Cartes mentales de Physique-Chimie

PSI

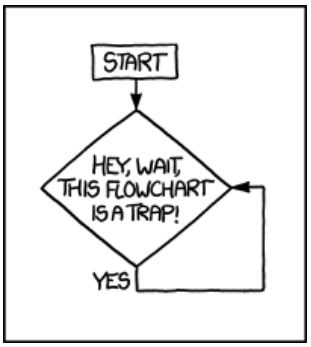
P.E LEROY

28 novembre 2019

Résumé

Vous trouverez dans ce document l'ensemble des cartes mentales données en cours de Physique-Chimie durant la seconde année PSI, classés dans l'ordre de la progression du cours.

Bon courage !
PE LEROY



Cette œuvre est mise à disposition sous licence
Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes Conditions 3.0 non transposé

Pour voir une copie de cette licence, visitez
`http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/`
ou écrivez à
`Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.`

Table des matières

Physique **4**

Électronique **4**
EN1 - Stabilité des systèmes linéaires . . . 4
EN2 - Rétroaction . . . 5
EN3 - Oscillateurs . . . 6
EN4 - Modulation - Démodulation . . . 7

Phénomènes de transport **8**
PT1 - Transport de charge . . . 8
PT2 - Transfert thermique par conduction . . . 9
PT3 - Diffusion de particules . . . 10
PT4 - Fluides en écoulement . . . 11
PT5 - Écoulements incompressibles et homogènes . . . 12

Bilans macroscopiques **13**
BM - Bilans macroscopiques . . . 13

Électromagnétisme **14**
EM1 - Champ électrique en régime stationnaire . . . 14
EM2 - Lois locales du champ électrique en régime stationnaire . . . 15
EM3 - Champ magnétique en régime stationnaire - Lois locales . . . 16
EM4 - Électromagnétisme dans l'ARQS . . . 17
EM5 - Milieux ferromagnétiques . . . 18

Conversion de puissance **19**
CP1 - Puissance électrique en régime sinusoïdal . . . 19
CP2 - Le transformateur . . . 20
CP3 - Contacteur électromagnétique en translation . . . 21
CP4 - Machine synchrone . . . 22
CP5 - Machine à courant continu . . . 23
CP6 - Conversion électronique de puissance . . . 24

Physique des ondes **25**
PO1 - Phénomènes de propagation non dispersifs : équation de d'Alembert . . . 25
PO2 - Ondes sonores dans les fluides . . . 26
PO3 - Ondes électromagnétiques dans le vide . . . 27
PO4 - Phénomènes de propagation linéaires : absorption et dispersion . . . 28
PO5 - Interfaces entre deux milieux . . . 29

Chimie **30**

Thermodynamique des transformations physico-chimiques **30**
TC1 - Application du premier principe à la transformation physico-chimique . . . 30
TC2 - Application du second principe à la transformation physico-chimique . . . 31
TC3 - Changements d'état de mélanges binaires . . . 32
TC4 - Équilibres chimiques . . . 33

Électrochimie **34**
EC1 - Thermodynamique des réactions d'oxydoréduction 34
EC2 - Cinétique des réaction d'oxydoréduction 35

Méthodes **36**
Équations différentielles usuelles 36

Système entrée-sortie linéaire, continu et invariant

Application au filtrage

Filtres passe-bande ou coupe-bande

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

Formes canoniques

Ordre1

Passe-bas

$$\underline{H} = H_0 \frac{1}{1+jx}$$

Passe-haut

$$\underline{H} = H_0 \frac{jx}{1+jx}$$

Ordre 2

Passe-bas

$$\underline{H} = H_0 \frac{1}{1+jx/Q-x^2}$$

Passe-haut

$$\underline{H} = H_0 \frac{-x^2}{1+jx/Q-x^2}$$

Passe-bande

$$\underline{H} = H_0 \frac{jx/Q}{1+jx/Q-x^2}$$

Coupe-bande

$$\underline{H} = H_0 \frac{1-x^2}{1+jx/Q-x^2}$$

Analyse spectrale

Décomposition en série de Fourier

Toute fonction peut se décomposer en une suite infinie de fonctions sinusoïdales.

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

Avec

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\mathrm{d}t$$

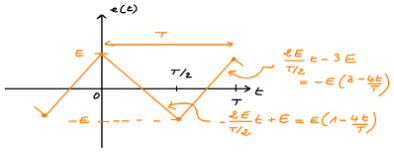
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t$$

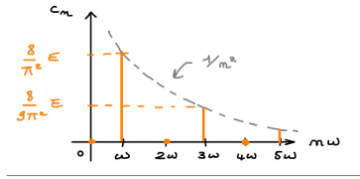
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\tan\varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}$$

Exemple d'un signal triangulaire



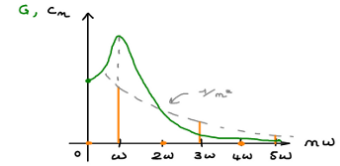


Effet du filtre

Effet du gain sur le spectre

$$s(t) = G(0)\ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G(n\omega)\ c_n \cos(n\omega t + \varphi_n + \varphi(n\omega))$$

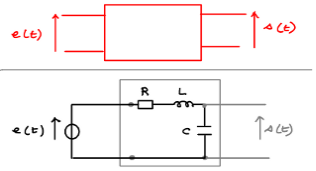
Superposition de la courbe de gain



Stabilité

Un système d'ordre 1 ou 2 est **stable** si **tous les coefficients de son équation différentielle sont de même signe.**

Système entrée-sortie



Système linéaire : système régit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$\sum_k a_k \frac{\mathrm{d}^k s(t)}{\mathrm{d}t^k} = \sum_p b_p \frac{\mathrm{d}^p e(t)}{\mathrm{d}t^p}$$

Théorème de superposition

$$e(t) = \lambda\ e_1(t) + \beta\ e_2(t)$$

entraine $s(t) = \lambda\ s_1(t) + \beta\ s_2(t)$

Invariance temporelle

$e(t-\tau)$ entraine $s(t-\tau)$

Un système linéaire, continu et invariant donne d'un signal d'entrée sinusoïdal un signal de sortie sinusoïdal.

Si la solution générale de l'e.s.s.m. tend rapidement vers 0 :

$$s(t) = s_h(t) + s_p(t) \simeq s_p(t)$$

La solution particulière étant sinusoïdale, on a :

$$s(t) \simeq S\cos(\omega t + \varphi_s)$$

Régime harmonique

On recherche de la réponse à une entrée sinusoïdale :

$$e(t) = E\cos(\omega t + \varphi_e)$$

Méthode complexe

Principe

$$\cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow e^{j(\omega t+\varphi)}$$

$$\sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi - \pi/2) \leftrightarrow e^{j(\omega t+\varphi-\pi/2)}$$

A toute grandeur sinusoïdale x, on associe une grandeur complexe.

$$x = X\cos(\omega t + \varphi_x) \leftrightarrow \underline{x} = X\ e^{j\varphi_x} e^{j\omega t} = \underline{X}\ e^{j\omega t}$$

$$X = |\underline{X}| = |\underline{x}|$$

$$\varphi_x = \arg(\underline{X})$$

C'est la partie réelle de la grandeur complexe qui représente la grandeur physique.

$$x(t) = \mathcal{R}e(\underline{x}(t))$$

Dériver et intégrer

$$\frac{\mathrm{d}\underline{x}(t)}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow j\omega\ \underline{x}(t)$$

$$\int \underline{x}(t)\mathrm{d}t \leftrightarrow \frac{\underline{x}(t)}{j\omega}$$

Équation différentielle complexe associée

$$\ddot{\underline{s}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\underline{s}} + \omega_0^2\ \underline{s} = \omega_0^2\ \underline{E}\ e^{j\omega t}$$

$$\underline{E} = E\ e^{j\varphi_e}$$

Injection de la solution complexe, puis résolution

$$S = f(\omega/\omega_0)$$

$$\varphi_s = \arg(\underline{S})$$

Fonction de transfert

Définition

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

Gain

$$G = |\underline{H}|$$

Déphasage

$$\varphi = \varphi_s - \varphi_e = arg(\underline{H})$$

Détermination d'une fonction de transfert

Pour tout dipôle :

$$\underline{u} = \underline{Z} \times \underline{i}$$

- Résistance : $\underline{Z} = R$
- Inductance : $\underline{Z} = jL\omega$
- Capacité : $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$

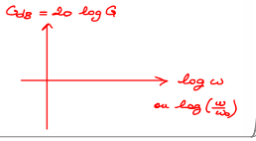
Impédance d'un dipôle : $\underline{Z}$

Lois des circuits

- Lois de Kirchhoff
- Modèles de Thévenin / Norton
- Lois d'associations de dipôles
- Théorème de Millman

Diagramme de Bode

Courbe de gain



Gain en décibels

$$G_{\mathrm{dB}} = 20\log G$$

$$10\log 2 \simeq 3\ \mathrm{dB}$$

Pulsation de coupure à - 3 dB

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega_c) = G_{\mathrm{dB,max}} - 3\ \mathrm{dB}$$

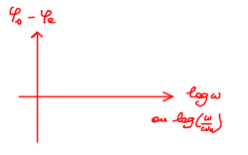
ou $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$

Bande passante à - 3 dB

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega \in \Delta\omega) \geqslant G_{\mathrm{dB,max}} - 3\ \mathrm{dB}$$

ou $G(\omega \in \Delta\omega) \geqslant \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$

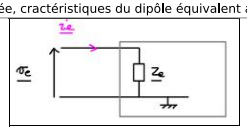
Courbe de phase



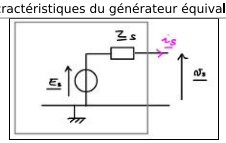
Rétroaction

Impédances d'entrée et de sortie

Vue de l'entrée, cractéristiques du dipôle équivalent au montage



Vue de la sortie, cractéristiques du générateur équivalent au montage



Une forte impédance d'entrée et une faible impédance de sortie permettent des associations en cascade de plusieurs systèmes, sans transfert de puissance.

