédiation :

Idem

4 Approche globale

On a donc démontré pour une approche cinématique :

$$\begin{cases} m = I_c - r_c \\ h = E_c - r_c \end{cases}$$

Pour une approche dynamique :

$$\begin{cases} m = E_s - r_s \\ h = I_s - r_s \end{cases}$$

L'indice de mobilité est :

$$m - h = I_c - E_c = E_s - I_s \quad \text{avec } m \geq 0 \text{ et } h \geq 0.$$

On appelle approche globale le raisonnement que l'on peut mener à partir de l'indice de mobilité. L'indice de mobilité se calcule à partir des nombres d'inconnues et d'équations, et s'interprète avec les degrés de mobilité et de statisme.

Si $m - h > 0$ alors il y a des **mouvements**.

Si $m - h = 0$ alors il n'y a aucune information.

Si $m - h < 0$ alors il y a des **contraintes de montage**.

4.1 Synthèse

	Approche cinématique	Approche dynamique
Nb CEC	N_p	
Nb liaisons	N_L	
Nb cycles	$\mu = N_L - N_p + 1$	
Nb mouvements		$N_p - 1$
Nb équations scalaires	$E_c = 6\mu$	$E_s = 6(N_p - 1)$
Nb inconnues scalaires	I_c	I_s
Rang	r_c	r_s
Indice de mobilité	$I_c - E_c$	$E_s - I_s$
Degré de mobilité	$m = I_c - r_c$	$m = E_s - r_s$
Degré de statisme	$h = E_c - r_c$	$h = I_s - r_s$
Approche globale	$m - h = I_c - E_c$	$m - h = E_s - I_s$

4.2 Quelle approche privilégier ?

Toute étude commence par une approche globale. En effet, il est inutile de se lancer dans des calculs qui deviennent très rapidement complexes pour déboucher sur des conclusions triviales.

- Pour une recherche des degrés de mobilité et de statisme, l'approche cinématique est à privilégier, et ce pour deux raisons :
 - les grandeurs manipulées sont observables et mesurables ;
 - le nombre d'équations à traiter est en général bien inférieur à celui obtenu par l'approche dynamique.
- Pour une recherche de la loi entrée-sortie d'un point de vue dynamique, l'approche énergétique est à privilégier. Le théorème de la puissance cinétique donne un résultat immédiat.
- L'approche dynamique enfin est à mener lorsque l'on cherche à dimensionner les composants d'un mécanisme. Il est alors seulement nécessaire de connaître les torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons.

Il est acquis que toute analyse commence par une approche globale. Mais il ne faut pas oublier pour autant que cette dernière ne donne qu'un indice et que seul le système d'équations donne des certitudes.

4.3 Isostatisme et hyperstatisme

	Avantage	Inconvénient
Mécanisme isostatique	Economique Facilement montable	Souple
Mécanisme hyperstatique	Rigide	Couteux Contraintes géométriques fines

Dans un mécanisme, la **rigidité** s'oppose à la **montabilité**.

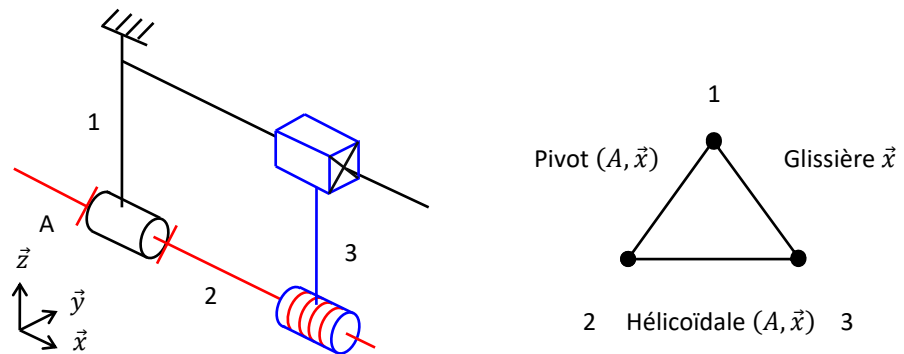
Les **contraintes géométriques** mises en évidence dans le cas de l'hyperstatisme induisent soit une **qualité de fabrication** plus grande, soit la mise en place de réglages sur le mécanisme. On sait tout à fait réaliser et l'un, et l'autre, mais cela a un **coût**.

En conclusion, on peut dire que l'hyperstatisme est un choix réfléchi qu'il est nécessaire de financer quand les critères de performances ne sont pas atteints avec une structure équivalente isostatique.

4.4 Exemple de rédaction

Exemple : On s'intéresse à un système vis-écrou. Déterminer le degré d'hyperstatisme.

Proposer un changement pour rendre le schéma isostatique.



Calcul :

L'indice de mobilité est : $m - h = I_c - E_c = (1 + 1 + 1) - 6.1 = -3$

On voit graphiquement une mobilité utile (rotation de la vis \vec{x}) : $m = 1$

Donc l'hyperstatisme est : $h = m + 3 = 1 + 3 = 4$

Interprétation :

Si par exemple, on imagine toutes les liaisons parfaites sauf la liaison pivot.

Les contraintes géométriques sont 2 distantes selon \vec{y} et \vec{z} et 2 orientations selon \vec{y} et \vec{z} .

Remédiation :

Si on souhaite rendre le mécanisme isostatique, on peut remplacer la liaison glissière par une liaison sphère-plan de normale \vec{y} .

	\vec{x}	\vec{y}	\vec{z}
Contrainte géométrique linéaire			
Contrainte géométrique angulaire			

Remarque : ici, des défauts de distance \vec{x} et d'alignement \vec{x} n'empêchent pas l'assemblage.

QUESTIONS DE COURS

- Donner 2 méthodes pour déterminer la liaison équivalente de deux liaisons en série.
- Donner 2 méthodes pour déterminer la liaison équivalente de deux liaisons en parallèle.
- Comment choisir un paramétrage ?
- Qu'est-ce que l'isostatisme et l'hyperstatisme ?
- Donner les 2 formules de l'indice de mobilité.
- Donner des exemples de solutions technologiques pour permettre un montage hyperstatique.

Dynamique et énergétique des systèmes de solides indéformables

La dynamique des solides permet de prédire ou d'expliquer les mouvements à partir de leurs causes. Il est important de connaître les situations élémentaires pour comprendre et interpréter les résultats issus de logiciels de calculs plus complexes.

La **cinétique** est l'étude de la répartition des masses.

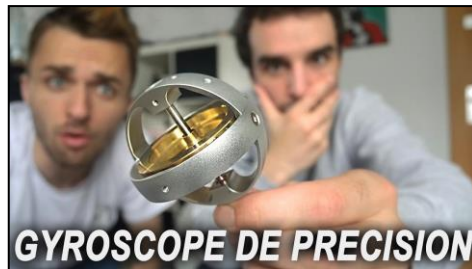
La **dynamique** est l'étude des mouvements et de leurs causes.

domaine	grandeurs physiques
géométrie	[longueur] et [angle]
cinématique	[longueur], [angle] et [temps]
statique	[longueur], [angle] et [masse]
cinétique	[longueur], [angle], [temps] et [masse]
dynamique	[longueur], [angle], [temps] et [masse]

1 Contexte

1.1 Gyroscopie de précision de Dr Nozman (feat Squeezeie)

(1)
<https://youtu.be/hqjcPnl5qF4>



Dans une vidéo de sa chaîne⁽¹⁾, Dr Nozman expose à Squeezeie un gyroscopie qui a la particularité d'être monté au bout d'une tige et de rester un certain temps vertical.

A l'aide de ce chapitre, nous allons calculer la matrice d'inertie, le moment cinétique puis le moment dynamique du gyroscopie et expliquer son mouvement.

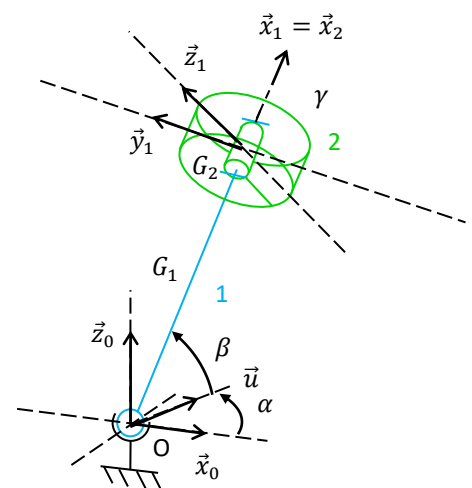
1.2 Modèle cinématique

On associe une base $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$, à chaque solide i , avec $i \in \{0, 1, 2\}$. R_0 est Galiléen. On introduit une base intermédiaire $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

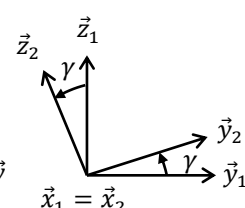
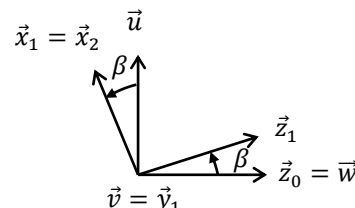
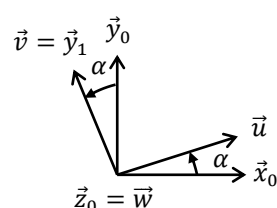
La **tige 1** est un cylindre homogène de masse m_1 , de centre d'inertie G_1 , tel que $\overrightarrow{OG_1} = \frac{L}{2} \vec{x}_1$ avec un angle de **précession** $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{u}) = (\vec{y}_0, \vec{v})$ autour de $\vec{z}_0 = \vec{w}$ et de **nutation** $\beta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = (\vec{u}, \vec{x}_1)$ autour de $\vec{v} = \vec{y}_1$ ⁽²⁾.

Le **disque 2** est un cylindre homogène de masse m_2 , de hauteur h et de rayon R , de centre d'inertie G_2 , tel que $\overrightarrow{OG_2} = L \vec{x}_1$ avec un angle de **rotation propre** tel que $\gamma = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ autour de $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$.

On note $\Sigma = \{1, 2\}$.



(2) L'angle β est représenté négativement sur le schéma cinématique mais positivement sur la figure de calcul.



2 Inertie

L'**inertie** est la **résistance** qu'un corps oppose au changement de son **mouvement**.

Maîtriser les inerties des solides en mouvement dans un mécanisme est intéressant car il existe un lien direct entre ces dernières et les actions mécaniques qui permettent de faire varier les mouvements.

2.1 Masse

On appelle **système matériel**, un ensemble de particules caractérisées par une certaine quantité de matière.

On appelle **masse** d'un système matériel la grandeur scalaire positive représentative de sa quantité de matière.

La **masse** est l'inertie en **translation**.

Un **système à masse conservative**⁽¹⁾ est un système dont la masse ne varie pas au cours du temps.

On appelle **centre de masse**, ou **centre d'inertie**, ou **centre de gravité**⁽²⁾ d'un système matériel Σ , le point G tel que : $\int_{\Sigma} \overrightarrow{GP} dm = 0$

A partir d'un point quelconque : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} \int_{\Sigma} \overrightarrow{AP} dm$

Relation du barycentre pour des systèmes disjoints :

$$m\overrightarrow{AG} = m_1\overrightarrow{AG}_1 + m_2\overrightarrow{AG}_2 \quad \text{avec } m = m_1 + m_2$$

Méthodologie pour déterminer la position de G :

1. Identifier les symétries ;
2. Décomposer le solide S en volumes élémentaires ;
3. Utiliser la relation du barycentre.

2.2 Moment d'inertie

La masse m ne permet pas à elle seule de caractériser la difficulté de mettre un solide en mouvement de rotation ou de l'en empêcher. On a besoin de connaître la façon dont cette masse est répartie par rapport à l'axe de rotation.

Le **moment d'inertie** est l'inertie en **rotation**.

Mécanique du point

Exemple : Energie cinétique dans la mécanique du point

Pour un mouvement de translation : $E_c = \frac{1}{2} mV^2$ Pour un mouvement de rotation : $E_c = \frac{1}{2} mR^2 \omega^2$

Définition scalaire

On appelle **moment d'inertie** d'un solide **par rapport à un axe** $\Delta = (A, \vec{u})$ la somme des masses élémentaires multipliées par le carré de la distance du point courant à cet axe :

$$I_{\Delta, S} = I_{(A, \vec{u}), S} = \int_S r^2 dm = \int_S r^2 \rho dV \quad (3)$$

Son unité est $[kg \cdot m^2]$

Le moment d'inertie caractérise la distribution de la masse d'un solide autour d'une droite.

Pour une même masse globale, plus la matière est éloignée de l'axe, plus le moment d'inertie est grand, et plus il sera difficile de mettre le solide en mouvement de rotation autour de cet axe, ou de l'arrêter.

(1) En mécanique Newtonienne, la masse est indépendante de l'énergie. C'est le principe de conservation de la masse.

(2) Pour un satellite, le moment de la gravité au centre de gravité n'est pas forcément nul car le champ de gravité n'est pas uniforme.

(3) La répartition de la masse par rapport à l'axe de rotation, intervient au carré dans la grandeur d'inertie.

Il est positif.

Question 1 : Déterminer le moment d'inertie du disque 2 du gyroscope, modélisé par un cylindre homogène, de centre G, rayon R, axe (O, \vec{x}_1) , de hauteur h et de masse m.

$$A_2 = I_{xx} = I_{(G, \vec{x}_1), S} = \int_S r^2 dm = \int_S r^2 \rho dV = \rho \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{x=0}^h r^2 r dr d\theta dx = 2\pi \rho h \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = 2\pi \frac{m}{\pi h R^2} h \frac{R^4}{4} = m \frac{R^2}{2}$$

Changement d'axe de rotation

Théorème de Huygens scalaire

Soit un solide indéformable S de masse m et de centre de masse G.

Soit $\Delta = (A, \vec{u})$ une droite de ce solide S et soit d la distance au point G à cet axe.

Le moment d'inertie d'un solide autour d'un axe Δ qui ne passe pas par G est égale au moment d'inertie d'un axe parallèle au premier passant par G augmenté de md^2 .

$$I_{(A, \vec{u}), S} = I_{(G, \vec{u}), S} + md^2$$

$$(1) I_{(A, \vec{u}), S} \geq I_{(G, \vec{u}), S}$$

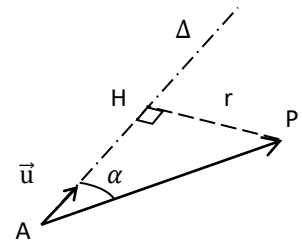
Le moment d'inertie par rapport à un axe de direction \vec{u} est minimum⁽¹⁾ quand l'axe passe par G.

2.1 Opérateur d'inertie

Définition vectorielle d'un moment d'inertie

$$I_{\Delta, S} = I_{(A, \vec{u}), S} = \int_S r^2 dm = \int_S HP^2 dm = \int_S (\vec{u} \wedge \overline{AP})^2 dm$$

$$\text{car } \vec{u} \wedge \overline{AP} = \|\vec{u}\| \|\overline{AP}\| \sin \alpha = AP \frac{HP}{AP} = HP$$



$$(2) \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u})$$

On reconnaît un produit mixte⁽²⁾, on peut faire une permutation

$$\text{circulaire. } I_{\Delta, S} = \int_S (\vec{u} \wedge \overline{AP}) \cdot (\vec{u} \wedge \overline{AP}) dm = \vec{u} \cdot \int_S \overline{AP} \wedge (\vec{u} \wedge \overline{AP}) dm$$

Soit un solide indéformable S et un point quelconque A de ce solide.

On appelle **opérateur d'inertie⁽³⁾ au point A du solide S** l'application vectorielle :

$$\vec{I}_{A, S} : E \rightarrow E$$

$$\vec{u} \mapsto \vec{I}_{A, S}(\vec{u}) = \int_S \overline{AP} \wedge (\vec{u} \wedge \overline{AP}) dm$$

L'opérateur est linéaire donc représentable par une matrice.

Matrice associée à l'opérateur d'inertie

En notant $\overline{AP} = x \vec{x} + y \vec{y} + z \vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ on remarque que

$$\overline{AP} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{pmatrix} yw - vz \\ zu - wx \\ xv - uy \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

L'opérateur $\overline{AP} \wedge$ s'écrit : $\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ ⁽⁴⁾

L'opérateur $\overline{AP} \wedge (\overline{AP} \wedge)$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{pmatrix} -(y^2 + z^2) & xy & xz \\ yx & -(z^2 + x^2) & yz \\ zx & zy & -(x^2 + y^2) \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

(3) On peut voir cet opérateur comme une description de la répartition des masses dans le solide.

(4) La matrice d'un opérateur antisymétrique est aussi antisymétrique dans une base ..

(1) On remarque qu'en cylindrique

$$I_{(A,\vec{x}),S} = I_{xx} = \int_S (y^2 + z^2) dm = \int_S r^2 dm$$

(2) La matrice d'inertie est donnée dans les sujets d'écrit des concours, mais elle peut être à rechercher dans SolidWorks aux oraux de TP.