$$\underline{H}_{\text{cascade}} = \prod_i \underline{H}_i$$

Lors de l'association de deux systèmes, si l'impédance de sortie du premier et l'impédance d'entrée du second sont **conjuguées**, le transfert de puissance est maximal, on parle **d'adaptation d'impédance.**

Exemples en régime linéaire

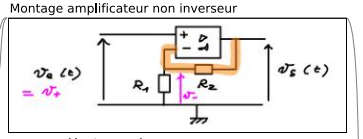
Montage amplificateur non inverseur

Relation entrée-sortie

$$v_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_e$$

Impédances d'entrée et de sortie

$$\underline{Z_e} \to +\infty \text{ et } \underline{Z_s} \to 0$$



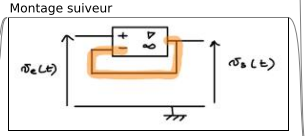
Montage suiveur

Relation entrée-sortie

$$v_s = v_e$$

Impédances d'entrée et de sortie

$$\underline{Z_e} \to +\infty \text{ et } \underline{Z_s} \to 0$$



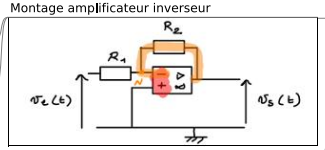
Montage amplificateur inverseur

Relation entrée-sortie

$$v_s = -\frac{R_2}{R_1}\, v_e$$

Impédances d'entrée et de sortie

$$\underline{Z_e} = R_1 \text{ et } \underline{Z_s} \to 0$$



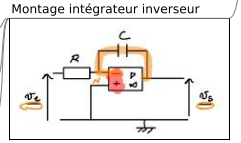
Montage intégrateur inverseur

Relation entrée-sortie

$$\underline{v_s} = -\frac{1}{jRC\omega}\, \underline{v_e}$$

Impédances d'entrée et de sortie

$$\underline{Z_e} = R \text{ et } \underline{Z_s} \to 0$$



En pratique, on ajoute une forte résistance en parallèle du condensateur.

Exemples en régime saturé

Saturation haute

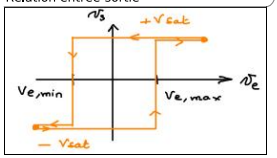
Si $v_s = +V_{\text{sat}}$ (soit $\epsilon > 0$) alors $v_e > V_0 \dfrac{R_1 + R_2}{R_2} - V_{\text{sat}} \dfrac{R_1}{R_2} = V_{e,\min}$

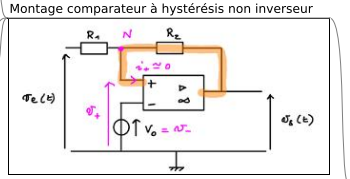
Saturation basse

Si $v_s = -V_{\text{sat}}$ (soit $\epsilon < 0$) alors $v_e < V_0 \dfrac{R_1 + R_2}{R_2} + V_{\text{sat}} \dfrac{R_1}{R_2} = V_{e,\max}$

Montage comparateur à hystérésis non inverseur

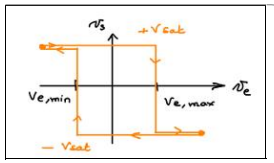
Relation entrée-sortie

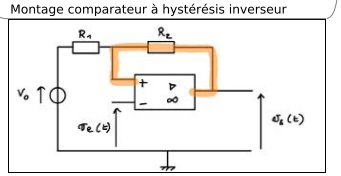




Montage comparateur à hystérésis inverseur

Relation entrée-sortie





Effet d'une rétroaction

Une rétroaction sur l'entrée inverseuse E- d'un ALI suggère un régime linéaire.

Une rétroaction sur l'entrée non inverseuse E+ d'un ALI suggère un régime saturé.

Une absence de rétroaction suggère un régime saturé, du fait des tensions et courants parasites.

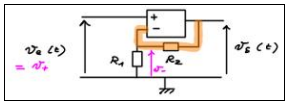
Une double rétroaction suggère soit un régime linéaire, soit un régime saturé (étude de la stabilité nécessaire).

Une rétroaction rend le système plus rapide.

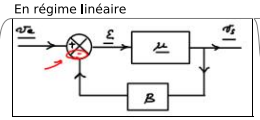
$$\frac{1 + \mu_0 \beta}{\tau} >> \frac{1}{\tau}$$

Exemple du montage amplificateur non inverseur

$$v_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s = \beta\, v_s$$



En régime linéaire



Fonction de transfert

$$v_s = \frac{\underline{\mu}}{1 + \beta\, \underline{\mu}} v_e$$

Équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{1 + \mu_0 \beta}{\tau}\right) v_s = \frac{\mu_0}{\tau} v_e$$

Tous les coefficients de l'équation homogène sont de même signe : le système est stable.

Compromis gain/bande passante d'un système bouclé du premier ordre

Exemple du montage amplificateur non inverseur

$$\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{1 + \mu_0 \beta}{\tau}\right) v_s = \frac{\mu_0}{\tau} v_e$$

En régime harmonique

$$\frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{\mu_0}{1 + j\omega\tau'} = \frac{G_0}{1 + j\omega\tau'}$$

Pulsation de coupure

$$\omega_c = \frac{1}{\tau'}$$

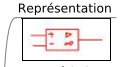
Produit (gain x bande passante)

$$G_0 \times (\omega_c - 0) = \frac{\mu_0}{\tau}$$

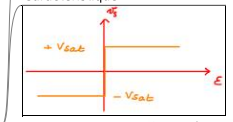
Le produit (gain x bande passante) d'un système bouclé du premier ordre ne dépend que des caractéristiques de l'ALI.

Modèle de l'ALI idéal

Représentation



Caractéristique



Caractéristiques

$$i_\pm = 0$$
$$\mu_0 \to \infty$$
$$R_e \to \infty$$
$$R_s \to 0$$

Saturation en courant de sortie

$$|i_{s,\max}| \to \infty$$

Vitesse de balayage

$$\left|\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}\right|_{\max} \to \infty$$

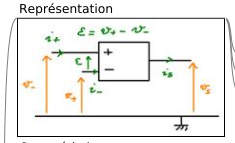
Un régime linéaire

$\epsilon = 0$ soit $v^+ = v^-$

Le caractère passe-bas de l'ALI est invisible.

<< Amplificateur Linéaire Intégré >> réel

Représentation

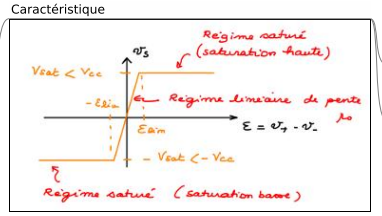


Une entrée inverseuse E-

Une entrée non inverseuse E+

Une sortie S

Caractéristique



Un régime linéaire

$$v_s = \mu_0 \left(v^+ - v^-\right) = \mu_0\, \epsilon$$

Deux régimes saturés

Si $\epsilon > 0$, $v_s = +V_{\text{sat}}$

Si $\epsilon < 0$, $v_s = -V_{\text{sat}}$

Comportement en filtre passe-bas

$$\underline{\mu} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{\epsilon}} = \frac{\mu_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} = \underline{\mu} = \frac{\mu_0}{1 + j\omega\tau}$$

Caractéristiques (ordres de grandeur)

$$i_\pm \sim 500 \text{ nA}$$
$$\mu_0 \sim 10^5$$
$$R_e \sim 1\text{M}\Omega$$
$$R_s \sim 10\ \Omega$$
$$\tau \sim 0,1 \text{ s}$$

Limitations

Saturation en courant de sortie

$$|i_{s,\max}| \sim 20 \text{ mA}$$

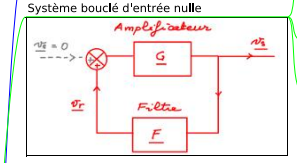
Vitesse de balayage

$$\left|\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}\right|_{\max} \sim 10^6 \text{ V.s}^{-1}$$

Oscillateurs

Oscillateurs quasi-sinusoïdaux : système délivrant une grandeur d'aspect sinusoidal, dont le spectre peut contenir d'autres harmoniques de faibles amplitudes.

Système bouclé d'entrée nulle



Association d'un amplificateur et d'un filtre

$$\underline{v_s} = \underline{G} \cdot (\underline{v_e} + \underline{v_r})$$
$$\underline{v_r} = \underline{F} \cdot \underline{v_s}$$

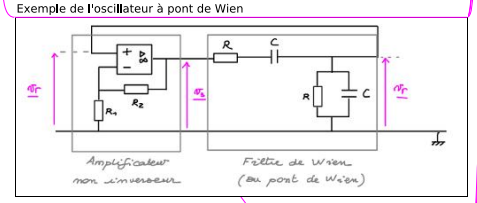
Relation entrée-sortie

$$\underline{v_s} = \frac{\underline{G}}{1 - \underline{G} \cdot \underline{F}} \underline{v_e}$$

Critère de Barkhausen pour l'existence d'un signal

$$\boxed{\underline{G} \cdot \underline{F} = 1}$$
ou :
$$\boxed{\begin{array}{l}\arg(\underline{G} \cdot \underline{F}) = 0 \\ |\underline{G} \cdot \underline{F}| = 1\end{array}}$$

Exemple de l'oscillateur à pont de Wien



Amplificateur non inverseur

$$\underline{G} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Filtre de Wien (passe-bande)

$$\underline{F} = H_0 \frac{jx/Q}{1 - x^2 + jx/Q}$$
avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $Q = \frac{1}{3}$

Application du critère de Barkhausen

$$\underline{G} \cdot \underline{F} = \frac{1}{3 + j(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = 1$$
ou :
$\arg(\underline{G} \cdot \underline{F}) = 0$ soit $\boxed{\omega = \omega_0}$

$|\underline{G} \cdot \underline{F}| = 1$ soit $\boxed{R_2 = 2R_1}$

Équation différentielle

$$\underline{v_s} = \underline{G} \cdot \underline{F} \, \underline{v_e}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 v_s}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha \frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 \, v_s = 0$$
avec $2\alpha = \frac{\omega_0}{Q}\left(1 - H_0\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\right)$

Les éventuelles oscillations qui démarrent sont amorties rapidement si

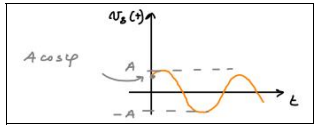
$$2\alpha > 0 \text{ soit } R_2 < 2R_1$$

Les oscillations peuvent démarrer sur du bruit (amplification) si

$$2\alpha < 0 \text{ soit } R_2 > 2R_1$$

Les oscillations sont **sinusoïdales** si

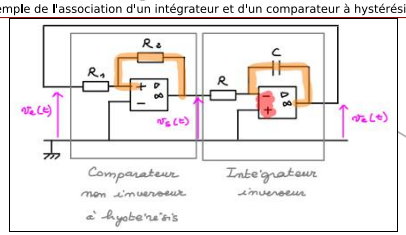
$$2\alpha = 0 \text{ soit } \boxed{R_2 = 2R_1}$$



En pratique, on se place légèrement au dessus de la valeur limite. Après démarrage des oscillations, lorsque la tension atteint la tension de saturation de l'ALI, cet état, instable, permet aux oscillations de se poursuivre. **La stabilisation de l'amplitude des oscillations est due aux non linéarités du système.**

Oscillateurs de relaxation : système délivrant une grandeur qui bascule périodiquement entre deux états bien définis.

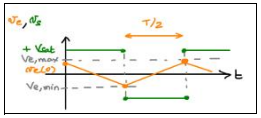
Exemple de l'association d'un intégrateur et d'un comparateur à hystérésis



Analyse du comportement

Si $v_s = +V_{sat}$ (tant que $\epsilon > 0$) : $v_e = -\frac{1}{RC} V_{sat} \, t + v_e(0)$

Si $v_s = -V_{sat}$ (dès lors que $\epsilon < 0$) : $v_e = \frac{1}{RC} V_{sat} \, t + v_e(0)$

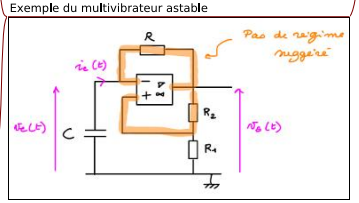


Détermination de la période (avec les pentes)

$$T = 4RC\frac{R}{R_2}$$

On obtient l'association d'un signal triangulaire et d'un signal créneau.

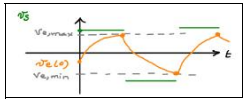
Exemple du multivibrateur astable



Analyse du comportement

Si $v_s = +V_{sat}$ (tant que $\epsilon > 0$) : $v_e = V_{sat} + Ri_e = V_{sat} - RC\frac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}t}$

Si $v_s = -V_{sat}$ (dès lors que $\epsilon < 0$) : $v_e = -V_{sat} + Ri_e = -V_{sat} - RC\frac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}t}$

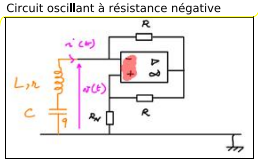


Détermination de la période (avec les conditions aux limites)

$$T = 2RC\ln\left(\frac{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2}}{1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2}}\right)$$

Exemple du circuit oscillant à résistance négative

Circuit oscillant à résistance négative



Équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + (r - R_N)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0$$

Les éventuelles oscillations qui démarrent sont amorties rapidement si

$$R_N < r$$

Les oscillations peuvent démarrer sur du bruit (amplification) si

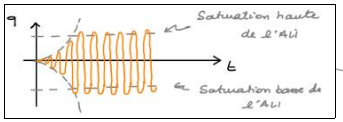
$$R_N > r$$

Les oscillations sont **sinusoïdales** si

$$\boxed{R_N = r}$$

Cas du régime saturé (ALI saturé)

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + (r + R)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = \pm V_{sat}$$



Existe pour une tension de sortie qui ne sature pas l'ALI

$$|s| \leqslant V_{sat}$$
soit :
$$|e| \leqslant \frac{R_N}{R + R_N} V_{sat} \text{ et } |i_e| \leqslant \frac{1}{R + R_N} V_{sat}$$

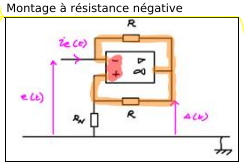
Régime linéaire

$$e = -R_N \, i_e$$

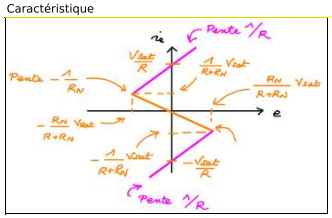
Régime saturé

$$e = R \, i_e \pm V_{sat}$$

Montage à résistance négative



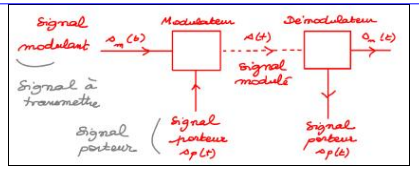
Caractéristique



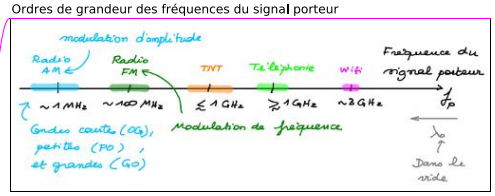
Modulation Démodulation

Pour différencier plusieurs signaux émis en même temps, il est nécessaire de les << marquer >>, c'est l'un des objectifs de la << modulation >>.

La **modulation** d'un **signal porteur** consiste à moduler à tout instant l'un de ses paramètres (amplitude, fréquence ou phase) à l'aide d'un **signal modulant.** On obtient un **signal modulé.**



Ordres de grandeur des fréquences du signal porteur



La modulation d'amplitude

On module **l'amplitude d'un signal porteur sinusoïdal** par un signal modulant décalé :

$$s(t) = K \times s_p(t) \times (S_0 + s_m(t))$$

avec

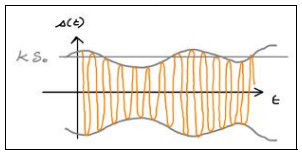
le gain K

le décalage S_0

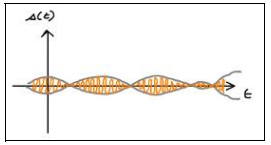
le signal porteur $s_p(t) = S_p \cos(\omega_p t + \varphi_p)$

Taux de modulation $m = \frac{S_{m,\max}}{S_0}$

Le signal modulant est contenu dans l'enveloppe $m \leqslant 1$

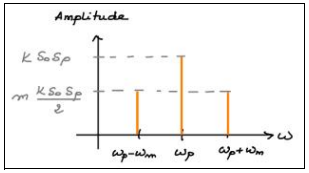


sauf en cas de **surmodulation.** $m > 1$

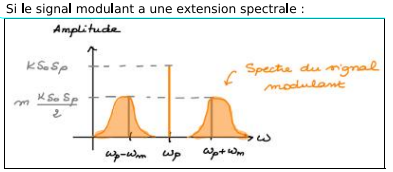


Spectre d'un signal modulé en amplitude par un signal modulant sinusoïdal

$$s(t) = K \times (S_0 + S_m \cos(\omega_m t + \varphi_m)) \times S_p \cos(\omega_p t + \varphi_p)$$
$$= KS_0 S_p \cos(\omega_p t + \varphi_p) + m\frac{KS_0 S_p}{2}(\cos((\omega_p + \omega_m)t + \varphi_p + \varphi_m) + \cos((\omega_p - \omega_m)t + \varphi_p - \varphi_m))$$



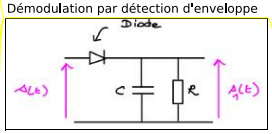
Si le signal modulant a une extension spectrale :



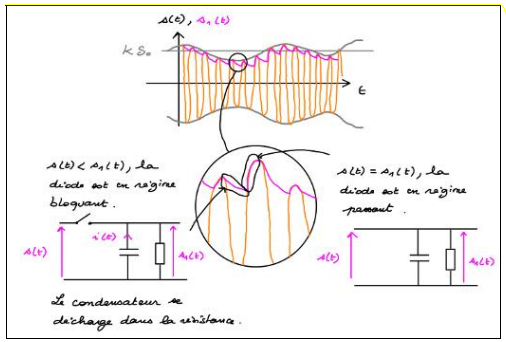
La démodulation d'amplitude

Il s'agit de récupérer le **signal modulant.**

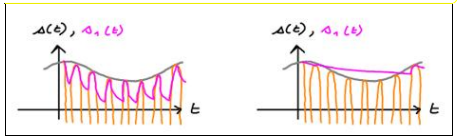
Démodulation par détection d'enveloppe



Fonctionnement



Deux cas extrêmes



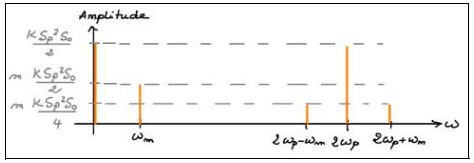
Critère de choix

$$T_p << RC < T_m$$

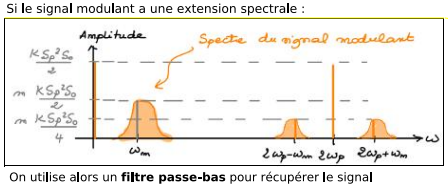
Démodulation synchrone

On multiplie le signal modulé **par la porteuse, de même phase.**

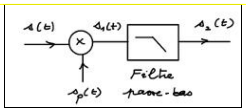
$$s1(t) = s(t) \times Sp\cos(\omega_p t + \varphi_p)$$
$$= \frac{K^2 S_p^2 S_0}{2}(1 + \cos(2\omega_p t + 2\varphi_p) + m\cos(\omega_m t + \varphi_m) + \frac{m}{2}(\cos((2\omega_p + \omega_m)t + 2\varphi_p + \varphi_m) + \cos((2\omega_p - \omega_m)t + 2\varphi_p - \varphi_m))$$



Si le signal modulant a une extension spectrale :



On utilise alors un **filtre passe-bas** pour récupérer le signal modulant.