(3) Attention, $I_{(A,\vec{x}),S}$ désigne un scalaire mais $\bar{I}_{A,S}$ désigne une matrice.

$$I_{xx} = \vec{x} \cdot \bar{I}_{A,S} \cdot \vec{x} = I_{(A,\vec{x}),S}$$

$$I_{xy} = \vec{x} \cdot \bar{I}_{A,S} \cdot \vec{y} = I_{(A,\vec{x},\vec{y}),S}$$

Pour calculer les moments d'inerties, soit on le calcule directement, soit on calcule la trace de la matrice

$$\text{Trace}(\bar{I}_{A,S}) = A + B + C \text{ qui est souvent plus simple avec les symétries.}$$

(4) Ils créent des effets de balourd.

(5) Lorsque la matrice est diagonalisée dans sa base propre centrale d'inertie, le solide est dynamiquement équilibré. Un

La matrice dans la base orthonormée $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de l'opérateur d'inertie⁽¹⁾⁽²⁾ en A du solide S est donc :

$$\bar{I}_{A,S} = \left(\bar{I}_{A,S}(\vec{x}), \bar{I}_{A,S}(\vec{y}), \bar{I}_{A,S}(\vec{z}) \right) = \begin{pmatrix} \int_S (y^2 + z^2) dm & - \int_S xy dm & - \int_S xz dm \\ - \int_S xy dm & \int_S (z^2 + x^2) dm & - \int_S yz dm \\ - \int_S xz dm & - \int_S yz dm & \int_S (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$= \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

La matrice d'inertie permet de synthétiser les caractéristiques d'inertie d'un solide et de calculer sa dynamique autour des différents axes.

A, B, C sont les **moments d'inertie** en $[kg \cdot m^2]$. Ils traduisent la répartition de la masse autour des différents axes.
D, E, F sont les **produits d'inertie**⁽⁴⁾ en $[kg \cdot m^2]$. Ils traduisent une asymétrie dans la répartition de la masse par rapport à des plans.

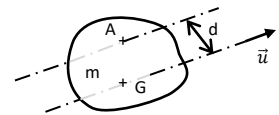
Axes principaux d'inertie

Cette matrice de l'opérateur d'inertie, ou du tenseur d'inertie, est symétrique réelle **donc toujours diagonalisable**⁽⁵⁾. Il y a donc 3 valeurs propres réelles et 3 vecteurs propres orthogonaux.

Les 3 valeurs propres sont appelées les **moments d'inertie principaux**. Ils sont portés par les **axes principaux d'inertie**.
 Lorsque la matrice d'inertie est exprimée au centre d'inertie, les axes principaux d'inertie sont appelés les **axes centraux d'inertie**.

Changement de point

Soit $\vec{AP} = \vec{AG} + \vec{GP}$, avec G le centre de masse de S.



$$\bar{I}_{A,S}(\vec{u}) = \int_S \vec{AP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{AP}) dm$$

$$= \underbrace{\int_S \vec{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{AG}) dm}_a + \underbrace{\int_S \vec{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{GP}) dm}_b + \underbrace{\int_S \vec{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{AG}) dm}_c + \underbrace{\int_S \vec{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{GP}) dm}_d$$

$$a = m \vec{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{AG}) = \vec{I}_{A,\{G,m\}}(\vec{u}) = \bar{I}_{A,\{G,m\}} \cdot \vec{u}$$

$$b = 0 \text{ et } c = 0 \text{ car on a choisi G comme changement de point } \vec{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \int_S \vec{GP} dm \right) = \vec{AG} \wedge \vec{0}$$

$$d = \vec{I}_{G,S}(\vec{u}) = \bar{I}_{G,S} \cdot \vec{u}$$

Théorème de Huygens matriciel
 L'opérateur d'inertie du solide S en un point quelconque A est égal à la somme de l'opérateur d'inertie de ce solide calculé au centre de masse G et de l'opérateur d'inertie calculé au point A du solide S affecté de la masse totale du solide S.

$$\bar{I}_{A,S} = \bar{I}_{G,S} + \bar{I}_{A,\{G,m\}} = \bar{I}_{G,S} + m \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \vec{AG} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Les matrices d'inertie de deux solides peuvent s'**additionner** si elles sont exprimées au **même point** et dans la **même base**.

Changement de base

La matrice de passage \bar{P} de $(\vec{x}, \vec{u}, \vec{v})$ vers $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est $\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \bar{P} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}$

$$\bar{I}_{A,S} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{u},\vec{v})} = \begin{pmatrix} A' & -F' & -E' \\ -F' & B' & -D' \\ -E' & -D' & C' \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

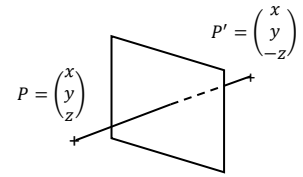
$$[\bar{I}_{A,S}]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \bar{P}^T [\bar{I}_{A,S}]_{(\vec{x},\vec{u},\vec{v})} \bar{P}$$

Solides de formes élémentaires

Solide avec plan de symétrie

On considère un solide homogène⁽¹⁾ S admettant 1 plan de symétrie (A, \vec{x}, \vec{y}) . Pour tout point $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, il existe un point symétrique $P' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$, donc :

$$\bar{I}_{A,S} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad (2)$$



Et avec 2 plans de symétrie :
$$\bar{I}_{A,S} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Solide avec axe de révolution

On considère un solide homogène S admettant comme axe de révolution (A, \vec{z}) . Les plans (A, \vec{y}, \vec{z}) et (A, \vec{x}, \vec{z}) sont donc plans de symétrie, donc :

$$\bar{I}_{A,S} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad (3)$$

(1) Si le solide n'est pas homogène, on ne s'intéresse pas seulement à la symétrie géométrique mais à la symétrie matérielle.

(2) Car $\int_{-L}^L z \, dz = 0$

(3) Tout vecteur orthogonal à \vec{z} est vecteur propre. On a une valeur propre double. $I_{xx} = I_{yy}$

Question 2 : Déterminer les symétries des matrices d'inertie de la tige 1 et du cylindre 2 du gyroscope.

Les 2 solides 1 et 2 ont une symétrie de révolution (O, \vec{x}_1) , donc

$$I_{G_{1,1}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}_{(G_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \quad I_{G_{2,2}} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(G_2, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

Question 3 : Exprimer ces matrices en leurs centres d'inertie G_1 et G_2 puis en O.

Pour le solide 2 :

$$\begin{cases} x \\ y = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{On a déjà démontré } A_2 = I_{xx} = m_2 \frac{R^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Trace}(I_{G_2}) &= A_2 + B_2 + B_2 = \int_2 (y^2 + z^2) \, dm + \int_2 (z^2 + x^2) \, dm + \int_2 (x^2 + y^2) \, dm \\ &= 2 \int_2 (x^2 + y^2 + z^2) \, dm = 2 \left(\int_V x^2 \rho \, dV + m_2 \frac{R^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_V x^2 \rho \, r \, dr \, d\theta \, dx &= \rho \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{x=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^2 \, r \, dr \, d\theta \, dx = 2\pi \rho \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^R \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 2\pi \frac{m_2}{\pi R^2 h} \frac{R^2}{2} 2 \frac{h^3}{24} \\ &= m_2 \frac{h^2}{12} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_2 + 2B_2 = 2m_2 \frac{R^2}{2} + 2m_2 \frac{h^2}{12} \Rightarrow B_2 = I_{yy} = \frac{1}{2} \left(2m_2 \frac{R^2}{2} + 2m_2 \frac{h^2}{12} - m_2 \frac{R^2}{2} \right) = m_2 \frac{R^2}{4} + m_2 \frac{h^2}{12}$$

Il est beaucoup plus facile d'utiliser une astuce de calcul (comme calculer la Trace de la matrice) que des changements de coordonnées. Pour les cas plus compliqués, on utilise SolidWorks → Evaluer → Propriété de masse → On lit l'inertie que l'on cherche dans la matrice bien orientée.

$$I_{G_2,2} = \begin{pmatrix} m_2 \frac{R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & m_2 \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) \end{pmatrix}_{(G_2, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \quad \overrightarrow{OG_2} = L\vec{x}_1$$

On utilise le Théorème de Huygens :

$$I_{O,2} = I_{G_2,2} + I_{G_2,(O,m_2)} = I_{G_2,2} + m_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 \end{pmatrix}_{(G_2, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

$$= \begin{pmatrix} m_2 \frac{R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & m_2 \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} + L^2 \right) & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} + L^2 \right) \end{pmatrix}_{(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

Pour le solide 1 :

$$I_{G_1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 \frac{L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \frac{L^2}{12} \end{pmatrix}_{(G_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \quad \overrightarrow{OG_1} = \frac{L}{2}\vec{x}_1$$

On utilise le Théorème de Huygens :

$$I_{O,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 \left(\frac{L^2}{12} + \frac{L^2}{4} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \left(\frac{L^2}{12} + \frac{L^2}{4} \right) \end{pmatrix}_{(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 \frac{L^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \frac{L^2}{3} \end{pmatrix}_{(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}_{(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

3 Quantité de vitesse et quantité d'accélération

Mécanique du point

(1) En l'absence de forces extérieures, ou si leur résultante est nulle, la quantité de mouvement d'un système matériel se conserve.

(2) On le note parfois aussi L_A .

La **quantité de mouvement**⁽¹⁾, ou quantité de vitesse, d'un point matériel m se déplaçant à une vitesse \vec{v} :

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

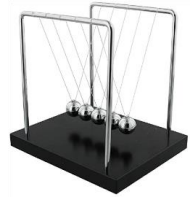
Quand ce point tourne autour d'un axe $\Delta = (A, \vec{u})$, cette quantité de vitesse est caractérisée par le **moment cinétique**⁽²⁾, $\vec{\sigma}_A$, ou moment de quantité de mouvement :

$$\vec{\sigma}_A = \overrightarrow{AP} \wedge m\vec{v}$$

D'autre part, pour un système à masse conservative, la quantité d'accélération est la dérivée de la quantité de mouvement :

$$\frac{d[\vec{P}]_{/R}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d[\vec{v}]_{/R}}{dt} = m\vec{A}$$

On somme maintenant ces quantités sur le système considéré.



3.1 Torseur cinétique

Soit un **système matériel** Σ à masse conservative, c'est-à-dire un ensemble de particules caractérisé par une certaine quantité de matière. Σ peut être un solide, plusieurs solides ou un fluide.

On appelle **résultante cinétique**, ou quantité de mouvement, ou quantité de vitesse de Σ dans son mouvement par rapport à R la somme des quantités de vitesses élémentaires en translation :

$$\vec{P}_{\Sigma/R} = \int_{\Sigma} \vec{v}_{/R}(P) dm = m\vec{v}_{/R}(G) \quad \text{en } [kg \cdot m/s]$$

On appelle **moment cinétique** de Σ dans son mouvement par rapport à R calculé en un point A quelconque la somme des moments cinétiques des quantités de vitesses élémentaires en rotation :

$$\vec{\sigma}_{\Sigma/R}(A) = \int_{\Sigma} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}_{/R}(P) dm \quad \text{en } [kg \cdot m^2/s]$$

Pour Σ à masse conservative, en particulier pour un solide indéformable S, on a :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{S/R}(B) &= \int_S (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}) \wedge \vec{v}_{S/R}(P) dm = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}_{S/R}(P) dm + \overrightarrow{BA} \wedge \int_S \vec{v}_{S/R}(P) dm \\ &= \vec{\sigma}_{S/R}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge m\vec{v}_{S/R}(G) \end{aligned}$$

La fonction vectorielle $\vec{\sigma}_{S/R}$ est donc un torseur de vecteur $m\vec{v}_{S/R}(G)$. C'est un champ de vecteurs équiprojectif.

$$\vec{\sigma}_{S/R} : \mathcal{E} \rightarrow E$$

$$A \mapsto \vec{\sigma}_{S/R}(A) = \vec{\sigma}_{S/R}(B) + \overrightarrow{AB} \wedge m\vec{v}_{S/R}(G) \quad (3)$$

$\vec{\sigma}_{S/R}$ est le **torseur cinétique**. On appelle torseur cinétique le champ des vecteurs moment cinétique.

Pour un solide indéformable, on a :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{S/R}(A) &= \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}_{S/R}(P) dm = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{v}_{S/R}(A) + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{\Omega}_{S/R}) dm \\ &= \underbrace{\int_S \overrightarrow{AP} dm}_{m\vec{AG}} \wedge \vec{v}_{S/R}(A) + \underbrace{\int_S \overrightarrow{AP} \wedge (\overrightarrow{PA} \wedge \vec{\Omega}_{S/R}) dm}_{\vec{I}_{A,S}(\vec{\Omega}_{S/R}) = \vec{I}_{A,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R}} \end{aligned}$$

Les éléments de réduction du torseur en A sont :

$$\mathcal{C}(S/R) = \vec{\sigma}_{S/R} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{P}_{S/R} \\ \vec{\sigma}_{S/R}(A) \end{array} \right. = A \left\{ \begin{array}{l} m\vec{v}_{S/R}(G) \\ \vec{I}_{A,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R} + \vec{AG} \wedge m\vec{v}_{S/R}(A) \end{array} \right. \quad (4)(5)(6)$$

(3) Il y a le même lien entre le torseur cinétique $\vec{\sigma}_{S/R}$ et le moment cinétique $\vec{\sigma}_{S/R}(A)$ qu'entre la fonction f et l'image $f(x)$.

(4) Au concours, on renomme souvent cette fonction avec la lettre \mathcal{C} comme cinétique.

En ce qui concerne l'accolade, de la même manière on peut définir la fonction exponentielle par :

$$\exp = \begin{cases} f = f' \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(5) La résultante cinétique représente les quantités de mouvements du solide en translation. Le moment cinétique en A représente les quantités de mouvements du solide en rotation autour de A.

La résultante d'un torseur ne dépend pas du point en lequel on calcule le moment.

(6) $\vec{I}_{A,S}$ et $\vec{\Omega}_{S/R}$ doivent être exprimés dans la même base pour pouvoir être multipliés.

On a donc deux cas particuliers :

Si A est le centre de masse G :

$$\vec{\sigma}_{S/R}(G) = \vec{I}_{G,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$$

Si A est immobile dans le mouvement S/R :

$$\vec{\sigma}_{S/R}(A) = \vec{I}_{A,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$$

3.2 Torseur dynamique

On appelle **résultante dynamique**, ou quantité d'accélération, de Σ dans son mouvement par rapport à R la somme des quantités d'accélération élémentaires en translation :

$$\int_{\Sigma} \vec{A}_{S/R}(P) dm = m \vec{A}_{S/R}(G) \quad \text{en } [kg \cdot m/s^2]$$

On appelle **moment dynamique** du solide S dans son mouvement par rapport à R calculé en un point A quelconque la somme des moments dynamiques élémentaires en rotation :

$$\vec{\delta}_{S/R}(A) = \int_{\Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{A}_{S/R}(P) dm \quad \text{en } [kg \cdot m^2/s^2]$$

Pour Σ à masse conservatrice, en particulier pour un solide indéformable S, on a :

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_{S/R}(B) &= \int_S (\vec{BA} + \vec{AP}) \wedge \vec{A}_{S/R}(P) dm = \int_S \vec{AP} \wedge \vec{A}_{S/R}(P) dm + \vec{BA} \wedge \int_S \vec{A}_{S/R}(P) dm \\ &= \vec{\delta}_{S/R}(A) + \vec{BA} \wedge m \vec{A}_{S/R}(G) \end{aligned}$$

La fonction vectorielle $\vec{\delta}_{S/R}$ est donc un torseur de vecteur $m \vec{A}_{S/R}(G)$. C'est un champ de vecteurs équijectif.

$$\vec{\delta}_{S/R} : \mathcal{E} \rightarrow E$$

$$A \mapsto \vec{\delta}_{S/R}(A) = \vec{\delta}_{S/R}(B) + \vec{AB} \wedge m \vec{A}_{S/R}(G)$$

$\vec{\delta}_{S/R}$ est le **torseur dynamique**. On appelle torseur dynamique le champ des vecteurs moment dynamique.

Du torseur cinétique au torseur dynamique

Résultante dynamique :

Le solide S est à masse conservatrice :

$$m \vec{A}_{S/R}(G) = \frac{d}{dt} [m \vec{V}_{S/R}(G)]_{/R}$$

Moment dynamique :

$$\frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{S/R}(A)]_{/R} = \frac{d}{dt} \left[\int_S \vec{AP} \wedge \vec{V}_{S/R}(P) dm \right]_{/R} = \int_S \frac{d}{dt} [\vec{AP} \wedge \vec{V}_{S/R}(P) dm]_{/R}$$

Car le solide S est à masse conservatrice. On calcule la dérivée d'un produit.

$$\frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{S/R}(A)]_{/R} = \underbrace{\int_S \frac{d}{dt} [\vec{AP}]_{/R} \wedge \vec{V}_{S/R}(P) dm}_a + \underbrace{\int_S \vec{AP} \wedge \frac{d}{dt} [\vec{V}_{S/R}(P) dm]_{/R}}_b$$

- Calcul de a :

Soit I un point immobile dans R.

$$\frac{d}{dt} [\vec{AP}]_{/R} = \frac{d}{dt} [\vec{IP}]_{/R} - \frac{d}{dt} [\vec{IA}]_{/R} = \vec{V}_{S/R}(P) - \vec{V}_{S/R}(A) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int_S \frac{d}{dt} [\vec{AP}]_{/R} \wedge \vec{V}_{S/R}(P) dm &= \int_S -\vec{V}_{S/R}(A) \wedge \vec{V}_{S/R}(P) dm = -\vec{V}_{S/R}(A) \wedge \int_S \vec{V}_{S/R}(P) dm \\ &= -\vec{V}_{S/R}(A) \wedge m \vec{V}_{S/R}(G) \end{aligned}$$

- Calcul de b :

$$\int_S \vec{AP} \wedge \frac{d}{dt} [\vec{V}_{S/R}(P) dm]_{/R} = \int_S \vec{AP} \wedge m \vec{A}_{S/R}(P) = \vec{\delta}_{S/R}(A)$$

(1) $\vec{V}_{S/R}(A)$ est la vitesse de A dans R. Cette vitesse provient de la mécanique du point.