Transport de charge

La loi d'Ohm

Définitions

Loi d'Ohm locale

$$\vec{j} = \gamma \, \vec{E}$$

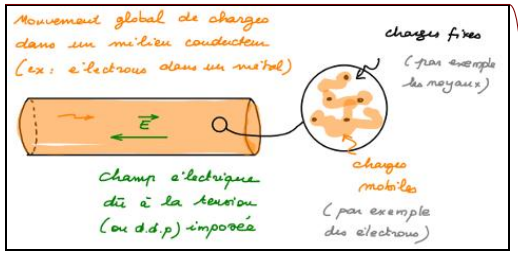
Densité volumique de particules

$$n$$

Expressions du vecteur densité de courant électrique

$$\vec{j} = \rho \, \vec{v} = \sum_i n_i \, q_i \, \vec{v}_i$$

Modèle de Drude de la conduction électrique



On modélise les **interactions entre charges mobiles et charges fixes** par une **force de frottement fluide**.

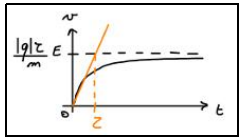
$$\vec{F}_f = -\alpha \, \vec{v}$$

PFD sur une charge mobile

Solution (vitesse **moyenne** initiale nulle)

$$\vec{v} = \frac{q\,\tau}{m}\vec{E}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$$

Si $t >> \tau$: $\boxed{\vec{v} \simeq \frac{q\,\tau}{m}\vec{E}}$



$$-\alpha\vec{v} + q\vec{E} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

Expression de la **conductivité électrique**

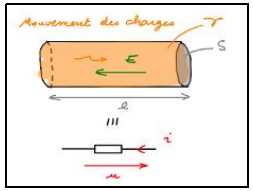
$$\vec{j} = n \, q \, \vec{v} = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E} = \gamma \, \vec{E} \text{ soit } \boxed{\gamma = \frac{nq^2\tau}{m}}$$

L'effet Joule

Résistance d'un conducteur cylindrique

$$i = \vec{j}\cdot\vec{S} = \gamma \, ES \text{ et } u = E\,\ell$$

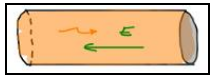
$$\boxed{R = \frac{u}{i} = \frac{\ell}{\gamma\,S}}$$



Puissance électrique volumique reçue

$$\boxed{p_V = \vec{j}\cdot\vec{E}}$$

avec $p = \iiint_V \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V$



On s'intéresse ici au transport de charges dans un milieu conducteur.

Définitions

Échelles de description de la matière

Échelle macroscopique (dimension caractéristique)

$$L$$

Échelle mésoscopique (volume élémentaire)

$$\ell^3 << \mathrm{d}V << L^3$$

Échelle microscopique (libre parcours moyen)

$$\ell$$

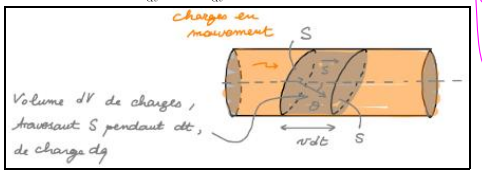
Densité volumique de charge

$$\boxed{\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}}$$

Caractéristiques d'un mouvement de charges

Courant électrique

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho \, v\mathrm{d}t \, S\cos\theta}{\mathrm{d}t} = \rho\,\vec{v}\cdot\vec{S} = \vec{j}\cdot\vec{S}$$



Vecteur densité de courant électrique

$$\boxed{\vec{j} = \rho\,\vec{v}}$$

Courant électrique

$$\boxed{i = \iint_S \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

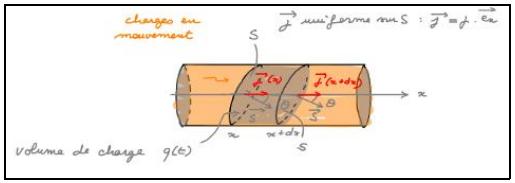
Champ uniforme

$$i = \vec{j}\cdot\vec{S}$$

Bilan de charge

$$\frac{q(t+\mathrm{d}t) - q(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{j}(x)\cdot\vec{S} - \vec{j}(x+\mathrm{d}x)\cdot\vec{S}$$

$$\frac{\rho(t+\mathrm{d}t) - \rho(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{j(x+\mathrm{d}x) - j(x)}{\mathrm{d}x}$$

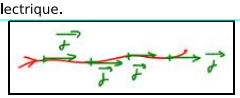


Équation de conservation de la charge

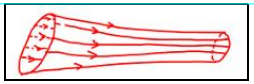
$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0}$$

Description d'un mouvement de charges

Une **ligne de courant** est une courbe **tangente** en tout point et à tout instant au vecteur densité de courant électrique.



Un **tube de courant** est la surface engendrée par les lignes de courant **s'appuyant sur un contour fermé choisi arbitrairement**.



Régime stationnaire

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$$

La loi des noeuds

En régime stationnaire

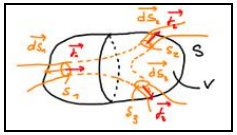
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \text{ soit } \boxed{\mathrm{div}\vec{j} = 0}$$

Le **flux** du vecteur densité de courant électrique **à travers toute surface fermée** est donc nul. On dit que le vecteur densité de courant électrique est **à flux conservatif**.

$$\oint_S \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\vec{j}\,\mathrm{d}V = 0$$

On retrouve la **loi des noeuds**.

$$i_{\text{total}} = \oint_S \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0 \text{ soit } -i_1 + i_2 + i_3 = 0$$



Diffusion thermique

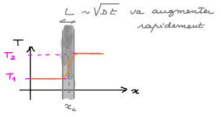
Conditions aux limites

Contact solide-solide

Le contact thermique parfait **entre deux solides** entraine rapidement **la continuité de la température et du vecteur densité de courant thermique.**

$$T(x_c^-) = T(x_c^+)$$

$$\vec{j}_Q(x_c^-) = \vec{j}_Q(x_c^+)$$



Le contact avec un **thermostat impose la température à l'interface.**

$$T(x_c) = T_0$$



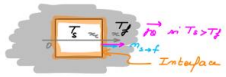
Ces lois sont aussi valables pour le contact d'un solide avec un fluide non brassé.

Contact solide-fluide

À l'interface entre **un solide et un fluide brassé, la température peut être discontinue. Le vecteur densité de courant thermique est continu** et donné par la relation de Newton ou **loi des échanges conducto-convectifs.**

$$T(x_c^-) \neq T(x_c^+)$$

$$\vec{j}_Q(x_c^-) = \vec{j}_Q(x_c^+) = h(T_s - T_f)\,\vec{n}_{s\to f}$$

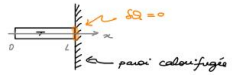


Le coefficient conducto-convectif augmente avec le brassage (mouvements du fluide).

$h > 0$

Contact avec une paroi calorifugée

$$\vec{j}_Q(x_c) = \vec{0}$$



Exemples

Barre calorifugée en contact avec deux thermostats

En régime stationnaire

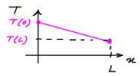
$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \text{ soit } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

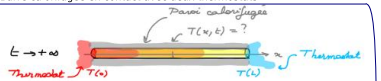
Intégration

$$\frac{\partial T}{\partial x} = Cte$$

Profil de température

$$T = -\frac{T(0) - T(L)}{L}x + T(0)$$





Barre en contact avec l'air et deux thermostats

Bilan d'énergie interne sur un volume élémentaire

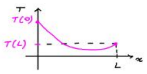
$$\frac{dU}{dt} = \mu c \frac{\partial T}{\partial t} S dx = j_Q(x)S - j_Q(x+dx)S - h(T(x) - T_a)dS_{lat}$$

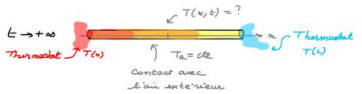
$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2h}{\lambda R}T = -\frac{2h}{\lambda R}T_a}$$

puis on pose $\frac{1}{\ell^2} = \frac{2h}{\lambda R}$

Profil de température

$$T = T_a + (T(0) - T_a)\mathrm{ch}(x/a) + \frac{(T(L) - T_a) - (T(0) - T_a)\mathrm{ch}(L/\ell)}{\mathrm{sh}(L/\ell)}\mathrm{sh}(x/\ell))$$





Cas particulier du régime stationnaire, sans therme source

Le flux thermique se conserve.

$$\frac{dU}{dt} = 0 \text{ et } p_{autres} = 0 \text{ soit } \boxed{\phi_{Q,entrant} = \phi_{Q,sortant}}$$

Expression du flux thermique

$$\phi_Q = j_Q S = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S = \frac{\lambda S}{L}(T(0) - T(L))$$

Analogie électrique

$$\boxed{\phi_Q = \frac{T(0) - T(L)}{R_{th}}} \equiv \boxed{i = \frac{V_1 - V_2}{R}}$$

Résistance thermique

$$\boxed{R_{th} = \frac{L}{\lambda S}}$$

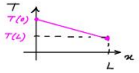
Lois d'association

En série : $R_{th,eq} = \sum_i R_{th,i}$

En dérivation : $\frac{1}{R_{th,eq}} = \sum_i \frac{1}{R_{th,i}}$

Profil de température dans le cas **unidirectionnel**

$$T = -\frac{T(0) - T(L)}{L}x + T(0)$$



Diffusion thermique

Les différents modes de transfert thermique

Advection : transfert d'énergie par déplacement de matière (on parle de convection lorsque cela se produit sous l'effet d'un gradient)

Rayonnement : transfert d'énergie sans support matériel

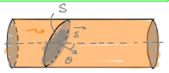
Diffusion (ou conduction) thermique : transfert d'énergie dans un milieu matériel sans déplacement de matière

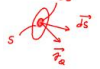
Flux thermique

Vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_Q$

Flux thermique à travers une surface orientée

$$\phi_Q = \frac{\delta Q}{dt} = \iint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$$





Homogène à une puissance — W

Vecteur densité de courant uniforme $\phi_Q = \vec{j}_Q \cdot \vec{S}$

Équilibre thermodynamique

Équilibre thermodynamique global : état dans lequel les propriétés macroscopiques du système n'évoluent plus dans le temps et sont uniformes dans toute partie homogène.

Équilibre thermodynamique local : état dans lequel chaque élément de volume de taille mésoscopique du système peut être individuellement considéré en état d'équilibre thermodynamique.

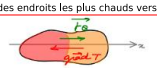
On peut donc définir localement des grandeurs qui d'ordinaire ne sont définissables que globalement.

Loi de Fourier

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\mathrm{grad}}T$$



La diffusion thermique se fait des endroits les plus chauds vers les endroits les plus froids.



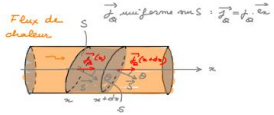
Conductivité thermique λ — Unité $\mathrm{W.K^{-1}.m^{-1}}$

Bilan d'énergie interne

$$U(t+dt) - U(t) = \delta Q + p_{autres}dt = \phi_{Q,entrant}dt - \phi_{Q,sortant}dt + p_{autres}dt$$

Bilan d'énergie interne sur un volume

$$\boxed{\frac{dU}{dt} = \phi_{Q,entrant} - \phi_{Q,sortant} + p_{autres}}$$



Équation locale de conservation de l'énergie interne

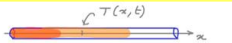
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j}_Q = p_{V,autres}$$

u : Énergie interne **volumique**

$p_{V,autres}$: Puissance **volumique** d'autres sources que la conduction thermique

Équation de la diffusion thermique

Exemple d'une diffusion thermique unidirectionnelle



Bilan d'énergie interne sur un volume élémentaire

$$\frac{dU}{dt} = j_Q(x)S - j_Q(x+dx)S = -\frac{\partial j_Q}{\partial x}Sdx$$

Loi de Fourier

$$j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

Pour une phase condensée

$$\frac{dU}{dt} = C\frac{dT}{dt} = \mu Sdx\, c \frac{T(x,t+dt) - T(x,t)}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dU}{dt} = \mu c \frac{\partial T}{\partial t} Sdx}$$

Capacité thermique massique c

Masse volumique μ

Équation de la diffusion thermique

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

Coefficient de diffusion thermique $D = \frac{\lambda}{\mu c}$ — Unité $\mathrm{m^2.s^{-1}}$

Généralisation, à trois dimensions

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D\,\Delta T + \frac{p_{V,autres}}{\mu c}}$$

Irréversibilité : Changer t en $-t$ dans l'équation de diffusion modifie celle-ci, le phénomène de diffusion est fondamentalement **irréversible.**

Ordre de grandeur du temps de diffusion

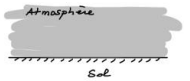
$$\boxed{\tau \sim \frac{L^2}{D}}$$

Ordre de grandeur de la distance de diffusion

$$\boxed{L \sim \sqrt{D\tau}}$$

Exemple de la diffusion thermique due aux variations journalière et/ou annuelles dans le sol, selon un axe Ox descendant (ondes thermiques)

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$



Sur une profondeur de l'ordre de quelques épaisseurs de peau, l'amplitude de la variation de température devient négligeable.

Variation autour d'une valeur moyenne $\theta = T - T_m$

Équation de la diffusion thermique

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

Solution en onde progressive $\theta \leftrightarrow \underline{\theta} = \underline{\theta}_0\, e^{j(\omega t - kx)}$

Relation de dispersion $k = \pm\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1-j) = \pm\frac{1-j}{\delta}$

Solution amortie $\theta = \theta_0\, e^{-x/\delta}\cos(\omega t - x/\delta + \varphi)$

Épaisseur de peau

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}}$$

Fluctuations journalières $\delta \sim 9$ cm

Fluctuations annuelles $\delta \sim 2$ m

Diffusion de particules

Les différents modes de transfert de masse

Advection : déplacement de matière (on parle de convection lorsque cela se produit sous l'effet d'un gradient)

Diffusion de particules : migration de matière tendant à uniformiser les concentrations

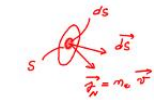
Flux de particules

Vecteur densité de flux de particules $\vec{j}_N = n_v\,\vec{v}$

Densité volumique de particules n_v

Flux de particules à travers une surface orientée $\phi_N = \frac{\delta N}{\mathrm{d}t} = \iint_S \vec{j}_N \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

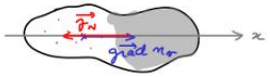
Vecteur densité de flux uniforme $\phi_N = \vec{j}_N \cdot \vec{S}$



Loi de Fick

$\vec{j}_N = -D\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,n_v$

La diffusion thermique se fait des endroits les plus concentrés vers les endroits les moins concentrés.



Coefficient de diffusion de particules D

Unité $\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$

Bilan de particules

$N(t+\mathrm{d}t) - N(t) = \phi_{N,\text{entrant}}\mathrm{d}t - \phi_{N,\text{sortant}}\mathrm{d}t + \Sigma_{\text{création}}\mathrm{d}t$

Taux de création de particules par unité de temps $\Sigma_{\text{création}}$

Bilan de particules sur un volume

$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \phi_{N,\text{entrant}} - \phi_{N,\text{sortant}} + \Sigma_{\text{création}}$

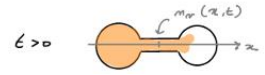
Équation locale de conservation de la matière $\frac{\partial n_v}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j}_N = \sigma_{\text{création}}$

Densité volumique de particules n_v

Taux de création de particules par unité de temps **et de volume** $\sigma_{\text{création}}$

Équation de diffusion

Exemple d'une diffusion unidirectionnelle



Bilan de particules sur un volume élémentaire

$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = j_N(x)S - j_N(x+\mathrm{d}x)S = -\frac{\partial j_N}{\partial x}S\mathrm{d}x$

Loi de Fick

$j_N = -D\frac{\partial n_v}{\partial x}$

Équation de la diffusion de particules

$\frac{\partial n_v}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 n_v}{\partial x^2}$

Généralisation, à trois dimensions

$\frac{\partial n_v}{\partial t} = D\,\Delta n_v + \sigma_{\text{création}}$

Irréversibilité : Changer t en $-t$ dans l'équation de diffusion modifie celle-ci, le phénomène de diffusion est fondamentalement **irréversible**.

Ordre de grandeur du temps de diffusion

$\tau \sim \frac{L^2}{D}$

Ordre de grandeur de la distance de diffusion

$L \sim \sqrt{D\tau}$

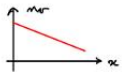
Exemples

Système unidimensionnel, sans terme de production, en régime stationnaire

En régime stationnaire $\frac{\partial n_v}{\partial t} = 0$ soit $\frac{\partial^2 n_v}{\partial x^2} = 0$

Intégration $\frac{\partial n_v}{\partial x} = Cte = -\frac{j_N}{D}$

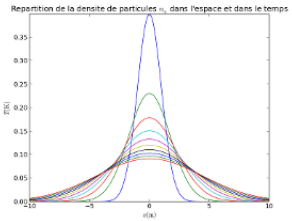
Profil $n_v = -\frac{j_N}{D}x + n_v(0)$



Système unidimensionnel, sans terme de production

Une analyse statistique suggère la solution :

$n_v = \frac{Cte}{\sqrt{4\pi Dt}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4Dt}}$



Fluides en écoulement

Modélisation d'un fluide

Un fluide est un milieu matériel **continu**, **déformable**, et **qui peut s'écouler.**

Une **particule de fluide** est de **taille mésoscopique**, soit grande à l'échelle microscopique et petite à l'échalle macroscopique.

$$\ell^3 << \mathrm{d}V << L^3$$

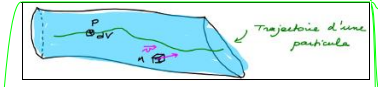
Typiquement

$$\mathrm{d}V \sim 1\ \mu\mathrm{m}^3$$

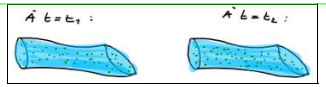
Masse volumique

$$\mu = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$$

Description du mouvement d'un fluide



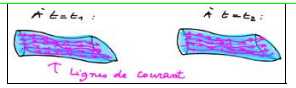
Description lagrangienne : on suit le mouvement de chaque particule P de fluide.



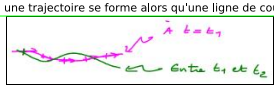
Description eulérienne : on étudie les caractéristiques des particules qui passent en chaque point M de fluide.



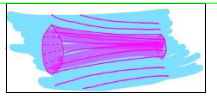
Une **ligne de courant** est une courbe tangente en chacun de ses points et à tout instant au vecteur vitesse.



Au cours du temps, une trajectoire se forme alors qu'une ligne de courant se déforme.



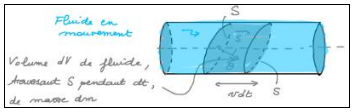
Un **tube de courant** est une surface engendrée par les lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé choisi arbitrairement.