(1) \mathcal{D} comme dynamique.

(2) La résultante dynamique représente les forces nécessaires pour modifier le mouvement de translation du solide. Le moment dynamique en A représente les moments nécessaires pour modifier le mouvement de rotation autour de A.

(3) Car les solides sont disjoints, ils ne se pénètrent pas.

Les éléments de réduction du torseur en A sont :

$$\mathcal{D}(S/R) = \vec{\delta}_{S/R} = \begin{cases} m\vec{A}_{S/R}(G) \\ \vec{\delta}_{S/R}(A) \end{cases} = \begin{cases} m\vec{A}_{S/R}(G) \\ \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{S/R}(A)]_R + \vec{V}_{/R}(A) \wedge m\vec{V}_{S/R}(G) \end{cases} \quad (1)(2)$$

On a donc deux cas particuliers :

Si A est le centre de masse G :

$$\vec{\delta}_{S/R}(G) = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{S/R}(G)]_{/R} = \frac{d}{dt} [\bar{I}_{G,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R}]_{/R}$$

Si A est immobile dans le mouvement /R :

$$\vec{\delta}_{S/R}(A) = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{S/R}(A)]_{/R} = \frac{d}{dt} [\bar{I}_{A,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R}]_{/R}$$

3.3 Système de solides indéformables

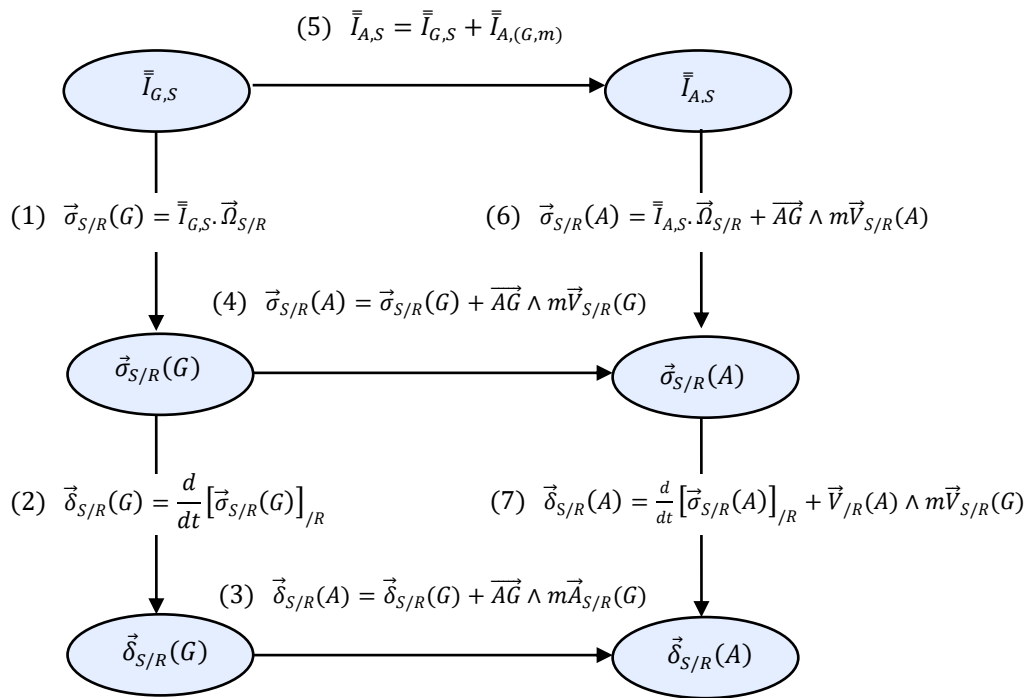
On considère que le système Σ se compose de n solides indéformables S_i en mouvement par rapport à R. Le torseur cinétique $\vec{\sigma}_{\Sigma/R}$ est la somme des torseurs cinétiques de chacun des solides⁽³⁾.

$$\mathcal{C}(\Sigma/R) = \vec{\sigma}_{\Sigma/R} = \sum_{i=1}^n \vec{\sigma}_{i/R}$$

Le torseur dynamique $\vec{\delta}_{\Sigma/R}$ est la somme des torseurs dynamiques de chacun des solides.

$$\mathcal{D}(\Sigma/R) = \vec{\delta}_{\Sigma/R} = \sum_{i=1}^n \vec{\delta}_{i/R}$$

3.4 Méthodologie



Démarche de calcul d'un moment dynamique

Cas particuliers

La relation (1) est un cas particulier de la (6).

La relation (2) est un cas particulier de la (7).

La relation (4) est toujours plus simple que la (3).

Si $\vec{A}_{S/R}(G)$ est compliqué, alors la relation (3) peut être très longue.

Si A est un point fixe /R, alors $\vec{V}_{/R}(A) = \vec{0}$ et le chemin (1) → (4) → (7) est plus simple que le chemin (1) → (2) → (3).

Parfois, lorsque l'on ne cherche qu'une seule composante selon \vec{u} , on peut simplifier le calcul.

Calcul d'une projection de la résultante dynamique

$$m\vec{A}_{S/R}(G) \cdot \vec{u} = m \frac{d}{dt} [\vec{V}_{S/R}(G) \cdot \vec{u}] - m\vec{V}_{S/R}(G) \cdot \frac{d}{dt} [\vec{u}]_{/R}$$

Par exemple, pour une liaison glissière de direction \vec{u} .

Calcul d'une projection du moment dynamique

$$\frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{S/R}(A)]_{/R} \cdot \vec{u} = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{S/R}(A) \cdot \vec{u}] - \vec{\sigma}_{S/R}(A) \cdot \frac{d}{dt} [\vec{u}]_{/R}$$

Par exemple, pour une liaison pivot d'axe (A, \vec{u}) .

4 Energie cinétique

Mécanique du point

Le PFD donne :

$$\vec{F} = m\vec{A}$$

On s'intéresse à la composante de la force dans la direction de la vitesse. C'est celle qui travaille et qui met en mouvement. La puissance est donc :

$$\vec{F} \cdot \vec{V} = m\vec{A} \cdot \vec{V} = m \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} = \frac{d\left(\frac{1}{2}m\vec{V}^2\right)}{dt}$$

Pour un point matériel de masse m se déplaçant à une vitesse V dans un repère R , l'énergie cinétique est l'énergie accumulée lors du mouvement. Elle correspond au travail nécessaire pour faire acquérir au point sa vitesse depuis le repos.

$$E_c = \frac{1}{2}m\vec{V}^2$$

4.1 Expression générale

On considère un **système matériel** Σ , c'est-à-dire un ensemble de particules caractérisées par une certaine quantité de matière. Σ cela peut être un solide, plusieurs solides ou un fluide.

On appelle **énergie cinétique** d'un système matériel Σ dans son mouvement par rapport à un repère R la quantité scalaire somme des énergies cinétiques de chacun de ses points.

$$E_{c\Sigma/R} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \vec{V}_{/R}(P)^2 dm \quad (1)$$

L'unité est le Joule [J].

Pour un solide indéformable, le champ $\vec{V}_{S/R}$ est équiprojectif, on a donc :

$$\begin{aligned} E_{cS/R} &= \frac{1}{2} \int_S (\vec{V}_{S/R}(A) + \overline{PA} \wedge \vec{\Omega}_{S/R})^2 dm = \frac{1}{2} \int_S (\vec{V}_{S/R}(A) + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AP})^2 dm \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_S \vec{V}_{S/R}(A)^2 dm}_a + \underbrace{\frac{1}{2} \int_S (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AP})^2 dm}_b + \underbrace{\frac{1}{2} \int_S 2\vec{V}_{S/R}(A) \cdot (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AP}) dm}_c \end{aligned}$$

- Calcul de a :

$$\frac{1}{2} \int_S \vec{V}_{S/R}(A)^2 dm = \frac{1}{2} m \vec{V}_{S/R}(A)^2$$

- Calcul de b :

On reconnaît un produit mixte, on peut faire une permutation circulaire.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_S (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AP})^2 dm &= \frac{1}{2} \int_S (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AP}) \cdot (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AP}) dm = \frac{1}{2} \int_S \vec{\Omega}_{S/R} \cdot (\overline{AP} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AP})) dm \\ &= \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{I}_{A,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R} \end{aligned}$$

(1) Le champ des vecteurs vitesses $\vec{V}_{/R}$ n'est forcément pas équiprojectif, ce n'est pas un torseur.

- Calcul de c :

$$\frac{1}{2} \int_S 2\vec{v}_{S/R}(A) \cdot (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AP}) dm = m\vec{v}_{S/R}(A) \cdot (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AG})$$

Donc finalement :

$$\begin{aligned} E_{cS/R} &= \frac{1}{2} m\vec{v}_{S/R}(A)^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \bar{I}_{A,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R} + m\vec{v}_{S/R}(A) \cdot (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AG}) \\ &= \frac{1}{2} (m\vec{v}_{S/R}(A)^2 + m\vec{v}_{S/R}(A) \cdot (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AG}) + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \bar{I}_{A,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R} + m\vec{v}_{S/R}(A) \cdot (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AG})) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{v}_{S/R}(A) \cdot m(\vec{v}_{S/R}(A) + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overline{AG}) + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \bar{I}_{A,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot (\overline{AG} \wedge m\vec{v}_{S/R}(A))) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{v}_{S/R}(A) \cdot m\vec{v}_{S/R}(G) + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot (\bar{I}_{A,S} \cdot \vec{\Omega}_{S/R} + \overline{AG} \wedge m\vec{v}_{S/R}(A))) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{v}_{S/R}(A) \cdot m\vec{v}_{S/R}(G) + \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \vec{\sigma}_{S/R}(A)) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ m\vec{v}_{S/R}(G) \right\} \odot \left\{ \vec{\Omega}_{S/R} \right\} \quad (1) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \vec{\sigma}_{S/R}(A) \right\} \odot \left\{ \vec{v}_{S/R}(A) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \vec{\sigma}_{S/R} \odot \vec{v}_{S/R} \end{aligned}$$

(1) Lorsque l'on fait une opération entre 2 torseurs à partir de leurs composantes, ils doivent être exprimés au même point.

(2) c'est le produit de 2 fonctions.

(3) L'énergie cinétique ne dépend pas du point A.

Théorème

L'énergie cinétique d'un solide S en mouvement dans un repère R est égale à la moitié du comoment des torseurs cinétique et cinématique.

$$E_{cS/R} = \frac{1}{2} \mathcal{C}(S/R) \odot \mathcal{U}(S/R) = \frac{1}{2} \vec{\sigma}_{S/R} \odot \vec{v}_{S/R} \quad (2)(3)$$

Solide en translation

Pour un solide en translation, on a donc :

$$E_{cS/R} = \frac{1}{2} \left\{ m\vec{v}_{S/R}(G) \right\} \odot \left\{ \vec{0} \right\} = \frac{1}{2} m\vec{v}_{S/R}(G)^2$$

Solide en rotation autour d'un axe immobile dans R

Pour un solide en rotation autour de l'axe immobile (A, \vec{z}) dans R, on a donc :

$$E_{cS/R} = \frac{1}{2} \left\{ \vec{0} \right\} \odot \left\{ \omega \vec{z} \right\} = \frac{1}{2} I_{zz} \omega^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2$$

4.2 Système de solides indéformables

On considère que le système Σ se compose de n solides indéformables S_i en mouvement par rapport à R.

L'énergie cinétique $E_{c\Sigma/R}$ de l'ensemble du système est égale à la somme des énergies cinétiques de chacun des solides indéformables.⁽⁴⁾

$$E_{c\Sigma/R} = \sum_{i=1}^n E_{ci/R} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathcal{C}(i/R) \odot \mathcal{U}(i/R) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \vec{\sigma}_{i/R} \odot \vec{v}_{i/R}$$

(4) Car les solides sont disjoints, ils ne se pénètrent pas.

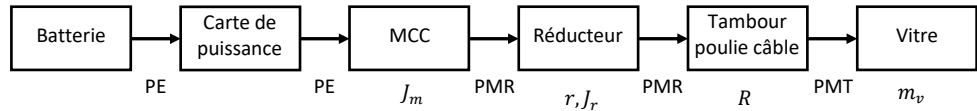
4.3 Masse et moment d'inertie équivalent

Exemple : ouvrant piloté de Bugatti

On s'intéresse à la vitre d'une bugatti Chiron. La chaîne de puissance considérée est ci-dessous.



On associe un repère 0 au châssis, un repère 1 au rotor du moteur, un repère 2 à l'arbre de sortie du réducteur et au tambour, un repère 3 à la vitre.



$$\mathcal{V}(1/0) = \vec{V}_{1/0} = \begin{matrix} A \\ \vec{0} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \omega_m \vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix} \right. \quad \mathcal{V}(2/0) = \vec{V}_{2/0} = \begin{matrix} A \\ \vec{0} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \omega_r \vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix} \right. \quad \mathcal{V}(3/0) = \vec{V}_{3/0} = \begin{matrix} A \\ \vec{V}_v \vec{z} \end{matrix}$$

avec $\omega_r = r \omega_m$ et $V_v = R \omega_r$

On isole l'ensemble des pièces en mouvement par rapport au châssis $\Sigma = \{1,2,3\}$.

$$E_{c\Sigma/0} = E_{c1/0} + E_{c2/0} + E_{c3/0}$$

1/0 et 2/0 sont des mouvements de rotation. 3/0 est un mouvement de translation.

$$E_{c\Sigma/0} = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_r \omega_r^2 + \frac{1}{2} m_v V_v^2 = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_r r^2 \omega_m^2 + \frac{1}{2} m_v R^2 r^2 \omega_m^2 = \frac{1}{2} (J_m + J_r r^2 + m_v R^2 r^2) \omega_m^2 = \frac{1}{2} J_{eq} \omega_m^2$$

(1) J_m et mR^2r^2 sont souvent du même ordre de grandeur.

Industriellement, on dimensionne empiriquement tel que $\frac{mR^2r^2}{J_m} \leq 6$

$J_r r^2$ est souvent négligeable.

Mais on pourrait aussi écrire :

$$E_{c\Sigma/0} = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_r \omega_r^2 + \frac{1}{2} m_v V_v^2 = \frac{1}{2} \frac{J_m}{R^2 r^2} V_v^2 + \frac{1}{2} \frac{J_r}{R^2} V_v^2 + \frac{1}{2} m_v V_v^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{J_m}{R^2 r^2} + \frac{J_r}{R^2} + m_v \right) V_v^2 = \frac{1}{2} M_{eq} V_v^2$$

Le terme M_{eq} est appelé **masse équivalente** des solides en mouvement ramenée sur l'axe effecteur.

Le terme J_{eq} est appelé **moment d'inertie équivalent** des solides en mouvement ramené sur l'axe moteur⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾.

L'utilisation d'une inertie équivalente ou d'une masse équivalente permet d'étudier la loi de mouvement de l'une des pièces du mécanisme en tenant compte de l'intégralité de ses pièces.

5 Dynamique des solides

Principe fondamental de la dynamique

Le PFD permet d'établir une relation entre les actions mécaniques qui sont appliquées à un solide ou un ensemble de solides et les mouvements qui en résultent selon toutes les directions de l'espace.

Enoncé du PFD

Il existe au moins un référentiel galiléen R_g tel que pour tout ensemble matériel Σ et à chaque instant t, le **torseur dynamique** associé au mouvement de ce système par rapport à ce repère est égal au **torseur des actions mécaniques** extérieures exercées sur Σ .

$$\mathcal{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \mathcal{D}(\Sigma/R_g) \Leftrightarrow \vec{M}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma} = \vec{\delta}_{\Sigma/R_g} \Leftrightarrow \sum_i \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{i \rightarrow \Sigma} \\ \vec{M}_{i \rightarrow \Sigma}(A) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} m \vec{A}_{\Sigma/R_g}(G) \\ \vec{\delta}_{\Sigma/R_g}(A) \end{matrix} \right\} \quad (5)(6)$$

On a 1 équation torsorielle, soit 2 équations vectorielles, soit 6 équations scalaires.

Théorème de la Résultante Dynamique (TRD) : $\sum_i \vec{R}_{i \rightarrow \Sigma} = m \vec{A}_{\Sigma/R_g}(G)$

Théorème du Moment Dynamique (TMD)⁽⁷⁾ au point A : $\sum_i \vec{M}_{i \rightarrow \Sigma}(A) = \vec{\delta}_{\Sigma/R_g}(A)$

(2) On choisit en général de ramener sur l'actionneur.

(3) Cette inertie équivalente de tous les solides en mouvement correspond au moment d'inertie d'un

solide fictif, qui, entraîné par le moteur, développerait la même énergie cinétique.

(4) La part de l'inertie équivalente due aux solides situés après le réducteur est souvent négligeable.

(5) C'est l'égalité de 2 fonctions.

(6) i numérote une partition de $\bar{\Sigma}$.