Caractéristiques du mouvement d'un fluide

Débit massique

$$\phi_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu\, v\mathrm{d}t\, S\cos\theta}{\mathrm{d}t} = \mu\vec{v}\cdot\vec{S}$$

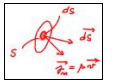


Vecteur densité de flux massique

$$\vec{j}_m = \mu\vec{v}$$

Flux massique ou **débit massique**

$$\phi_m = \iint_S \vec{j}_m \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

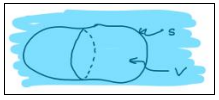


Champ uniforme

$$\phi_m = \vec{j}_m \cdot \vec{S}$$

Bilan de masse

$$-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \phi_m \text{ soit } -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \mu\mathrm{d}V = \oint_S \mu\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}(\mu\vec{v})\mathrm{d}V$$

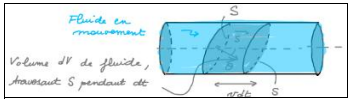


Équation locale de conservation de la masse

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} + \mathrm{div}(\mu\vec{v}) = 0$$

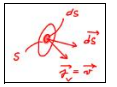
Débit volumique

$$\phi_V = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{v\mathrm{d}t\, S\cos\theta}{\mathrm{d}t} = \vec{v}\cdot\vec{S}$$



Flux volumique ou **débit volumique**

$$\phi_V = \iint_S \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$



Champ uniforme

$$\phi_V = \vec{v}\cdot\vec{S}$$

Lois de conservation

Écoulement stationnaire

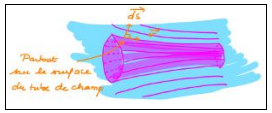
$\frac{\partial\mu}{\partial t} = 0$ soit $\boxed{\mathrm{div}(\mu\vec{v}) = 0}$

Les lignes de courant et les trajectoires sont confondues.

Conservation du débit massique dans un tube de courant

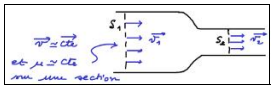
$$\phi_m = \oint_S \mu\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}(\mu\vec{v})\,\mathrm{d}V = 0$$

$$\boxed{\phi_{m,\text{entrant}} = \phi_{m,\text{sortant}}}$$



Exemple

$$\mu_1 v_1 S_1 = \mu_2 v_2 S_2$$



Écoulement incompressible et homogène

Masse volumique constante et uniforme

$\frac{\partial\mu}{\partial t} = 0$ soit $\mathrm{div}(\mu\vec{v}) = 0 = \mu\ \mathrm{div}\ \vec{v} + (\mathrm{grad}\mu)\cdot\vec{v} = \mu\ \mathrm{div}\ \vec{v}$

$\boxed{\mathrm{div}\ \vec{v} = 0}$

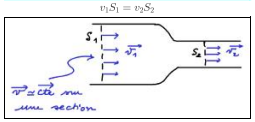
Conservation du débit volumique dans un tube de courant

$$\phi_V = \oint_S \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\ \vec{v}\ \mathrm{d}V = 0$$

$$\boxed{\phi_{V,\text{entrant}} = \phi_{V,\text{sortant}}}$$

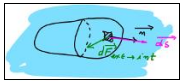
Exemple

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$



Actions de contact sur un fluide

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\text{ext}\to\text{int}} = \mathrm{d}\vec{F}_n + \mathrm{d}\vec{F}_t$$



Composante normale : **force de pression**

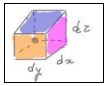
$$\mathrm{d}\vec{F}_n = -p\,\mathrm{d}\vec{S}$$

Résultante des forces

$$\boxed{\vec{F}_{\text{tot}} = \iint_S -p_{\text{tot}}\,\mathrm{d}\vec{S}}$$

Cas d'une **particule** de fluide : force **volumique** de pression

$$\mathrm{d}\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}p\ \mathrm{d}V$$



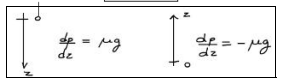
Poussée d'Archimède

$$\boxed{\vec{F}_A = -\mu_{\text{fluide}} V_{\text{corps}}\,\vec{g}}$$

Exemples

Équation locale de la statique des fluides

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}p = \mu\,\vec{g}}$$

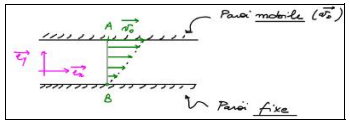


Composante tangentielle : **force de viscosité**

$$\mathrm{d}\vec{F}_t = \eta\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}S\,\vec{e}_x$$

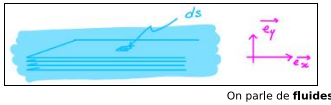
Écoulement de Couette plan

$$\vec{v} = v(y)\,\vec{e}_x \text{ et } \vec{F}_t = \eta\frac{\partial v}{\partial y}S\,\vec{e}_x$$



Loi de Newton : dans un écoulement parallèle, une couche de fluide supérieure exerce sur une surface élémentaire d'une couche de fluide inférieure une force

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F}_t = \eta\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}S\,\vec{e}_x}$$



On parle de **fluides newtoniens.**

Unité : le **Poiseuil**

$$\mathrm{Pℓ}\ (\text{ou Pa.s})$$

Coefficient de viscosité dynamique

$$\eta$$

Condition d'adhérence : au contact d'une paroi, la vitesse du fluide est nulle.

$$\boxed{\vec{v} = \vec{0}}$$

Écoulements incompressibles et homogènes

Résistance hydraulique d'une conduite

Écoulement de Poiseuille cylindrique

Calcul du débit volumique

$$\phi_V = \iint_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{p(0)-p(L)}{\frac{8\eta L}{\pi R^4}}$$

Chute de pression sur une longueur L

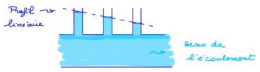
$$p(0) - p(L) = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \cdot \phi_V = R_{hyd} \cdot \phi_V$$

Résistance hydraulique

$$\boxed{R_{hyd} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}}$$

Profil de pression

$$\boxed{p(x) = p(0) - \frac{8\eta\phi_V}{\pi R^4} \cdot x}$$



Chute de pression sur une longueur L : Δp

Résistance hydraulique R_{hyd}

Débit volumique ϕ_V

Loi de Hagen-Poiseuille

$$\boxed{\Delta p = R_{hyd} \cdot \phi_V}$$

Généralisation

Coefficient de friction

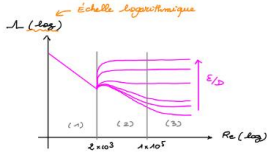
$$\boxed{\Lambda = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\mu U^2 \cdot \frac{L}{D}}}$$

Cas de l'écoulement de Poiseuille cylindrique

$$\Lambda = \frac{\frac{8\eta L}{\pi R^4} \cdot \phi_V}{\frac{1}{2}\mu U^2 \cdot \frac{L}{D}} = \frac{64}{R_e}$$

Influence du nombre de Reynolds

Cas général : **diagramme** (expérimental) **de Moody**



$$\Delta p \propto \frac{1}{2}\mu U^2 \cdot \frac{L}{D}$$

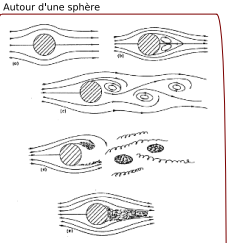
Soit : $\boxed{\Delta p = \Lambda \times \frac{1}{2}\mu U^2 \cdot \frac{L}{D}}$

Écoulement autour d'un obstacle

Autour d'une sphère

Constatations expérimentales

(a) $R_e \sim 1$
(b) $R_e \sim 20$
(c) $R_e \sim 100$
(d) $R_e \sim 1000$
(e) $R_e \sim 10^6$



Maître-couple : aire du projeté du solide dans un plan perpendiculaire à l'écoulement

S

Coefficient de trainée

C_x

Force de trainée (colinéaire à l'écoulement)

$$F_t \propto \frac{1}{2}\mu U^2 \cdot S$$

Soit : $\boxed{F_t = C_x \times \frac{1}{2}\mu U^2 \cdot S}$

Pour une sphère

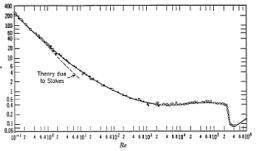
Faible nombre de Reynolds

$\ln C_x \simeq -\ln Re + Cte$ soit $C_x \simeq \frac{Cte}{R_e}$

$\boxed{F_t \propto U}$

Fort nombre de Reynolds

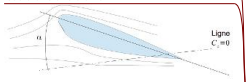
$C_x \simeq Cte$ soit $\boxed{F_t \propto U^2}$



Coefficient de portance

C_y

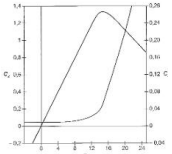
Cas d'une aile d'avion



Force de portance (normale à l'écoulement)

$$\boxed{F_p = C_z \times \frac{1}{2}\mu U^2 \cdot S}$$

Coefficients de trainée et de portance

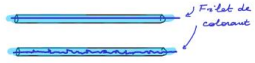


Constatations expérimentales

$\alpha < 15°$: portance qui augmente, trainée faible
$\alpha \geqslant 15°$: décrochage

La viscosité d'un fluide est responsable de nombreux phénomènes.

L'expérience de Reynolds (1883) : deux régimes d'écoulement



Un écoulement est **laminaire** si les lignes de courant sont localement parallèles entre elles à tout instant.



Introduction du **nombre de Reynolds**, sans dimension :

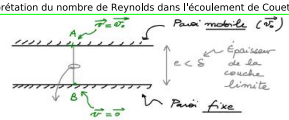
$$\boxed{R_e = \frac{\mu U D}{\eta}}$$

- μ : Masse volumique du fluide
- D : Diamètre de la conduite
- η : Viscosité dynamique

Vitesse débitante à travers la section S de la conduite (vitesse caractéristique de l'écoulement)

$$\boxed{U = \frac{\phi_V}{S}} = \frac{\iint_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}{\iint_S \mathrm{d}S}$$

Une interprétation du nombre de Reynolds dans l'écoulement de Couette plan



Débit convectif de quantité de mouvement (sens de l'écoulement)

$$\vec{\phi}_{p_x,conv} = \iint_S (\mu v_x)\vec{v}\ \mathrm{d}S'$$

Vecteur densité de courant convectif de quantité de mouvement

$$\vec{j}_{p_x,conv} = (\mu v_x)\vec{v}$$

Débit diffusif de quantité de mouvement (normal au sens de l'écoulement)

$$\vec{\phi}_{p_x,diff} = \iint_S -\nu\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mu v_x)\ \mathrm{d}S$$

Viscosité cinématique

$$\boxed{\nu = \frac{\eta}{\mu}}$$

Vecteur densité de courant diffusif de quantité de mouvement

$$\vec{j}_{p_x,diff} = -\nu\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mu v_x)$$

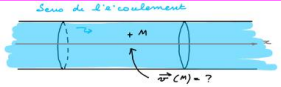
Nombre de Reynolds

$$\frac{j_{p_x,conv}}{j_{p_x,diff}} \sim \frac{\mu U D}{\eta} = R_e$$

Le nombre de Reynolds caractérise la prédominance du transport convectif ou diffusif de quantité de mouvement.