(7) La 2nd équation vectorielle est parfois appelée Théorème du Moment Cinétique en physique.

Le PFD est une égalité entre les quantités d'accélération et les actions mécaniques extérieures. Les 6 équations scalaires obtenues sont à mettre en relation avec les 6 ddl dans l'espace géométrique de dimension 3.

La dynamique permet la résolution de 2 types de problèmes :

- Les efforts sont connus, on détermine les mouvements et on peut dimensionner les actionneurs (moteurs, vérins, ...).
- Les mouvements sont connus, on détermine les efforts et on peut dimensionner les pièces soumises à des accélérations (bielles, suspensions, structures, ...).

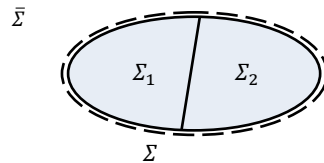
Les conséquences de ce principe sont nombreuses.

5.2 Théorème des actions réciproques

(1) On parle de partition si $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$ et $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$

(2) On pourrait aussi utiliser la notation $\mathcal{F}(\bar{1} \rightarrow 1) = \mathcal{D}(1/R_g)$

On considère un système matériel Σ dont une partition⁽¹⁾ est Σ_1 et Σ_2 . On applique le PFD à Σ_1, Σ_2 et Σ ⁽²⁾.



$$\vec{M}_{\bar{1} \rightarrow 1} = \vec{\delta}_{1/R_g} \quad (1)$$

$$\vec{M}_{\bar{2} \rightarrow 2} = \vec{\delta}_{2/R_g} \quad (2)$$

$$\vec{M}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma} = \vec{\delta}_{\Sigma/R_g} \quad (3)$$

On a

$$\vec{\delta}_{\Sigma/R_g} = \vec{\delta}_{1/R_g} + \vec{\delta}_{2/R_g}$$

$$\vec{M}_{\bar{1} \rightarrow 1} = \vec{M}_{2 \rightarrow 1} + \vec{M}_{\bar{\Sigma} \rightarrow 1}$$

$$\vec{M}_{\bar{2} \rightarrow 2} = \vec{M}_{1 \rightarrow 2} + \vec{M}_{\bar{\Sigma} \rightarrow 2}$$

$$\vec{M}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma} = \vec{M}_{\bar{\Sigma} \rightarrow 1} + \vec{M}_{\bar{\Sigma} \rightarrow 2}$$

En faisant (1) + (2) – (3), on démontre :

Théorème des actions réciproques

Soient 2 systèmes matériels quelconques Σ_1 et Σ_2 disjoints. Le torseur des actions mécaniques exercées par 1 → 2 est l'opposé du torseur des actions mécaniques exercées par 2 → 1.

$$\vec{M}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{M}_{2 \rightarrow 1} \quad (3) \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{1 \rightarrow 2}(A) \end{cases} = - \begin{cases} \vec{R}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{2 \rightarrow 1}(A) \end{cases}$$

$$(3) \mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = -\mathcal{F}(2 \rightarrow 1)$$

5.3 Théorèmes de l'équilibre

On appelle **équilibre** un mouvement nul.

Théorème de l'équilibre⁽⁴⁾⁽⁵⁾ (TDLE) :

Si un solide S est à l'**équilibre** par rapport à un **référentiel Galiléen** alors la somme des torseurs des **actions mécaniques** du milieu extérieur sur S est **nulle**.

$$\forall t, \forall P \quad \vec{V}_{S/R_g}(P) = \vec{0} \Rightarrow \forall t \sum_i \vec{M}_{i \rightarrow S} = \vec{0} \quad (6)$$

$$\Rightarrow \sum_i \begin{cases} \vec{R}_{i \rightarrow S} \\ \vec{M}_{i \rightarrow S}(A) \end{cases} = A \begin{cases} \vec{0} \\ \vec{0} \end{cases}$$

L'équation torsorielle ci-dessus conduit donc à l'écriture de **2 équations vectorielles** :

$$\text{Théorème de la Résultante Statique (TRS) : } \sum_i \vec{R}_{i \rightarrow S} = \vec{0}$$

$$\text{Théorème du Moment Statique (TMS) au point A : } \sum_i \vec{M}_{i \rightarrow S}(A) = \vec{0}$$

Si \vec{V} est un champ uniforme et constant, alors : $\vec{\delta}_{S/R_g} = \vec{0}$ ⁽⁷⁾

(4) Appelé parfois Principe Fondamental de la Statique (PFS) si on n'a pas admis un principe plus général avant.

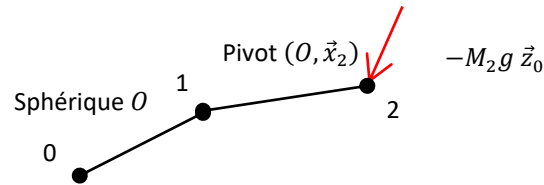
(5) La réciproque est fautive.

$$(6) \forall t \sum_i \mathcal{F}(i \rightarrow S) = \mathcal{O}$$

La fonction torsorielle nulle pourrait se noter $\vec{0}$.

$$(7) \mathcal{D}(S \rightarrow R_g) = \mathcal{O}$$

Question 4 : Tracer le graphe de structure du gyroscope



Question 5 : Indiquer et justifier une démarche de résolution.

On cherche à appliquer le PFD à Σ en O. Car le point O est un point de vitesse nulle dans 1/0 et 2/0.

Question 6 : Lister les AM extérieures à Σ .

On isole Σ .

On fait le BAME :

On néglige l'action de pesanteur sur 1.

$$\mathcal{F}_{0 \rightarrow 1} = \vec{M}_{0 \rightarrow 1} = \begin{matrix} \blacksquare \\ O \end{matrix} \begin{matrix} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} \\ \vec{0} \end{matrix}$$

$$\mathcal{F}_{t \rightarrow 2} = \vec{M}_{t \rightarrow 2} = \begin{matrix} \blacksquare \\ G_2 \end{matrix} \begin{matrix} \vec{R}_{t \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{matrix} = \begin{matrix} \blacksquare \\ O \end{matrix} \begin{matrix} -m_2 g \vec{z}_0 \\ m_2 g L \cos \beta \vec{y}_1 \end{matrix}$$

$$\vec{M}_{t \rightarrow 2}(O) = \vec{M}_{t \rightarrow 2}(G_2) + \vec{OG}_2 \wedge -m_2 g \vec{z}_0 = L \vec{x}_1 \wedge -m_2 g \vec{z}_0 = m_2 g L \cos \beta \vec{y}_1$$

Question 7 : Calculer le moment dynamique de $\Sigma/0$.

$$\vec{\delta}_{\Sigma/0}(O) = \vec{\delta}_{1/0}(O) + \vec{\delta}_{2/0}(O)$$

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha} \vec{z}_0 + \dot{\beta} \vec{y}_1 = -\dot{\alpha} \sin \beta \vec{x}_1 + \dot{\beta} \vec{y}_1 + \dot{\alpha} \cos \beta \vec{z}_1$$

On veut que $\vec{I}_{O,1}$ et $\vec{\Omega}_{1/0}$ soient exprimées dans B_1

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{1/0}(O) &= \vec{I}_{O,1} \cdot \vec{\Omega}_{1/0} + \vec{OG}_1 \wedge m \vec{V}_{1/0}(O) = \vec{I}_{O,1} \cdot \vec{\Omega}_{1/0} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}_{(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \approx \vec{0} \end{aligned}$$

$$\vec{\delta}_{1/0}(O) = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{1/0}(O)]_0 + \vec{V}_{1/0}(O) \wedge m \vec{V}_{1/0}(G_1) = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{1/0}(O)]_0 \approx \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}_{2/0} = (\dot{\gamma} - \dot{\alpha} \sin \beta) \vec{x}_1 + \dot{\beta} \vec{y}_1 + \dot{\alpha} \cos \beta \vec{z}_1$$

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{2/0}(O) &= \vec{I}_{O,2} \cdot \vec{\Omega}_{2/0} + \vec{OG}_2 \wedge m \vec{V}_{2/0}(O) = \vec{I}_{O,2} \cdot \vec{\Omega}_{2/0} \\ &= \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_{(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \begin{pmatrix} \dot{\gamma} - \dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \approx A_2 (\dot{\gamma} - \dot{\alpha} \sin \beta) \vec{x}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_{2/0}(O) &= \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{2/0}(O)]_0 + \vec{V}_{2/0}(O) \wedge m \vec{V}_{2/0}(G_2) = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{2/0}(O)]_0 = \frac{d}{dt} [A_2 (\dot{\gamma} - \dot{\alpha} \sin \beta) \vec{x}_1]_0 \\ &= A_2 (\ddot{\gamma} - \ddot{\alpha} \sin \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta) \vec{x}_1 + A_2 (\dot{\gamma} - \dot{\alpha} \sin \beta) \frac{d}{dt} [\vec{x}_1]_0 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} [\vec{x}_1]_0 = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x}_1 = (\dot{\gamma} - \dot{\alpha} \sin \beta) \vec{x}_1 + \dot{\beta} \vec{y}_1 + \dot{\alpha} \cos \beta \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = \dot{\alpha} \cos \beta \vec{y}_1 - \dot{\beta} \vec{z}_1$$

$$= A_2 (\ddot{\gamma} - \ddot{\alpha} \sin \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta) \vec{x}_1 + A_2 (\dot{\gamma} - \dot{\alpha} \sin \beta) \dot{\alpha} \cos \beta \vec{y}_1 - A_2 (\dot{\gamma} - \dot{\alpha} \sin \beta) \dot{\beta} \vec{z}_1$$

Question 8 : Sans résoudre les équations du mouvement, déterminer la direction principale du mouvement 1/0.

On applique le PFD à Σ en O.

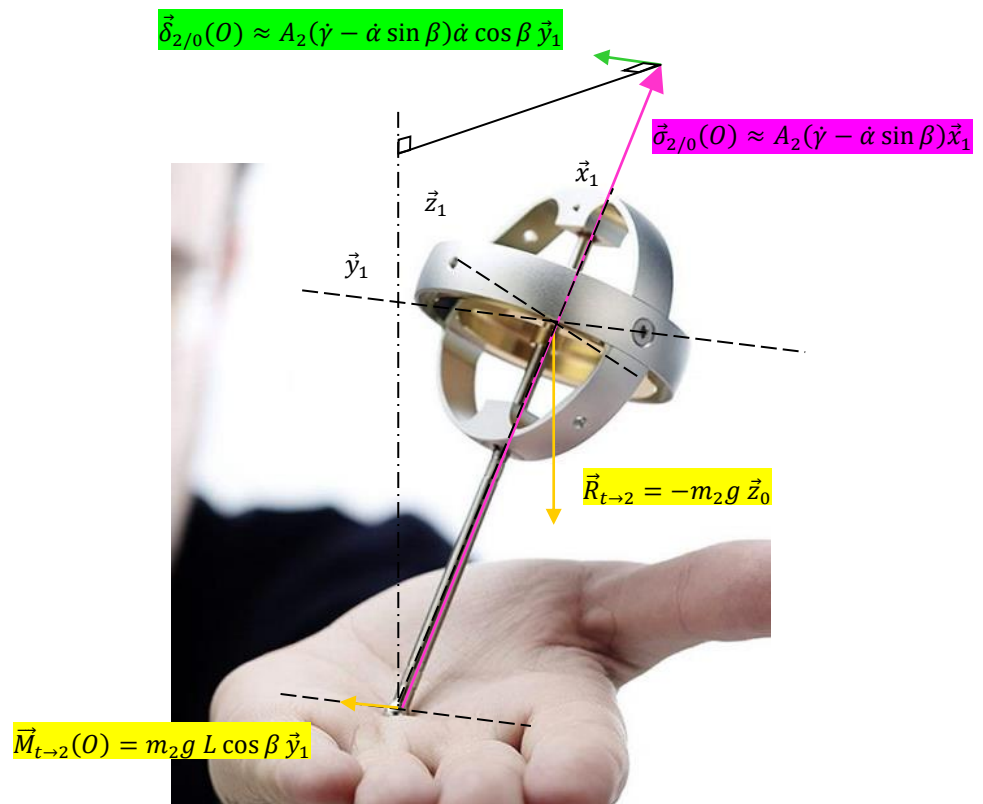
$$\vec{M}_{0 \rightarrow 2}(O) + \vec{M}_{t \rightarrow 2}(O) = \vec{\delta}_{2/0}(O)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 g L \cos \beta \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} = \begin{pmatrix} A_2(\dot{\gamma} - \ddot{\alpha} \sin \beta - \dot{\alpha} \beta \cos \beta) \\ A_2(\dot{\gamma} - \ddot{\alpha} \sin \beta) \dot{\alpha} \cos \beta \\ -A_2(\dot{\gamma} - \ddot{\alpha} \sin \beta) \beta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

La composante selon \vec{y}_1 est la plus importante car la vitesse de rotation $\dot{\gamma} = 12000 \text{ tr/min}$ est très importante.

On pourrait tracer $\alpha(t)$ et $\gamma(t)$ avec une intégration numérique.

Question 9 : Dessiner les différents vecteurs $\vec{R}_{t \rightarrow 2}$, $\vec{M}_{t \rightarrow 2}(O)$, $\vec{\sigma}_{2/0}(O)$, $\vec{\delta}_{2/0}(O)$ sur la photo.



La variation du moment cinétique est donc quasi uniquement dans le même sens que le moment du poids ! Donc le gyroscope tourne dans votre main et ne tombe pas !

Tout comme il est difficile de modifier un mouvement de translation qui va vite, il est difficile de modifier un mouvement de rotation qui va vite !

5.4 Equilibrage

Une application du PFD est l'équilibrage d'un solide en rotation autour d'un axe fixe. Lorsqu'un solide possède une mauvaise répartition de matière autour de cet axe, des forces tournantes indésirables provoquent des vibrations nuisibles.

Un solide en rotation non verticale est équilibré statiquement (à l'arrêt) si quelle que soit sa position angulaire, il ne se met pas à tourner sous l'effet de son poids.

Un solide en rotation est équilibré dynamiquement si les actions mécaniques transmises dans les liaisons entre le rotor et le bâti sont indépendantes de la position angulaire du rotor quel que soit le mouvement de rotation du rotor.

Un solide est dit **équilibré** lors de sa rotation autour d'un axe fixe si et seulement si :

Equilibrage statique :

– Son centre de masse est sur l'axe de rotation.

Equilibrage dynamique :

– Son centre de masse est sur l'axe de rotation⁽¹⁾.

– L'axe de rotation est un axe principal d'inertie.



Equilibreuse de roue

(1) Si un solide est équilibré dynamiquement alors il est équilibré statiquement.

6 Puissance

6.1 Puissance d'une action mécanique

On appelle puissance de l'action mécanique $2 \rightarrow 1$ dans le mouvement $1/R$ la quantité scalaire somme des puissances élémentaires développées au niveau de chacun des points du solide considéré S_1 .

$$P_{2 \rightarrow 1/R} = \int_{S_1} \vec{f}_{2 \rightarrow 1}(P) \cdot \vec{v}_{1/R}(P) dm \quad (2)(3)$$

Son unité est le Watt [W].

(2) On note

$$P_{2 \rightarrow 1,1/R} = P_{2 \rightarrow 1/R}$$

(3) La puissance dépend du repère dans lequel elle est calculée.

Pour un solide indéformable, le champ $\vec{v}_{1/R}$ est équiprojectif, on a donc :

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \vec{f}_{2 \rightarrow 1}(P) \cdot \vec{v}_{1/R}(P) dm &= \int_{S_1} \vec{f}_{2 \rightarrow 1}(P) \cdot \vec{v}_{1/R}(A) dm + \int_{S_1} \vec{f}_{2 \rightarrow 1}(P) \cdot \overline{PA} \wedge \vec{\Omega}_{1/R} dm \\ &= \int_{S_1} \vec{f}_{2 \rightarrow 1}(P) dm \cdot \vec{v}_{1/R}(A) + \int_{S_1} \vec{\Omega}_{1/R} \cdot (\overline{AP} \wedge \vec{f}_{2 \rightarrow 1}(P)) dm \\ &= \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_{1/R}(A) + \vec{\Omega}_{1/R} \cdot \int_{S_1} (\overline{AP} \wedge \vec{f}_{2 \rightarrow 1}(P)) dm \\ &= \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_{1/R}(A) + \vec{\Omega}_{1/R} \cdot \vec{M}_{2 \rightarrow 1}(A) = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{2 \rightarrow 1}(A) \end{Bmatrix} \odot \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{1/R} \\ \vec{v}_{1/R}(A) \end{Bmatrix} = \vec{M}_{2 \rightarrow 1} \odot \vec{v}_{1/R} \end{aligned}$$

On appelle **puissance** de l'action mécanique $2 \rightarrow 1$ dans le mouvement $1/R$ la quantité scalaire obtenue par comoment du torseur associé à l'action mécanique $2 \rightarrow 1$ et du torseur cinématique associé au mouvement $1/R$.

$$P_{2 \rightarrow 1/R} = \vec{M}_{2 \rightarrow 1} \odot \vec{v}_{1/R} \quad (4)$$

On parle de **puissance galiléenne** lorsque le mouvement est exprimé par rapport à R_g .