$R_e >> 1$: convection dominante
$R_e << 1$: diffusion dominante

La chute de pression le long d'une conduite dans l'écoulement de Poiseuille cylindrique



Écoulement **laminaire**

$\vec{v} = v(r,x)\ \vec{e}_x$

Écoulement **incompressible et homogène**

$\mathrm{div}\vec{v} = 0$ soit $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$

Caractéristiques de la vitesse

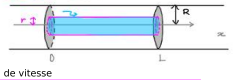
$\vec{v} = v(r)\ \vec{e}_x$

Bilan de quantité de mouvement sur un cylindre de fluide

$$\vec{F}_{pression} + \vec{F}_{viscosité} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$$

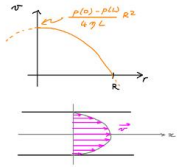
$$(p(0) - p(L))\pi r^2 + \eta\frac{\partial v}{\partial r}2\pi r L = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{p(0)-p(L)}{2\eta L}r \text{ soit } \boxed{v = -\frac{p(0)-p(L)}{4\eta L}r^2 + Cte}$$



Profil de vitesse

$v(r=R) = 0$ soit : $\boxed{v = -\frac{p(0)-p(L)}{4\eta L}(r^2 - R^2)}$



Bilans macroscopiques

Applications

Effet Venturi

Étranglement local $z_A = z_B$

Application du théorème de Bernoulli

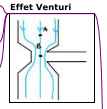
$$p_A + \mu\frac{v_A^2}{2} \simeq p_B + \mu\frac{v_B^2}{2}$$

Conservation du débit volumique

$$v_B S_A = v_B S_B$$

Diminution de pression dans l'étranglement

$$p_B \simeq p_A - \mu\frac{v_A^2}{2}\left(\frac{S_A^2}{S_B^2} - 1\right) < p_A$$



Débimètre

Application du théorème de Bernoulli

$$p_A + \mu g z_A + \mu\frac{v_A^2}{2} = p_B + \mu g z_B + \mu\frac{v_B^2}{2}$$

Conservation du débit volumique

$$v_A S = v_B S$$

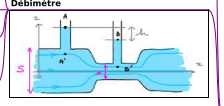
Zones d'immobilité du fluide

$$p_A' = p_0 + \mu g(z_A - z_A')$$

$$p_B' = p_0 + \mu g(z_B - z_B')$$

Vitesse d'écoulement

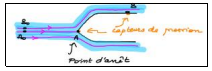
$$v_A = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{S^2}{s^2} - 1}}$$



Tube de Pitot

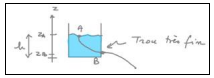
Vitesse relative du tube par rapport au fluide

$$v \simeq \sqrt{\frac{2}{\mu}(p_A - p_B)}$$



Formule de Torricelli

$$v_B \simeq \sqrt{2gh}$$



Application aux machines frigorifiques

ou en therme de puissance $\phi_m \cdot \Delta h_{AB} = p_{comp}$

Compresseur $\Delta h_{AB} = h_B - h_A = w_{comp}$

Condenseur $\Delta h_{BC} = h_C - h_B = q_{th}$

Détendeur $\Delta h_{CD} = 0$

Évaporateur $\Delta h_{DA} = h_A - h_D = q_b$

Efficacité en fonctionnement réfrigérateur

$$\eta = \frac{q_{fr}}{w_{comp}} = \frac{h_A - h_D}{h_B - h_A}$$

Efficacité en fonctionnement pompe à chaleur

$$\eta = -\frac{q_{th}}{w_{comp}} = \frac{h_B - h_C}{h_B - h_A}$$

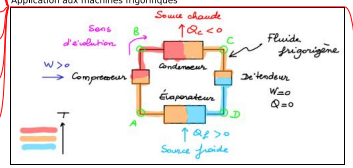
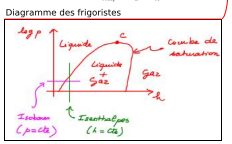


Diagramme des frigoristes



Bilan de quantité de mouvement

Le système choisi reste fermé entre t et $t+dt$.

Bilan de quantité de mouvement

$$\vec{0} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) \simeq m(t)\vec{dv} + \delta\vec{m}\vec{u}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} + \phi_m\vec{u}$$

Application du TQM

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i\,ext}$$

Bilan des forces

$$\sum_i \vec{F}_{i\,ext} = m(t)\,\vec{g}$$

Équation différentielle projetée

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{\phi_m}{m(t)}u$$

Décollage de la fusée

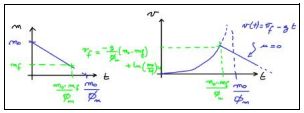
$$\phi_m u > m_0 g$$

Évolution de la masse

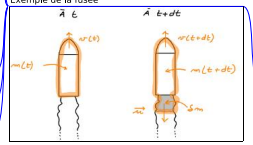
$$m(t) = -\phi_m t + m_0$$

Vitesse de la fusée

$$v(t) = -gt + u\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \phi_m t}\right)$$



Exemple de la fusée



Bilan de moment cinétique

Bilan de moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \phi_m\,(\ell_B\,v_B - \ell_A\,v_A)\,\vec{e}_z$$

Bilan des moments des forces

$$\sum_i \vec{M}\left(\vec{F}_{i\,ext}\right) = -\vec{\Gamma}_{sol\to tour} + \vec{\Gamma}_{pression} = -\vec{\Gamma}_{sol\to tour}$$

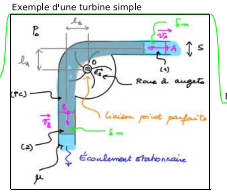
Bilan

$$\vec{\Gamma}_{sol\to tour} = \phi_m\,(\ell_A\,v_A - \ell_B\,v_B)\,\vec{e}_z$$

Application du TMC

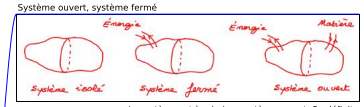
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{M}\left(\vec{F}_{i\,ext}\right)$$

Exemple d'une turbine simple

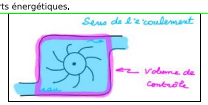


Cas d'un écoulement

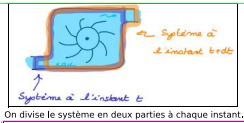
Système ouvert, système fermé



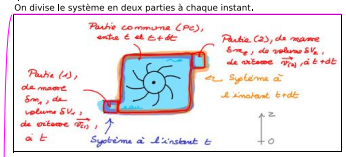
Le système est à priori un système ouvert. On définit un **volume de contrôle** où se produisent les transferts énergétiques.



Pour pouvoir appliquer les lois valables pour les systèmes fermés, on se ramène à un système fermé entre t et $t+dt$.



On divise le système en deux parties à chaque instant.



L'écoulement est considéré **stationnaire**.

$$\phi_m = Cte = \frac{\delta m_1}{dt} = \frac{\delta m_2}{dt} \text{ soit } \boxed{\delta m_1 = \delta m_2 = \delta m}$$

On applique le **premier principe** au système fermé ainsi défini.

$$\boxed{dU + dE_c + dE_{pp} = \delta W + \delta Q}$$

$$dU \simeq U(t+dt) - U(t) = U_{(PC)}(t+dt) + U_{(2)} - U_{(PC)}(t) - U_{(1)} = U_{(2)} - U_{(1)}$$

$$dE_c \simeq \mathcal{E}_{c(2)} - \mathcal{E}_{c(1)} = \frac{1}{2}\delta m v_{(2)}^2 - \frac{1}{2}\delta m v_{(1)}^2$$

$$\delta W = \delta W_{pression} + \delta W_{utile} = p_{(1)}\delta V_1 - p_{(2)}\delta V_2 + \delta W_{utile}$$

Premier principe en version industrielle : Pour un écoulement **stationnaire**, traversant un volume de contrôle, le premier principe s'écrit :

$$\boxed{\Delta h + \Delta e_c + \Delta(gz) = w_{utile} + q}$$

$$\boxed{\phi_m(\Delta h + \Delta e_c + \Delta(gz)) = p_{utile} + p_{thermique}}$$

Premier principe en version industrielle

Les grandeurs sont **massiques**.

Enthalpie **massique**

$$h = \frac{1}{\delta m}(U + pV) = \left(u + \frac{p}{\mu}\right)$$

énergie cinétique **massique**

$$e_c = \frac{v^2}{2}$$

Travail utile **massique**

$$w_{utile} = \frac{\delta W}{\delta m}$$

Transfert thermique **massique**

$$q = \frac{\delta W}{\delta m}$$

Les variation sont **entre l'entrée et la sortie**.

$$\Delta h = h_{(2)} - h_{(1)}$$

$$\Delta e_c = e_{c(2)} - e_{c(1)}$$

$$\Delta(gz) = g\,(z_{(2)} - z_{(1)})$$

Second principe en version industrielle : Pour un écoulement **stationnaire**, traversant un volume de contrôle, le second principe s'écrit :

$$\boxed{\Delta s = s_e + s_c}$$

Entropie **massique** s

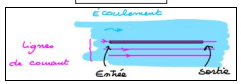
Entropie d'échange **massique** s_e

Entropie **massique** créée s_c

Modèle de **l'écoulement parfait :** un écoulement est dit parfait si on peut y **négliger les phénomènes de diffusion** (viscosité, transfert thermique).