(4) Si $P_{\dots} > 0$, on parle d'action motrice, sinon d'action résistante.

$$P(2 \rightarrow 1/R)$$

$$= \mathcal{F}(2 \rightarrow 1) \odot \mathcal{U}(1/R)$$

6.2 Puissance des interefforts

Soit 2 solides indéformables S_1 et S_2 .

On appelle **puissance des interefforts** la puissance de l'action mécanique d'un solide 1 sur un solide 2 dans leur mouvement relatif $2/1$.

$$P_{1 \leftrightarrow 2} = \vec{M}_{1 \rightarrow 2} \odot \vec{V}_{2/1} = \vec{M}_{2 \rightarrow 1} \odot \vec{V}_{1/2} \quad (1)$$

Elle ne dépend pas du repère.

$$(1) P(1 \leftrightarrow 2)$$

$$= \mathcal{F}(1 \rightarrow 2) \odot \mathcal{U}(2/1)$$

$$= \mathcal{F}(2 \rightarrow 1) \odot \mathcal{U}(1/2)$$

6.3 Rendement

On définit le rendement d'un système comme étant $\eta = \left| \frac{P_s}{P_e} \right|$.

La puissance dissipée est donc de $P_{dis} = (1 - \eta)P_e$

Exemple en régime permanent :



6.4 Puissance des interefforts de liaison

Si la puissance dissipée au niveau d'une liaison est nulle alors

$$P_{1 \leftrightarrow 2} = 0 \Leftrightarrow \vec{M}_{1 \rightarrow 2} \odot \vec{V}_{1/R} = 0 \quad (2)$$

Si une **liaison** est **parfaite** alors le mouvement est sans pertes $P_{1 \leftrightarrow 2} = 0$.

Si on néglige le frottement dans un contact par glissement, on a un modèle de liaison parfaite.

Si on néglige la résistance au roulement dans un contact par roulement, on a un modèle de liaison parfaite.

(2) Les torseurs des actions mécaniques transmissibles et cinématiques d'une liaison parfaite ont une forme duale.

$$P(1 \leftrightarrow 2) =$$

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) \odot \mathcal{U}(2/1) = \mathcal{O}$$

7 Théorème de la puissance cinétique

Le TPC⁽³⁾ permet de déterminer l'équation du mouvement. Elle est déduite du PFD, ce n'est pas une équation supplémentaire.

Il est pertinent d'utiliser le TPC lorsque l'on étudie un système ayant une seule mobilité utile.

Contrairement au PFD, une action mécanique qui ne travaille pas ne peut pas être déterminée avec le TPC.

7.1 1 solide

Pour un solide indéformable unique S , la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique galiléenne est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures qui lui sont appliquées.

$$\frac{dE_{c S/R_g}}{dt} = P_{\vec{S} \rightarrow S/R_g} = \vec{M}_{\vec{S} \rightarrow S} \odot \vec{V}_{S/R_g} \quad (4)$$

Démonstration

Soit un solide indéformable S en mouvement dans un référentiel galiléen.

$$\vec{M}_{\vec{S} \rightarrow S} = \vec{\delta}_{S/R_g}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_{\vec{S} \rightarrow S} \odot \vec{V}_{S/R_g} = \vec{\delta}_{S/R_g} \odot \vec{V}_{S/R_g}$$

(3) Parfois abusivement appelé Théorème de l'Energie Cinétique (TEC).

(4) Parfois abusivement appelé Théorème de l'Energie Cinétique (TEC).

$$P(\vec{S} \rightarrow S/R_g)$$

$$= \mathcal{F}(\vec{S} \rightarrow S) \odot \mathcal{U}(S/R_g)$$

Soit A un point quelconque et P un point courant.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{M}_{\bar{S} \rightarrow S} \odot \vec{V}_{S/R_g} &= A \left\{ \int_S \vec{A}_{S/R_g}(P) dm \right. \odot A \left. \left\{ \vec{\Omega}_{S/R_g} \right. \right. \\ &\quad \left. \int_S \overline{AP} \wedge \vec{A}_{S/R_g}(P) dm \right. \left. \left. \vec{V}_{S/R_g}(A) \right. \right. \\ &= \vec{V}_{S/R_g}(A) \cdot \int_S \vec{A}_{S/R_g}(P) dm + \vec{\Omega}_{S/R_g} \cdot \int_S \overline{AP} \wedge \vec{A}_{S/R_g}(P) dm \end{aligned}$$

Or $\vec{V}_{S/R_g}(A) = \vec{V}_{S/R_g}(P) + \overline{AP} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_g}$

$$= \vec{V}_{S/R_g}(P) \cdot \int_S \vec{A}_{S/R_g}(P) dm + \overline{AP} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_g} \cdot \int_S \vec{A}_{S/R_g}(P) dm + \vec{\Omega}_{S/R_g} \cdot \int_S \overline{AP} \wedge \vec{A}_{S/R_g}(P) dm$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale, on peut écrire le produit mixte :

$$\begin{aligned} &= \vec{V}_{S/R_g}(P) \cdot \int_S \vec{A}_{S/R_g}(P) dm + \int_S \overline{AP} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_g} \cdot \vec{A}_{S/R_g}(P) dm + \int_S \overline{AP} \wedge \vec{A}_{S/R_g}(P) \cdot \vec{\Omega}_{S/R_g} dm \\ &= \vec{V}_{S/R_g}(P) \cdot \int_S \vec{A}_{S/R_g}(P) dm - \int_S \overline{AP} \wedge \vec{A}_{S/R_g}(P) \cdot \vec{\Omega}_{S/R_g} dm + \int_S \overline{AP} \wedge \vec{A}_{S/R_g}(P) \cdot \vec{\Omega}_{S/R_g} dm \\ &= \int_S \vec{V}_{S/R_g}(P) \cdot \vec{A}_{S/R_g}(P) dm \\ &= \int_S \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{V}_{S/R_g}(P)^2 \right) dm \\ &= \frac{d}{dt} \int_S \left(\frac{1}{2} \vec{V}_{S/R_g}(P)^2 \right) dm \\ &= \frac{dE_{c S/R_g}}{dt} \end{aligned}$$

On en déduit l'expression du théorème de l'énergie cinétique dans le cas d'un solide indéformable.

$$\Rightarrow \vec{M}_{\bar{S} \rightarrow S} \odot \vec{V}_{S/R_g} = \frac{dE_{c S/R_g}}{dt}$$

La dérivée de l'énergie cinétique est le comoment du champ des moments et du champ des vitesses.

7.2 2 solides

Pour un système matériel Σ formé de 2 solides indéformables 1 et 2, la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique galiléenne est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à ce système et de la puissance des interefforts entre 1 et 2.

$$\frac{dE_{c \Sigma/R_g}}{dt} = P_{\bar{S} \rightarrow \Sigma/R_g} + P_{1 \leftrightarrow 2}$$

Démonstration

Soit Σ un système matériel formé de 2 solides indéformables 1 et 2, avec $\Sigma = 1 \cup 2$ et $1 \cap 2 = \emptyset$.

$$\frac{dE_{c \Sigma/R_g}}{dt} = \frac{dE_{c 1/R_g}}{dt} + \frac{dE_{c 2/R_g}}{dt}$$

En appliquant le TPC à chaque solide :

$$\begin{aligned} \frac{dE_{c 1/R_g}}{dt} &= P_{\bar{1} \rightarrow 1/R_g} = P_{\bar{\Sigma} \rightarrow 1/R_g} + P_{2 \rightarrow 1/R_g} \\ \frac{dE_{c 2/R_g}}{dt} &= P_{\bar{2} \rightarrow 2/R_g} = P_{\bar{\Sigma} \rightarrow 2/R_g} + P_{1 \rightarrow 2/R_g} \end{aligned}$$

En sommant

$$\frac{dE_{c \Sigma/R_g}}{dt} = P_{\bar{\Sigma} \rightarrow 1/R_g} + P_{\bar{\Sigma} \rightarrow 2/R_g} + P_{2 \rightarrow 1/R_g} + P_{1 \rightarrow 2/R_g} = P_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_g} + P_{1 \leftrightarrow 2}$$

Car

$$P_{2 \rightarrow 1/R_g} + P_{1 \rightarrow 2/R_g} = \vec{M}_{2 \rightarrow 1} \odot \vec{V}_{1/R_g} + \vec{M}_{1 \rightarrow 2} \odot \vec{V}_{2/R_g} = \vec{M}_{2 \rightarrow 1} \odot (\vec{V}_{1/R_g} - \vec{V}_{2/R_g}) = \vec{M}_{2 \rightarrow 1} \odot \vec{V}_{1/2} = P_{1 \leftrightarrow 2}$$

7.3 n solides

Pour un système matériel Σ formé de n solides indéformables, la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique galiléenne est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à ce système et de la puissance des interefforts.

$$\frac{dE_{c \Sigma/R_g}}{dt} = \underbrace{P_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_g}}_{P_{ext}} + \underbrace{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n P_{S_i \leftrightarrow S_j}}_{P_{int}} \quad (1)$$

(1) Par exemple pour
 $n = 3 : P_{int} = P_{S_1 \leftrightarrow S_2} +$
 $P_{S_1 \leftrightarrow S_3} + P_{S_2 \leftrightarrow S_3}$

ANNEXE

Applications

$A \rightarrow f(A)$: champ scalaire	ex : champ de pressions	$A \rightarrow P(A)$
$A \rightarrow \vec{f}(A)$: champ vectoriel	ex : champ de vitesses	$A \rightarrow \vec{V}(A)$
$A \rightarrow \bar{f}(A)$: champ tensoriel	ex : champ tensoriel	$A \rightarrow \bar{I}(A)$
$\vec{u} \rightarrow f(\vec{u})$: opérateur scalaire = forme	ex : produit scalaire	
$\vec{u} \rightarrow \vec{f}(\vec{u})$: opérateur vectoriel	ex : produit vectoriel	

Notations

$$\bar{I}_{A,S} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = I_{11} \vec{x} \otimes \vec{x} + I_{12} \vec{x} \otimes \vec{y} + I_{21} \vec{y} \otimes \vec{x} + I_{22} \vec{y} \otimes \vec{y} + I_{33} \vec{z} \otimes \vec{z}$$

\otimes est le produit tensoriel à ne pas confondre avec le comoment \odot ou \times .

QUESTIONS DE COURS

Donner les relations qui permettent de déterminer la position du centre de masse.

Donner la définition d'un moment d'inertie par rapport à un axe, ainsi que son unité.

Exprimer les différents éléments d'une matrice d'inertie.

Donner la notion de base principale d'inertie.

Donner les simplifications d'une matrice d'inertie qu'impose :

- un ou plusieurs plans de symétrie ;
- un axe de révolution ;
- une dimension négligeable devant les deux autres.

Donner le théorème d'Huygens.

Donner l'expression des résultantes cinétique et dynamique.

Donner l'expression des moments cinétique et dynamique dans les 2 cas particuliers (au centre de gravité G et en un point fixe du référentiel galiléen).

Donner les méthodes pour déterminer les moments cinétique et dynamique.

Donner l'expression du PFD.

Donner la méthode pour déterminer une équation différentielle de mouvement ou une loi de commande en effort.

Expliquer la différence entre énergie et puissance. Donner la relation mathématique qui les relie.

Donner l'expression du théorème de l'énergie cinétique appliqué à un ensemble de solides.

Quel est l'ensemble de solides à isoler pour utiliser ce théorème ?

Donner l'expression de l'énergie cinétique appliqué à un solide, puis à un ensemble de solides.

Donner les différents cas de son expression.

Comment détermine-t-on l'inertie équivalente ou la masse équivalente de tous les solides en mouvement ?

Donner l'expression de la puissance des actions mécaniques extérieures à un solide, puis à un ensemble de solides.

Donner l'expression de la puissance des actions mécaniques intérieures à un ensemble de solides.

Déterminer les puissances des actions de liaisons lors de frottements sec et fluide.

Donner l'expression de la puissance dissipée en fonction du rendement.

Qu'appelle-t-on équilibrage statique et équilibrage dynamique.

Comment équilibrer un solide en rotation autour d'un axe fixe.

Performances des systèmes asservis

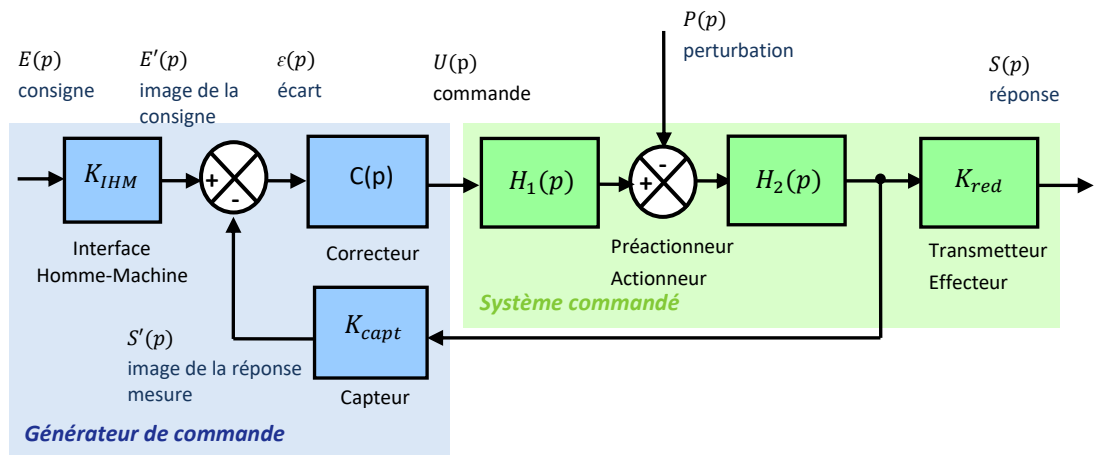
(1) La robustesse caractérise l'insensibilité du système aux perturbations extérieures.

Le souhait de l'ingénieur est d'avoir un système stable, rapide, précis et robuste⁽¹⁾. Asservir un système permet d'en améliorer les performances globales. Un système, instable en tant que système commandé, peut devenir stable une fois asservi. A l'inverse, il faut être attentif à ne pas rendre un système instable, ce qui entraînerait sa destruction. On s'intéresse dans ce cours aux SLCI.

1 Systèmes commandés, systèmes asservis et perturbations

1.1 Schéma-bloc d'une grandeur asservie perturbée

La schéma bloc d'un système asservi perturbé est de la structure suivante :



Ce système possède 2 entrées et 1 sortie.

On souhaite rendre le système insensible aux perturbations. Pour cela, la commande doit être indépendante de l'utilisateur pour qu'elle puisse s'adapter aux variations de sortie dues aux perturbations.

Un **système asservi** est un système capable d'élaborer de manière **autonome** sa grandeur de **commande** à partir d'une valeur de **consigne** et d'une **mesure** de la réponse avec un **capteur**.

Une **grandeur de sortie** d'une activité d'un système est **asservie** si :

- il y a une **boucle de retour** avec un **capteur** ;
- un **correcteur** améliore les performances ;

Un système asservi est nécessairement bouclé, mais la **réciproque n'est pas vraie**.

On parle de système **suiveur** ou de poursuite lorsque l'entrée varie.

On parle de système **régulé**⁽²⁾ lorsque l'entrée est constante.

On appelle **perturbation**, toute cause susceptible de modifier la sortie **indépendamment du signal de commande**.

Une perturbation est une entrée non fournie par l'utilisateur.

$$\varepsilon(p) = E'(p) - S'(p) = K_{IHM} E(p) - \frac{K_{capt}}{K_{red}} S(p)$$

On veut que si $E(p) = S(p)$ alors $\varepsilon(p) = 0$, donc :

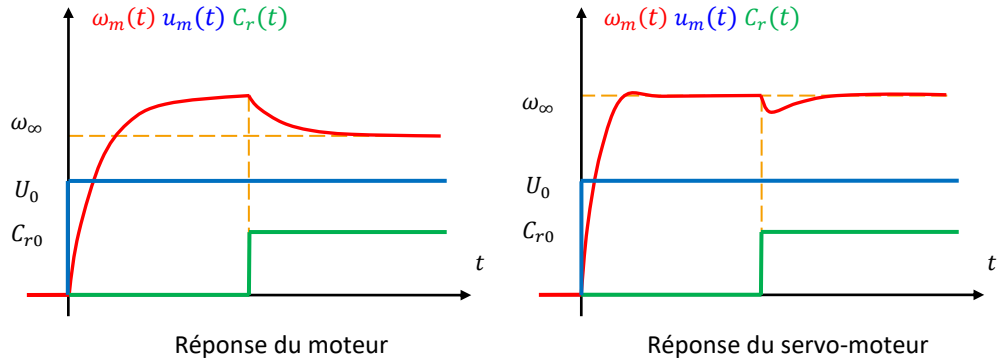
$$K_{IHM} = \frac{K_{capt}}{K_{red}}$$

On peut alors se ramener à un retour unitaire.

(2) Régulateur de vitesse, régulateur de chauffage...

Exemple : réponse d'un MCC perturbé à un échelon de tension

Prenons deux entrées positives.

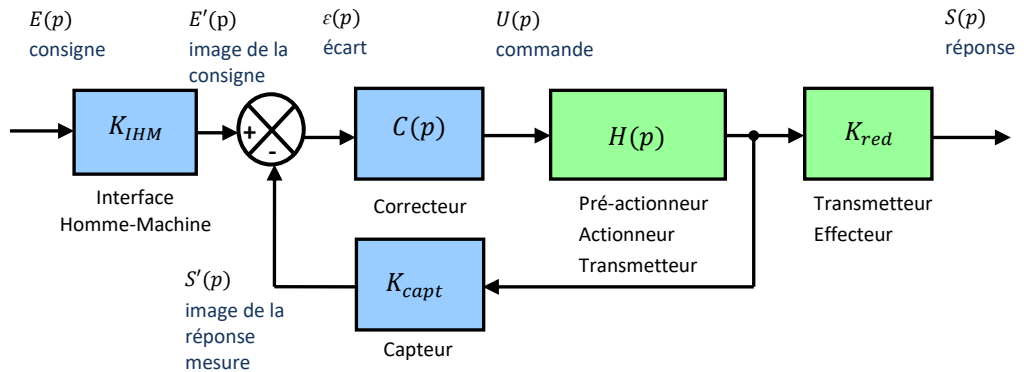


La perturbation réduit la vitesse de rotation du moteur.

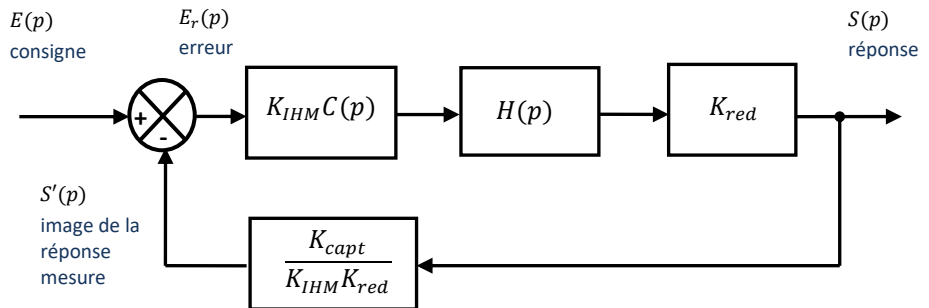
La correction réduit l'influence de la perturbation.

1.2 FTBO et FTBF

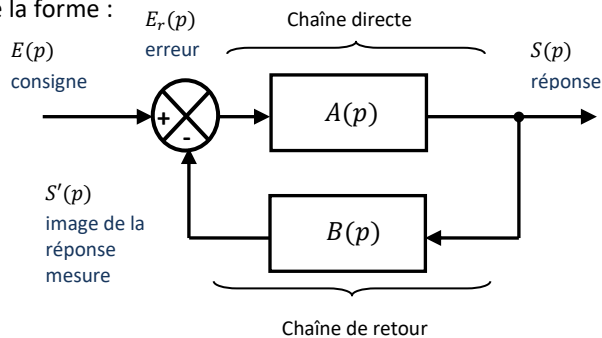
On considère un système asservi non perturbé à une entrée dans le cas générale.



On peut faire la transformation suivante :



Le schéma est donc de la forme :



Lorsque l'on fait des transformations de schéma bloc, on s'éloigne de la réalité technologique du système. Cependant, avec cette écriture, l'écart est égal à l'erreur. Plus l'écart est petit, plus le système est précis.

(1) On note parfois $F(p)$ pour la FTBO et $H(p)$ pour la FTBF.

Un système asservi est constitué de deux chaînes :

- la **chaîne directe**, entre le comparateur et le point de prélèvement du capteur, qui assure les fonctions de commande et de puissance ;
- la **chaîne de retour**, entre le point de prélèvement du capteur et le comparateur, qui assure la fonction de mesure de la réponse.

Si $R(p) = 1$, on parle de retour unitaire.

On définit la **fonction de transfert en boucle ouverte**⁽¹⁾ par :

$$FTBO(p) = \frac{S'(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{S'(p)}{E(p)} = A(p)B(p)$$

Et la **fonction de transfert en boucle fermée** par :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1+A(p)B(p)}$$

La FTBO est de la forme :

$$FTBO(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{1 + a_1 p + \dots + a_{n-\alpha} p^{n-\alpha}}$$

K : gain statique

α : classe ≥ 0

n : ordre

On appelle **zéros**, les **racines du numérateur** $N(p)$ de la fonction de transfert.

On appelle **pôles**, les **racines du dénominateur** $D(p)$ de la fonction de transfert.

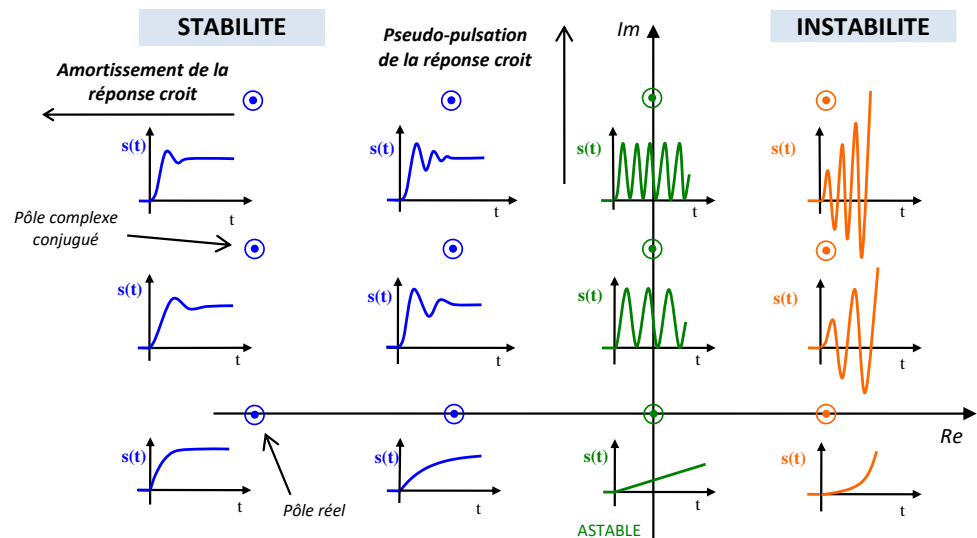
2 Stabilité des systèmes

2.1 Conditions de stabilité – critère algébrique

Condition nécessaire et suffisante de stabilité

- Un modèle peut donc posséder :
- des pôles réels $p = a$;
 - des pôles complexes conjugués $p = c \pm j d$.

Pour mieux comprendre l'**influence des pôles** de la fonction de transfert d'un système, l'**allure de la réponse à une entrée en échelon** a été représentée selon la position de ces pôles **dans le plan complexe** :



La stabilité d'un système ne dépend que des pôles de la fonction de transfert.

Un système est **stable** au sens EBSB si les **pôles** de sa fonction de transfert sont tous à **partie réelle strictement négative**.

Les **pôles réels ne génèrent pas d'oscillation** alors que les **pôles complexes conjugués font apparaître des oscillations**.

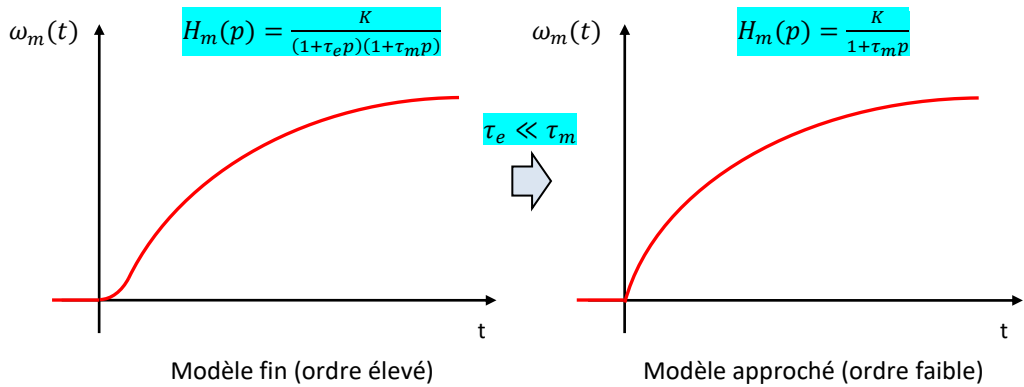
On appelle **pôle dominant** le pôle qui a une contribution significative par rapport aux autres sur la réponse.

2.2 Réduction de l'ordre d'un modèle

Plus on **modélise finement** un système réel, plus sa fonction de transfert est d'un **ordre élevé**. En parallèle, on constate que son comportement dynamique reste très voisin de système de fonction de transfert d'ordre inférieur. Si les différences comportementales sont faibles, il peut être intéressant, de substituer au modèle complexe un modèle simplifié, dont l'étude est plus économique.

S'ils sont suffisamment **éloignés des pôles dominants**, les pôles à partie réelle négative peuvent être **négligés**.

Exemple : MCC



Condition nécessaire de stabilité

Prenons une fonction de transfert quelconque, d'un **système asservi ou non**.

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}$$

Concernant le dénominateur de cette fonction de transfert, appelé **polynôme caractéristique**, si un des coefficients a_i n'est pas **strictement positif**, alors il y a au moins une racine à partie réelle positive ou nulle.

Pour qu'un système soit **stable** au sens EBSB il est nécessaire⁽¹⁾ que les **coefficients a_i de son dénominateur** soient tous **strictement positifs**.

La présence d'un coefficient négatif ou nul au dénominateur suffit pour affirmer l'instabilité du système.

2.3 Conditions de stabilité – critère graphique

On considère un système asservi, sa FTBF est de la forme :

$$FTBF(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{A(p)}{1 + FTBO(p)}$$

Pour déterminer si le système est stable, on s'intéresse aux pôles.

Point critique

$$1 + FTBO(p) = 0 \Rightarrow FTBO(p) = -1$$

Etudier les pôles de divergence, les racines du dénominateur, revient à étudier quand la FTBO⁽²⁾ s'approche du point critique -1 .

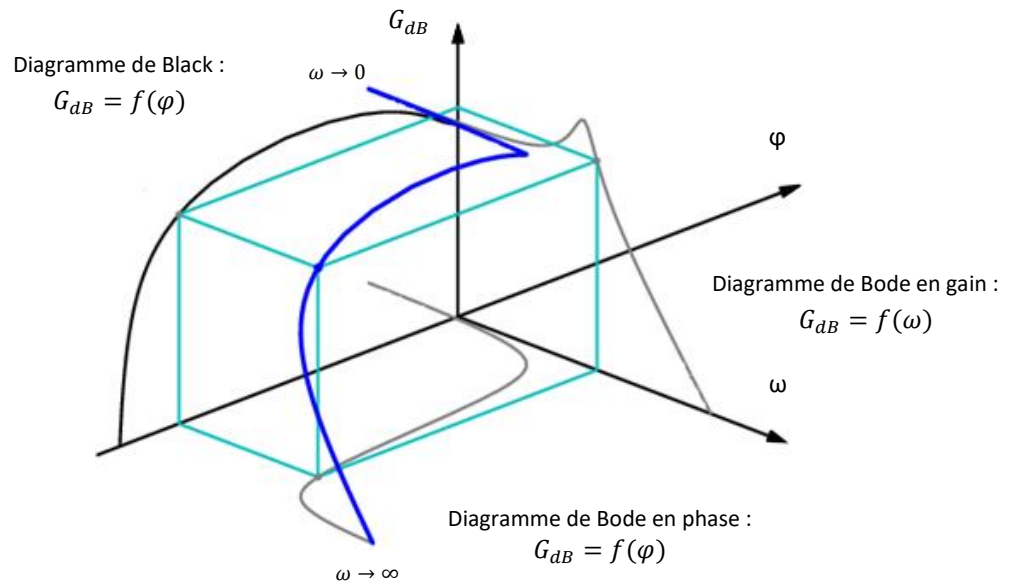
Si le dénominateur s'approche de 0, la FTBF devient très grande. Ce point critique correspond donc à un lieu d'instabilité que l'on doit éviter pour garantir la stabilité du système.

On appelle **point critique** le nombre -1 dans l'espace des complexes, il s'agit du point de coordonnées $(-180^\circ, 0dB)$ dans le plan de Black.

(1) Nécessaire ne veut pas dire suffisant.

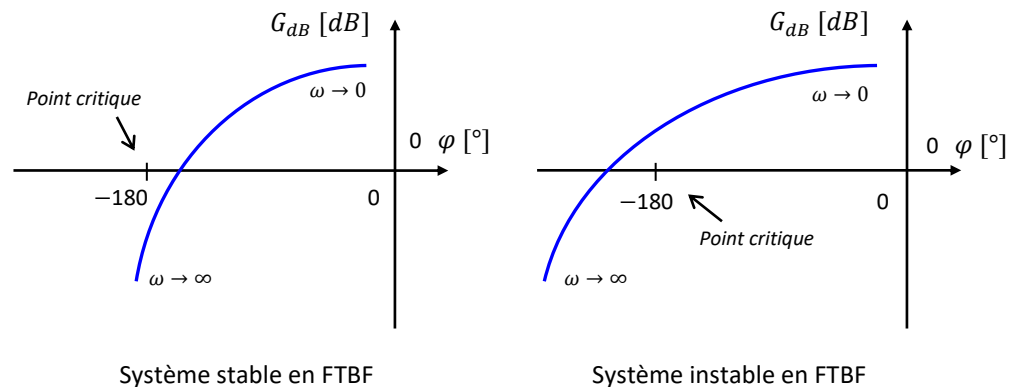
(2) On obtient donc des informations sur la stabilité de la FTBF à partir de l'étude de la FTBO !

On appelle lieu de transfert le lieu des points de coordonnées $(\omega, \varphi(\omega), G_{dB}(\omega))$. On peut le tracer :



Critère du revers dans le plan de Black – hors programme

Un système asservi, dont la FTBO n'admet que des pôles à partie réelle négative ou nulle, est stable en boucle fermée si et seulement si le lieu de Black de sa FTBO parcouru dans le sens des **pulsations croissantes** laisse le point critique sur sa **droite**.



Un système stable en FTBO peut devenir instable en FTBF.

D'autre part, on constate qu'une augmentation du gain de la FTBO la rapproche du point critique et donc de l'instabilité.

2.4 Marge de phase et marge de gain des systèmes asservis

Un système est asservi pour que son fonctionnement soit conforme à des attentes définies dans un cahier des charges. Celui-ci demande souvent de rester éloigné du point critique.

Les systèmes sont rarement invariants, ils présentent du vieillissement (usures...) ainsi que des non-linéarités comme des saturations, des retards, du pompage, des frottements... Un système stable peut s'altérer au fil du temps et devenir instable.

D'autre part, un système stable mais trop oscillant n'est pas souhaitable.

On prévoit donc des marges de sécurité par rapport à ses états non désirables. La FTBO doit rester éloigné du point critique -1 .

On appelle **marge de phase** d'un système asservi la distance entre le point critique et le point de sa FTBO pour lequel le gain vaut 0 dB.

$$M_\varphi = \varphi(\omega_{0dB}) + 180^\circ = \arg(H_{FTBO}(j\omega_{0dB})) + 180^\circ$$

avec ω_{0dB} tel que $G_{dB}(\omega_{0dB}) = 20 \log|H_{FTBO}(j\omega_{0dB})| = 0 \text{ dB}$

On appelle **marge de gain** d'un système asservi la distance entre le point de sa FTBO pour lequel la phase vaut -180° et le point critique.

$$M_G = -G_{dB}(\omega_{-180^\circ}) = -20 \log|H_{FTBO}(j\omega_{-180^\circ})|$$

avec ω_{-180° tel que $\varphi(\omega_{-180^\circ}) = \arg(H_{FTBO}(j\omega_{-180^\circ})) = -180^\circ$

En général, le CdCF stipule : $M_\varphi \geq 45^\circ$ à 60° et $M_G \geq 8$ à 12 dB

Diagramme de Black

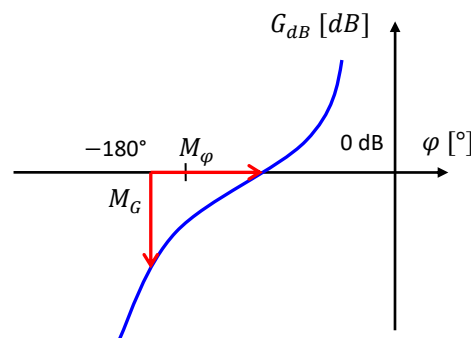
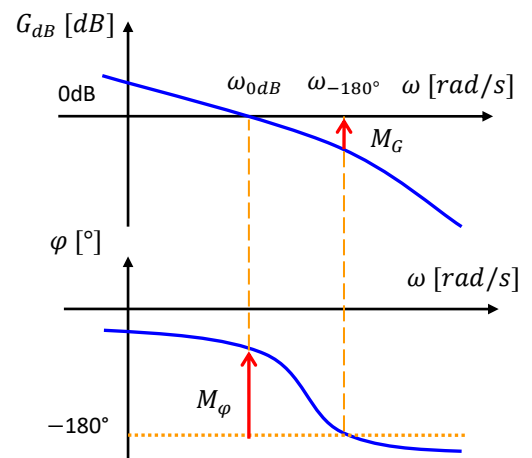


Diagramme de Bode



Les systèmes du 1^{er} ou du 2nd ordre sont donc **toujours stable**. On a une **marge de gain infinie** et une **marge de phase positive**.

$$M_\varphi \geq 0^\circ \text{ et } M_G = +\infty$$

On doit obligatoirement avoir $\omega_{-180^\circ} > \omega_{0dB}$ sinon M_G n'est pas définie. La marge de phase doit donc être déterminé en première.

Méthodologie

Pour déterminer M_φ :

- Rechercher graphiquement la pulsation ω_{0dB} ;
- Pour la pulsation ω_{0dB} déterminer M_φ .

Pour déterminer M_G :

- Rechercher graphiquement la pulsation ω_{-180° ;
- Pour la pulsation ω_{-180° déterminer M_G .

3 Rapidité des systèmes

La rapidité d'un système est associée au temps pour passer d'un état stable à un autre.

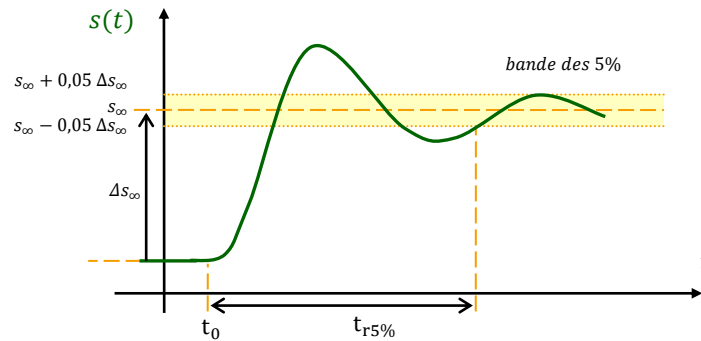
3.1 Détermination graphique du temps de réponse à 5%

A condition que le système soit stable, pour une entrée en échelon, la rapidité est généralement caractérisée par le temps de réponse à 5%.

Le temps de réponse à 5% est la **durée** mise par la **réponse** pour rentrer dans la bande des 5% et ne **plus en sortir**.

On définit la **bande des 5%** par l'intervalle :
 $[s_{\infty} - 0,05 \Delta s_{\infty}, s_{\infty} + 0,05 \Delta s_{\infty}]$

La valeur 5% est une valeur arbitraire, on aurait pu choisir une autre valeur.
 On pourrait aussi utiliser d'autres critères, par exemple le **temps de montée** qui est le temps que met la réponse à atteindre pour la première fois sa valeur finale.



3.2 Temps de réponse d'un 1^{er} ordre

Le temps de réponse d'un **premier ordre** est toujours de $t_{r5\%} = 3\tau$

Démonstration : $s(t) = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right) u(t-t_0) + s(0)$
 $s(3\tau) = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{3\tau}{\tau}}\right) + s(0) = 0,95KE_0 + s(0)$

3.3 Temps de réponse d'un 2nd ordre

Le temps de réponse à 5% d'un **second ordre** dépend du facteur d'amortissement z et de la pulsation propre ω_0 . On le détermine donc avec un abaque.

Le **temps de réponse réduit**⁽¹⁾ défini par $t_{rr} = t_{r5\%} \omega_0$ ne dépend que du coefficient d'amortissement z du système étudié. **Il est sans unité.**

Deux valeurs sont à connaître :

- lorsque $z = 0,69$, $t_{r5\%} \omega_0 \approx 3 \Rightarrow t_{r5\%} \approx \frac{3}{\omega_0}$
- lorsque $z = 1$, $t_{r5\%} \omega_0 \approx 5 \Rightarrow t_{r5\%} \approx \frac{5}{\omega_0}$

(1) Le temps de réponse réduit n'est pas un temps !
 Tout comme $D_{1\%}$ n'est pas une distance.

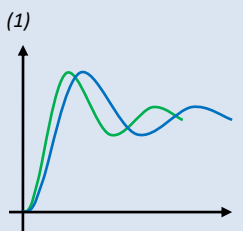
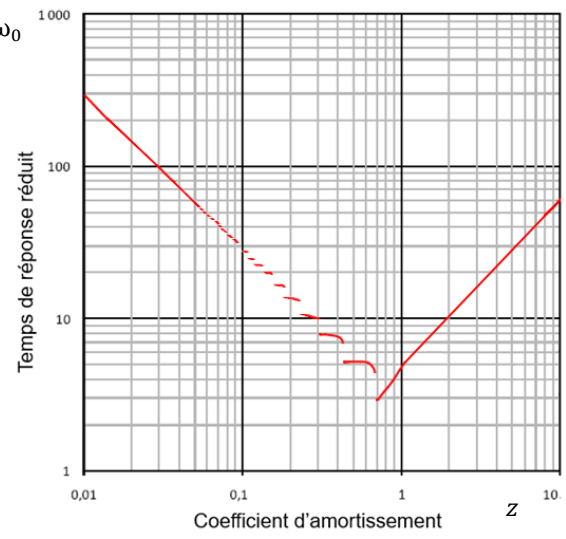
En première approximation, on aurait $t_{r5\%} \approx \frac{3}{\omega_{0dB}}$ avec ω_{0dB} la pulsation de coupure de la FTBO.

À un facteur d'amortissement correspond un temps de réponse réduit.
 Par conséquent, pour un même z , plus ω_0 augmente, plus $t_{r5\%}$ diminue et donc plus le modèle est rapide⁽¹⁾.

Déterminer l'abscisse de la courbe la plus rapide :

$$z = \sqrt{\frac{\ln^2 D_{k\%}}{\pi^2 + \ln^2 D_{k\%}}}$$

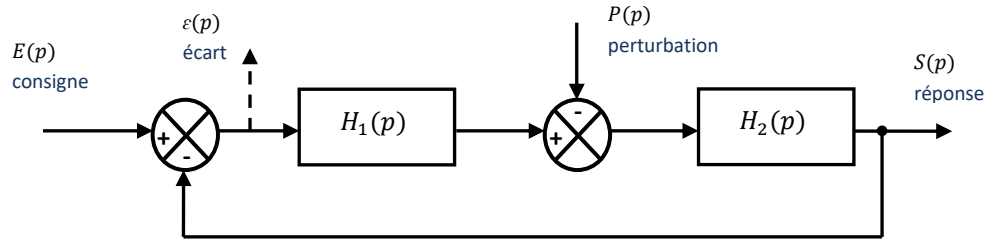
$$z = \sqrt{\frac{\ln^2 0,05}{\pi^2 + \ln^2 0,05}} \approx 0.6901$$



4 Précision des systèmes asservis

(1) Si le système ne peut pas se mettre sous forme d'un schéma à retour unitaire, se demander quelle est l'erreur statique entre des grandeurs dont les échelles ne sont pas du même ordre de grandeur n'a aucun intérêt !

On considère un **système asservi perturbé**. En choisissant bien K_{IHM} et en faisant une transformation de schéma bloc, il peut se mettre sous la forme d'un **retour unitaire**⁽¹⁾.



En utilisant le théorème de superposition, on obtient :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + H_1(p)H_2(p)} E(p) + \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)} P(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p) + \frac{H_2(p)}{1 + FTBO(p)} P(p)$$

4.1 Erreur statique d'un système non perturbé

En utilisant le théorème de la valeur finale, calculer l'erreur statique d'un système non perturbé

$$e_{r\infty} = \varepsilon_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p)$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{1}{1 + \frac{K_{FTBO}}{p^\alpha} \frac{1 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{1 + a_1 p + \dots + a_{n-\alpha} p^{n-\alpha}}} E(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{1}{1 + \frac{K_{FTBO}}{p^\alpha}} E(p)$$

(2) Pour une entrée en échelon, on parle parfois d'erreur de position ou d'erreur indicielle pour une entrée unitaire.

Pour une entrée en rampe, on parle parfois d'erreur de traînage, d'erreur de poursuite ou d'erreur en vitesse.

(3) Attention, on parle du tableau de l'erreur statique $e_{r\infty}$ et pas du tableau de l'erreur statique relative $e_{r\% \infty}$.

Erreur statique $e_{r\infty}^{(2)(3)}$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Impulsion $E(p) = 1$	0	0	0
Echelon $E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1 + K_{FTBO}}$	0	0
Rampe $E(p) = \frac{V_0}{p^2}$	∞	$\frac{V_0}{K_{FTBO}}$	0
Parabole $E(p) = \frac{a_0}{p^3}$	∞	∞	$\frac{a_0}{K_{FTBO}}$

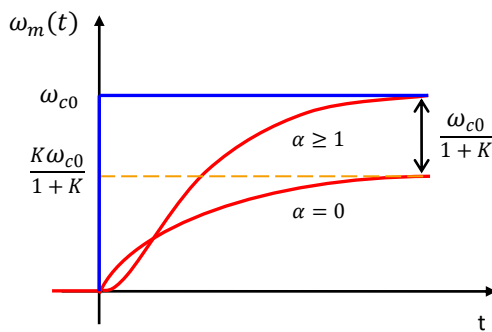
Pour un système de FTBO de classe α et de gain statique K_{FTBO}

L'erreur statique pour une entrée en échelon est nulle lorsque la FTBO est de classe $\alpha \geq 1$.

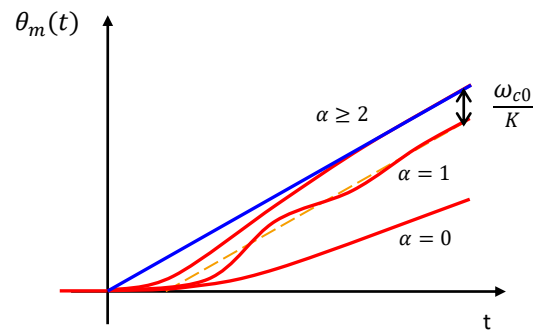
L'erreur statique pour une entrée en rampe est nulle lorsque la FTBO est de classe $\alpha \geq 2$.

0	0	0
$\frac{1}{1 + K_{FTBO}}$	0	0
∞	$\frac{1}{K_{FTBO}}$	0
∞	∞	$\frac{1}{K_{FTBO}}$

Exemple : MCC asservi



Réponse à un échelon



Réponse à une rampe

4.2 Erreur statique due à la perturbation

En utilisant le théorème de la valeur finale, calculer l'erreur statique due à la perturbation.

$$e_{r\infty} = \varepsilon_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)} P(p)$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{\frac{K_2}{p^{\alpha_2}} \frac{1 + \dots}{1 + \dots}}{1 + \frac{K_1}{p^{\alpha_1}} \frac{1 + \dots}{1 + \dots} \frac{K_2}{p^{\alpha_2}} \frac{1 + \dots}{1 + \dots}} P(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{p^{1+\alpha_1} K_2}{p^{\alpha_1+\alpha_2} + K_1 K_2} P(p)$$

(1) L'erreur statique relative $e_{r\infty\%}$ vaut tout le temps $\frac{1}{K_1}$ sur la diagonale, sauf si $\alpha_2 = 0$.

Erreur statique $e_{r\infty}^{(1)}$	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 = 2$
Impulsion $P(p) = 1$	0	0	0
Echelon $P(p) = \frac{E_0}{p}$	$\alpha_2 = 0$ $\frac{K_2 E_0}{1 + K_1 K_2}$	$\alpha_2 \geq 1$ $\frac{E_0}{K_1}$	0
Rampe $P(p) = \frac{V_0}{p^2}$	∞	$\frac{V_0}{K_1}$	0
Parabole $P(p) = \frac{a_0}{p^3}$	∞	∞	$\frac{a_0}{K_1}$
Pour un système de FTBO de classe $\alpha_1 + \alpha_2$ et α_1 la classe de la fonction de transfert avant la perturbation			

1 intégrateur en amont de la perturbation élimine l'influence d'une perturbation en échelon.

2 intégrateurs en amont de la perturbation éliminent l'influence d'une perturbation en rampe.

Le système étant stable, une perturbation impulsionnelle n'aura pas d'influence sur l'écart statique.

5 Améliorer les performances en corrigeant la commande

Prenons l'exemple d'un véhicule automobile et de son conducteur. On constate que :

- Le conducteur conduit le véhicule en imposant une position du volant, un rapport de vitesses, une position des pédales d'accélérateur et de freins ;
- Le conducteur doit obéir à des critères. Il doit se déplacer d'un point à un autre en minimisant le temps de parcours tout en restant sur la route et tout en respectant les limites de vitesse ;
- Le conducteur acquiert visuellement et tactilement des informations sur la vitesse, la trajectoire du véhicule, la position du volant... ;
- Le conducteur évalue ces différents paramètres pour élaborer et modifier la conduite du véhicule.



L'ensemble correspond à un système asservi où le conducteur, tel un capteur, complète la boucle de retour, joue le rôle de comparateur et celui du bloc élaborant la commande.

Si le temps de parcours est jugé trop long, on peut changer le véhicule (le système commandé) pour un autre plus puissant, ou changer le conducteur (le générateur de commande) pour un pilote de rallye. Mais même le meilleur pilote ne pourra pas faire de miracles avec une voiture pousive.

Dans un système asservi, la commande est élaborée de façon autonome à partir de l'écart entre la consigne et la réponse. Pour améliorer les performances, on ajoute un correcteur. Il peut être placé de plusieurs façons :

- Dans la chaîne directe en série
- Dans une boucle en parallèle avec point de prélèvement en aval ;
- Dans une boucle par anticipation avec point de prélèvement en amont.

Nous allons étudier par la suite un correcteur série. Il corrige le système en amont de l'actionneur.

Les 3 actions de base, proportionnelle, intégrale, dérivée, correspondent à 3 modifications réalisables sur une fonction de transfert :

- Modifier le gain ;
- Ajouter un pôle ;
- Ajouter un zéro.

5.1 Correcteur proportionnel P

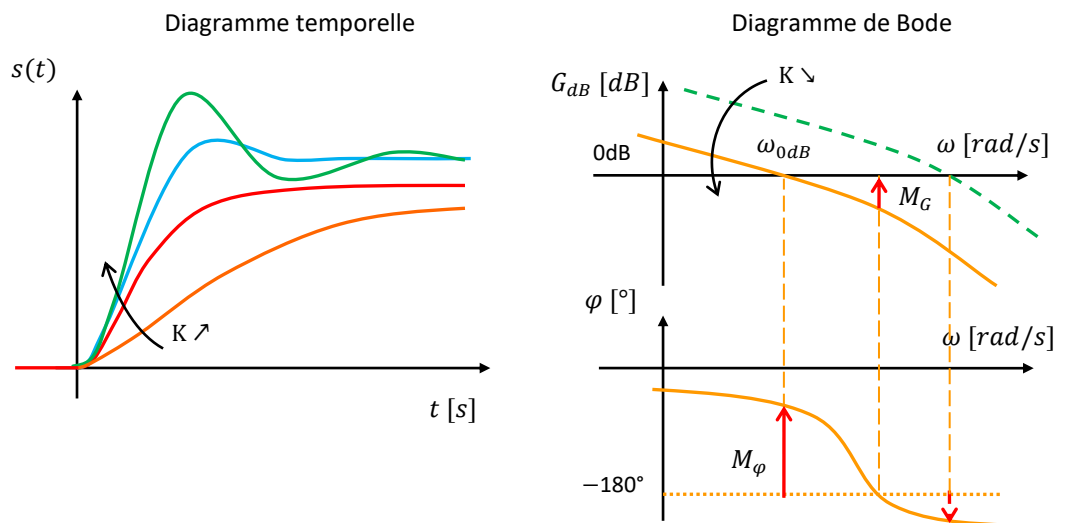
Ce correcteur ajoute un gain K à la FTBO.

Si on **augmente** le correcteur proportionnel $C(p) = K$:

- on **améliore la précision**⁽¹⁾ mais on **dégrade la stabilité** ;
- la phase du diagramme de Bode reste inchangée.

(1) Sauf si le système est déjà précis !

Exemple



Stabilité

Une augmentation de K réduit les marges, et donc peut faire apparaître des oscillations, voir rendre le système instable.

Rapidité

Pour un 1^{er} ordre, on peut améliorer la rapidité en augmentant K .

Pour un 2nd ordre ; une réponse très amortie est lente, mais une réponse très oscillatoire est lente également. Il y a donc un minimum.

Précision

Si l'on est dans un cas où le système n'est pas précis, augmenter K améliore la précision, par exemple pour une classe 0 soumis à un échelon, l'erreur statique est $\frac{E_0}{1+K_{FTBO}}$.

Réglage du correcteur

- Valeurs max de K : pour une marge de phase mini ou une marge de gain mini.
- Valeur min de K : pour un temps de réponse à 5% max ou une erreur statique max.

5.2 Correcteur intégral I

Ce correcteur augmente la classe de la FTBO.

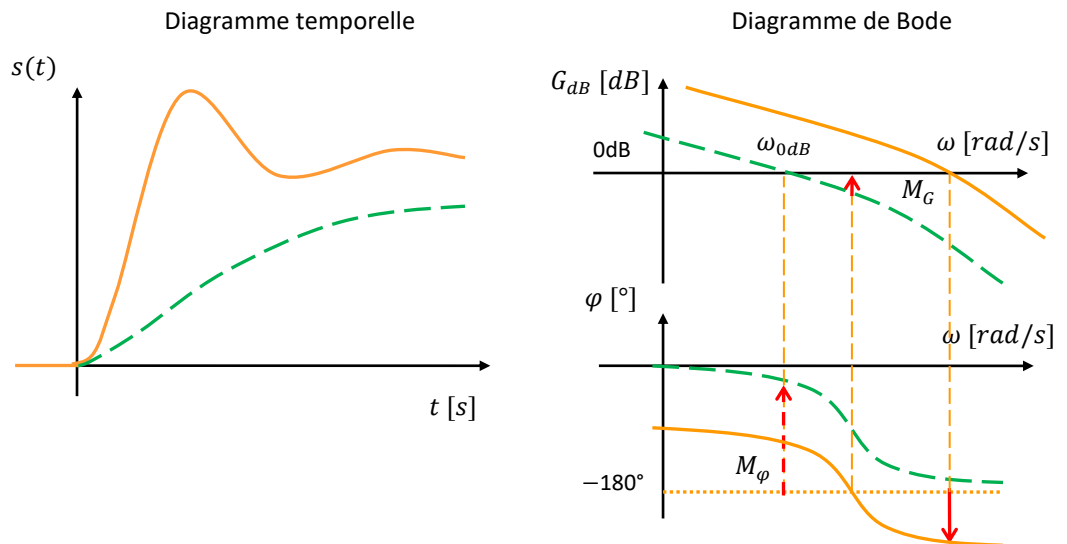
(1) Les correcteurs intégrales sont les seuls correcteurs qui peuvent avoir une sortie non nulle pour une entrée nulle.

(2) La robustesse est une performance, qui caractérise l'insensibilité aux perturbations.

Le correcteur **intégral**⁽¹⁾ $C(p) = \frac{1}{\tau_i p}$:

- annule l'écart statique d'une entrée en échelon ;
- annule l'effet en régime permanent d'une perturbation en échelon⁽²⁾ si placé en amont de la perturbation ;
- diminue la phase de 90° et donc rend souvent le système instable.

Exemple



Stabilité

Ce correcteur est rarement utilisable car il diminue la phase de 90° et donc diminue les marges et peut rendre le système instable.

Rapidité

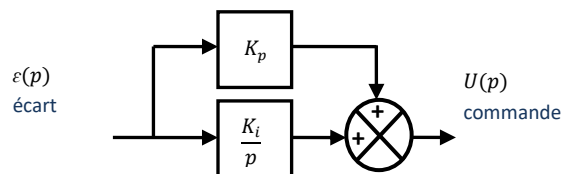
La bande passante diminue et donc la rapidité. Le temps de réponse 5% augmente.

Précision

En augmentant la classe de la FTBO, il annule l'erreur statique d'une entrée échelon et rend le système précis. Placé en amont d'une perturbation indicielle, il annule son effet.

5.3 Correcteur proportionnel intégral PI

Ce correcteur combine les actions proportionnelles et intégrales.



Plusieurs paramétrages sont possibles, en posant $K_i = \frac{1}{T_i}$ et $\tau_i = KT_i$:

$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} = K_p + \frac{1}{T_i p} = \frac{1 + K_p T_i p}{T_i p} = \frac{K_p (1 + \tau_i p)}{\tau_i p}$$

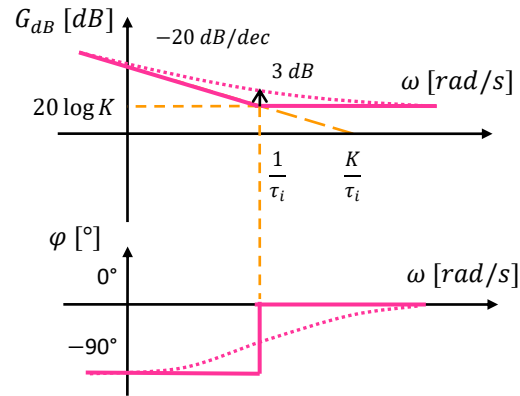
Il se comporte comme un correcteur intégral pour les basses fréquences et comme un correcteur proportionnel pour les hautes fréquences. Bien réglé, il présente les avantages 2 correcteurs sans leurs inconvénients.

Il peut parfois être utilisé pour compenser un pôle dominant.

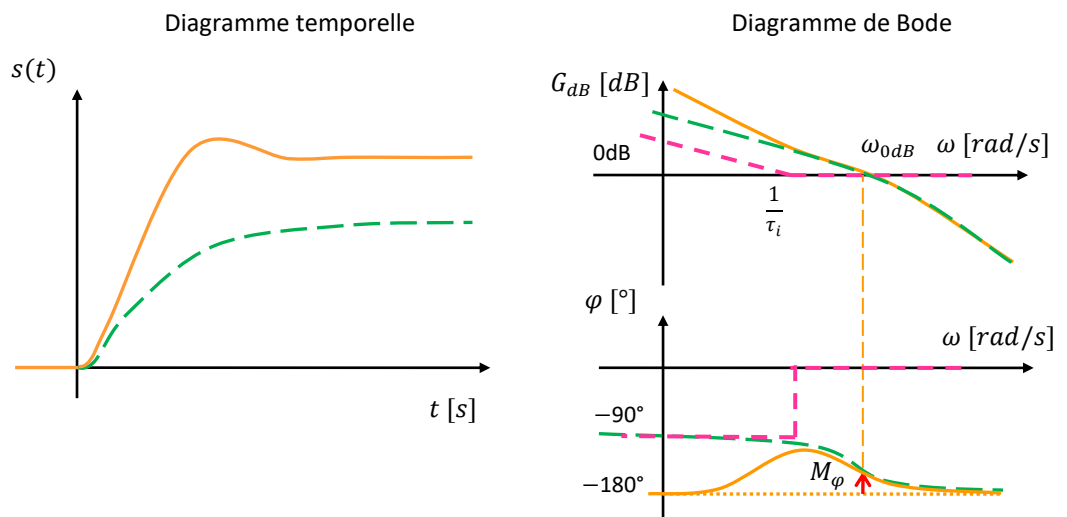
Le correcteur **proportionnel intégral** $C(p) = \frac{K(1+\tau_i p)}{\tau_i p}$:

- améliore la précision mais dégrade la stabilité ;
- augmente le gain aux basses fréquences ;
- annule l'écart statique d'une entrée en échelon ;
- annule l'effet en régime permanent d'une perturbation en échelon si placé en amont de la perturbation.

Diagramme de Bode du correcteur PI :



Exemple



Stabilité

On choisit τ_i pour que la phase de la FTBO ne soit pas diminuée au voisinage du point critique, soit $\frac{1}{\tau_i} \ll \omega_{0dB}$. Par exemple, une décade avant $\frac{1}{\tau_i} = \frac{\omega_{0dB}}{10}$.

Rapidité

Ce correcteur tend à diminuer la rapidité. Contrairement au correcteur intégral pur, l'action intégrale est limitée aux basses fréquences, donc le ralentissement du système est limité.

Une augmentation de K augmente la rapidité mais diminue la stabilité.

Précision

Idem correcteur I.

5.4 Correcteur à retard de phase (ou correcteur PI réel)

Le correcteur PI est censé avoir un gain infini aux basses fréquences. Si les puissances en jeu sont trop importantes, il est impossible de réaliser concrètement ce comportement théorique. Le correcteur à retard de phase exerce une action intégrale limitée à une plage de fréquence.

Ce correcteur augmente le gain de la FTBO aux basses fréquences et modifie la précision du système.

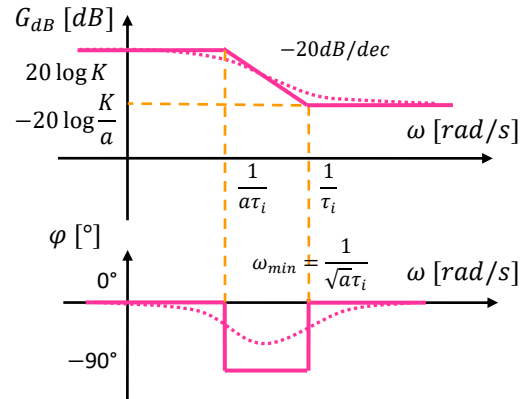
Le correcteur à retard de phase enlève de la phase.

(1) Attention, ce correcteur peut aussi s'écrire $C(p) = \frac{1+b\tau_i p}{1+\tau_i p}$ avec $b < 1$. Il faut donc plutôt se fier à l'allure du diagramme de Bode.

Le correcteur à retard de phase⁽¹⁾ $C(p) = K \frac{1+\tau_i p}{1+a\tau_i p}$, avec $a > 1$:

- améliore la précision mais dégrade la stabilité ;
- augmente le gain aux basses fréquences.

Diagramme de Bode du correcteur à retard de phase :



La phase est minimale pour $\omega_{min} = \frac{1}{\sqrt{a\tau_i}}$ et vaut $\sin \varphi_{min} = \frac{1-a}{1+a}$.

Calcul de la moyenne logarithmique entre $\frac{1}{\tau_i}$ et $\frac{1}{a\tau_i}$

$$\log \omega_{min} = \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{\tau_i} + \log \frac{1}{a\tau_i} \right) = \log \left(\sqrt{\frac{1}{\tau_i} \cdot \frac{1}{a\tau_i}} \right) = \log \left(\frac{1}{\sqrt{a\tau_i}} \right) \Rightarrow \omega_{min} = \frac{1}{\sqrt{a\tau_i}}$$

Stabilité

La stabilité est plutôt diminuée vu que l'on enlève de la phase. Cependant, en choisissant bien K, on peut la préserver. Parfois même, on peut augmenter les marges en diminuant ω_{0dB} .

Rapidité

A l'inverse, la rapidité diminue.

Précision

La précision est améliorée sans changer la classe. Donc les écarts statiques sont réduits mais ne sont pas annulés.

Réglage du correcteur

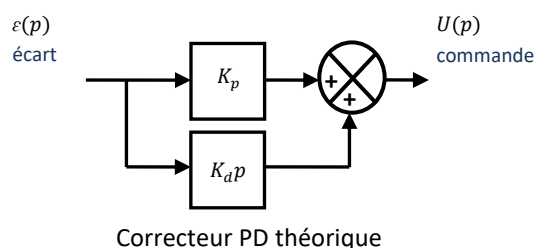
Si on choisit $K = a$ le gain est nul pour les hautes fréquences.

On règle ce correcteur pour augmenter le gain aux basses fréquences sans diminuer la phase au voisinage du point critique.

5.5 Correcteur dérivé D et proportionnel dérivé PD

Le correcteur **dérivé** $C(p) = K_d p$ et le correcteur **proportionnel dérivé** $C(p) = K_p + K_d p$ ne sont pas réalisables technologiquement. Ils ont un degré du numérateur supérieur à celui du dénominateur. Ils ajoutent un zéro à la FTBO sans changer la classe.

Pour réaliser ces correcteurs, il faut avoir une amplification très importante pour les très hautes fréquences, ce qu'aucun système physique ne permet. Les réalisations essayant d'approcher ces modèles théoriques amplifient tous les bruits et leurs grandeurs de sortie sont inexploitable.



5.6 Correcteur à avance de phase (ou correcteur PD réel)

Le correcteur à avance de phase fait exactement l'inverse du correcteur à retard de phase. C'est la seule utilisation pratique de l'action dérivée.

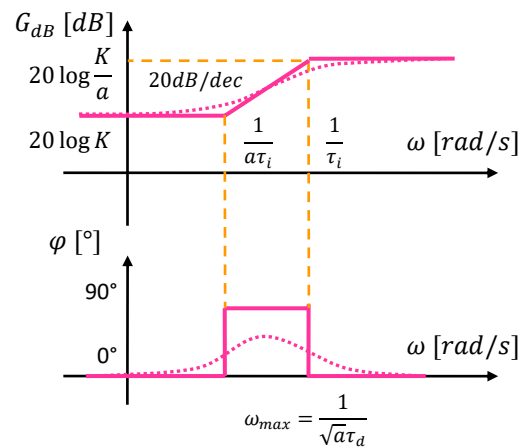
Il fait une action dérivée sur une plage de fréquence.

Le correcteur à avance de phase ajoute de la phase.

Le correcteur à **avance de phase** $C(p) = K \frac{1+a\tau_d p}{1+\tau_d p}$, avec $a < 1$:

- augmente la stabilité mais introduit des vibrations et du bruit ;
- améliore la rapidité.

Diagramme de Bode du correcteur à avance de phase :



La phase est maximale pour $\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{a\tau_d}}$ et vaut $\sin \varphi_{max} = \frac{1-a}{1+a}$.

Stabilité

Ce correcteur augmente la marge de phase autour du point critique et peut stabiliser un système instable ou augmenter les marges.

Rapidité

Le gain des hautes fréquences est augmenté, donc la bande passante est plus large et la rapidité est améliorée.

Précision

La précision diminue en fonction des valeurs choisies.

Réglage du correcteur

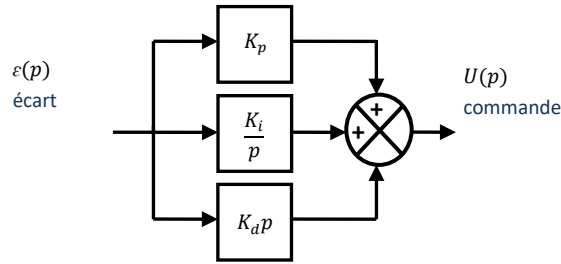
- On cherche la valeur a qui permet d'obtenir M_φ demandée avec $\sin \varphi_{max} = \frac{1-a}{1+a}$.
- On cherche τ_d avec $\omega_{max} = \omega_{0dB}$ soit $\tau_d = \frac{1}{\sqrt{a}\omega_{0dB}}$.
- On ajuste K pour que le gain du système corrigé soit bien de 0dB pour ω_{max} .

5.7 Correcteur proportionnel intégral dérivé PID

Il se comporte comme un correcteur intégral pour les basses fréquences et comme un correcteur proportionnel pour les fréquences intermédiaires et comme un correcteur dérivé pour les hautes fréquences. Bien réglé, il présente les avantages 3 correcteurs sans leurs inconvénients. Mais il est difficile à régler.

Le correcteur **proportionnel intégral dérivé** $C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p$:

- Comme le correcteur PI, il améliore la précision ;
- Comme le correcteur PD, il améliore la rapidité.



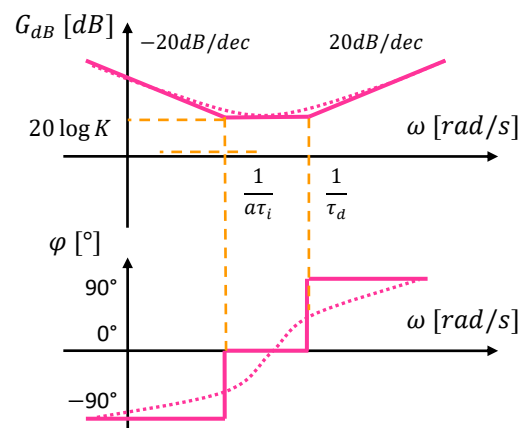
Correcteur PID théorique

Ce correcteur ne correspond à aucun système physique car le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur.

Les correcteurs réels que l'on utilise sont de la forme :

$$C(p) = K \frac{1+\tau_i p}{\tau_i p} \frac{1+\tau_d p}{1+b\tau_d p} \quad \text{ou} \quad C(p) = K \frac{1+\tau_i p}{1+a\tau_i p} \frac{1+\tau_d p}{1+b\tau_d p} \quad \text{avec } a > 1 \text{ et } b < 1$$

Diagramme de Bode du correcteur PID :



(1) La méthode de Ziegler-Nichols est une méthode heuristique de réglage du correcteur PID.

Réglage du correcteur⁽¹⁾

- On commence par la rapidité et de précision avec le correcteur PI.
- Puis la stabilité avec l'avance de phase.

5.8 Bilan des performances des correcteurs

La problématique des asservissements est de trouver le meilleur **compromis** entre les différentes performances.

Performances	Stabilité	Rapidité	Précision
Correcteur P	↘	—	↗
Correcteur I	↘↘	↘	↗↗
Correcteur PI	↘	↘	↗↗
Correcteur à retard de phase	↘	↘	↗
Correcteur à avance de phase	↗	↗	↘
Correcteur PID	↗	↗	↗↗

QUESTIONS DE COURS

Donner la relation entre les fonctions de transfert de l'interface homme-machine et du capteur.

Donner l'expression des fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée.

Donner la condition fondamentale de stabilité au niveau des pôles. Sur quelle fonction s'applique-t-elle ?

Que vaut la classe d'une FT stable ?

Quel type de pôle génère des oscillations ?

Comment réduire l'ordre d'un modèle, à l'aide de la notion de pôle dominant ?

Une paire de pôles complexes implique-t-elle des oscillations visibles ?

Que dire de la stabilité des modèles à plusieurs entrées.

Donner le critère graphique du Revers. Sur quelle fonction s'applique-t-il ?

Quelle marge doit être lue en premier ?

Donner quelques causes d'instabilité.

Donner les transformées de Laplace des entrées tests « impulsion », « échelon » et « rampe ».

Donner le théorème de la valeur finale, et celui de la valeur initiale.

Donner les expressions de la valeur finale et de l'erreur en régime permanent, d'un modèle stable, sans dérivateur soumis à une consigne en échelon d'amplitude E_0 et à une perturbation en échelon d'amplitude C_{r0} .

Expliquer la méthode pour déterminer l'erreur en régime permanent, d'un modèle stable soumis à une consigne en rampe.

Donner le tableau exprimant les différentes valeurs de l'erreur statique due à un échelon.

Donner le tableau exprimant les différentes valeurs de l'erreur statique due à une perturbation.

Que faut-il faire pour améliorer la précision ? Quel inconvénient ceci peut entraîner ?

SciencesIndustrielles.com

Des vidéos



Des cours



Les TP



Les annales



Un Lexique