Théorème de Bernoulli : pour un écoulement **parfait, stationnaire, incompressible et homogène** (PSIH), si le fluide ne subit pas d'autres actions mécaniques que celle de la pesanteur et que l'axe Oz est ascendant, **le long d'une ligne de courant**,

$$\boxed{p + \mu\frac{v^2}{2} + \mu g z = Cte}$$

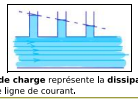


Cela traduit la **conservation de l'énergie mécanique volumique d'une particule de fluide** le long d'une ligne de courant.

Exemple de l'écoulement de Poiseuille cylindrique

$z = Cte,\ \mu = Cte,\ v = Cte$ mais $p \neq Cte$

$$p + \mu g z + \mu\frac{v^2}{2} \neq Cte$$



Énergie mécanique volumique d'une particule de fluide ou **charge** d'un écoulement

$$\boxed{p_{em} = p + \mu g z + \mu\frac{v^2}{2}}$$

La **perte de charge** représente la **dissipation d'énergie mécanique volumique** le long d'une ligne de courant.

$$p_{em,A} = p_{em,B} + \Delta p_{fut_AB}$$



Perte de chage régulière : le long d'une conduite

Perte de chage singulière : localement dans une conduite

Champ électrique en régime stationnaire

Champ électrique

Il est généré par la présence de **charges électriques.**



Une charge électrique est quantifiée

$e \simeq 1,6 \times 10^{-19}$ C

Loi de Coulomb entre deux charges ponctuelles

$$\vec{F}_{q_A \to q_B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A\, q_B}{AB^2}\, \vec{u}_{AB}$$

Permittivité diélectrique du vide

$\epsilon_0 \simeq \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$ F.m^{-1}

Une charge électrique génère autour d'elle un **champ électrique** tel que si une autre charge était plongée dans ce champ, elle subirait une force électrique :

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

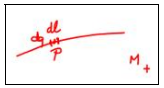
Théorème de superposition

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

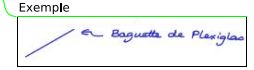
Distribution de charge

Distribution linéïque

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\ell}$$

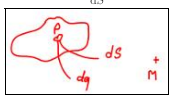


Exemple

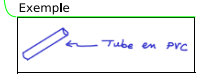


Distribution surfacique

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$$

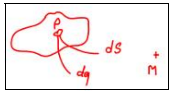


Exemple

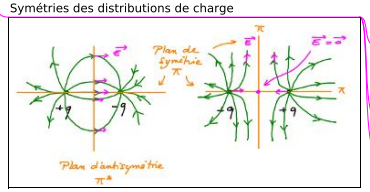


Distribution volumique

$$\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$$



Symétries des distributions de charge



Constatations

$\vec{E} \in \Pi$

$\vec{E} \perp \Pi^*$

L'intersection des plans de symétrie de la distribution de charge qui passent par M donne la direction du champ électrique.

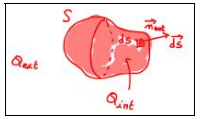
Un plan d'antisymétrie de la distribution de charge qui passe par M indique que le champ électrique lui est orthogonal.

Invariances

Une invariance de la distribution de charge selon une coordonnée engendre une indépendance de la norme du champ électrique selon cette coordonnée.

Théorème de Gauss : le flux sortant du champ électrique au travers d'une surface fermée est proportionnel à la charge électrique totale intérieure.

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$



Théorème de Gauss pour le champ de gravitation : le flux sortant du champ gravitationnel au travers d'une surface fermée est proportionnel à la masse totale intérieure.

$$\oint_S \vec{\mathcal{G}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

Champ gravitationnel

$$\vec{\mathcal{G}} = \frac{\vec{F}_g}{m}$$

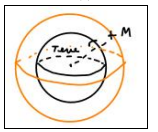
Constante gravitationnelle

$G \simeq 6,67 \times 10^{-11}$ usi

Exemple de la Terre

Symétries et invariances

$\vec{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(r)\, \vec{e}_r$



Théorème de Gauss

$$\vec{\mathcal{G}} = -\frac{GM_T}{r^2}\, \vec{e}_r$$

Exemples

Charge ponctuelle

Symétries et invariances

$\vec{E} = E(r)\, \vec{e}_r$

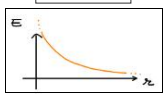
Surface de Gauss sphérique

Expression du champ électrique

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}\, \vec{e}_r$$

Théorème de Gauss

$4\pi r^2 \cdot E(r) = \frac{q}{\epsilon_0}$



Le champ infini en $r=0$ est dû à la modélisation ponctuelle de la charge.

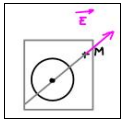
Sphère uniformément chargée en volume



Symétries et invariances

$\vec{E} = E(r)\, \vec{e}_r$

Surface de Gauss sphérique



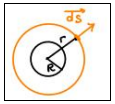
Théorème de Gauss

Cas $r>R$

$4\pi r^2 \cdot E(r) = \frac{\rho\, 4/3\, \pi R^3}{\epsilon_0}$

Expression du champ électrique

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}\, \vec{e}_r$$

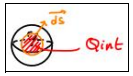


Cas $r<R$

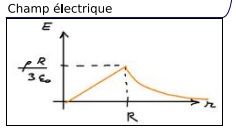
$4\pi r^2 \cdot E(r) = \frac{\rho\, 4/3\, \pi r^3}{\epsilon_0}$

Expression du champ électrique

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\, \vec{e}_r$$



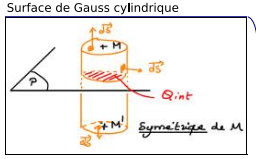
Champ électrique



Le champ n'est plus infini en $r=0$ du fait de la modélisation volumique.

Plan infini uniformément chargé en surface

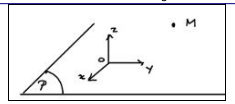
Surface de Gauss cylindrique



Symétries et invariances

$\vec{E} = E(z)\, \vec{e}_z$

On la prolonge jusqu'à un point M' symétrique de M.

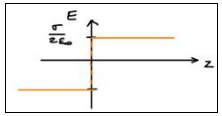


Théorème de Gauss

$2 \cdot ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$

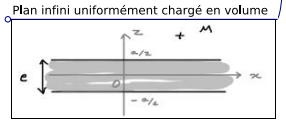
Expression du champ électrique

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \text{signe}(z) \cdot \vec{e}_z$$



La discontinuité en $z=0$ est dû à la modélisation surfacique.

Plan infini uniformément chargé en volume



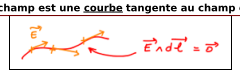
Pour passer d'une distribution à une autre, il faut exprimer la charge considérée de deux façon :

$Q = \sigma S = \rho V$

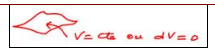
Lois locales du champ électrique en régime stationnaire

Topographie du champ et du potentiel électrique

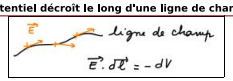
Une ligne de champ est une courbe tangente au champ électrique.



Une équipotentielle est une surface contenant l'ensemble des points au même potentiel électrique.



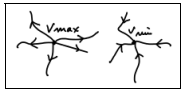
Le potentiel décroît le long d'une ligne de champ.



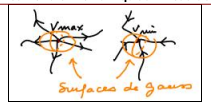
Propriétés

Les lignes de champ peuvent converger (vers un minimum de potentiel) ou diverger (depuis un maximum de potentiel).

$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$



Le potentiel n'edmet d'extremum qu'au niveau des charges.



Les lignes de champ sont othogonales aux surfaces équipotentielles.

$dV = 0 = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ donc $\vec{E} \perp d\vec{\ell}$

Équation de Maxwell-Gauss

Elle permet de retrouver le **théorème de Gauss.**

$\iiint_V \text{div}\vec{E} \cdot dV = \frac{\iiint_V \rho \, dV}{\epsilon_0}$ soit avec le théorème de GO $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

Cette équation est valable strictement dans le vide.

$\overrightarrow{\text{div}}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Équation de Poisson

Opérateur laplacien Δ

$\text{div}\vec{E} = \text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}}V) = -\Delta V$ soit $\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$

Équation de Maxwell-Faraday

Elle permet de retrouver la **loi de Faraday.**

$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ soit avec le théorème de Stokes $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = e = -\frac{d\phi}{dt}$

C'est une équation << stucturelle >>, valable dans tout milieu.

$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

On retouve **l'existence d'un potentiel** associé au champ électrique.

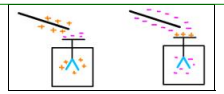
$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}V) = \vec{0}$ soit $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$

En régime **stationnaire**

$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \vec{0}}$

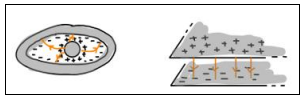
Le condensateur

L'électrisation par influence modifie uniquement la répartition de la charge d'un conducteur isolé **sur sa surface.**



deux conducteur sont dits **en influence totale** si toute ligne de champ sortant de l'un ne peut aller que sur l'autre.

$Q = -Q'$

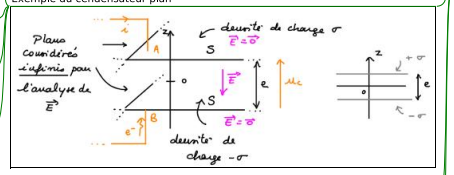


Un **condensateur** est un ensemble de **deux conducteurs en influence totale.**

Capacité

$\boxed{C = \frac{Q}{V - V'}}$

Exemple du cendensateur plan



z>e/2

$\vec{E} = \vec{E}_{+\sigma} + \vec{E}_{-\sigma} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z$ soit $\boxed{\vec{E} = \vec{0}}$

z<-e/2

$\vec{E} = \vec{E}_{+\sigma} + \vec{E}_{-\sigma} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z$ soit $\boxed{\vec{E} = \vec{0}}$

-e/2<z<e/2

$\vec{E} = \vec{E}_{+\sigma} + \vec{E}_{-\sigma} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z$ soit $\boxed{\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_z}$

Capacité

$u_C = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\sigma e}{\epsilon_0} = q\frac{e}{\epsilon_0 S}$

$\boxed{C = \frac{q}{u_C} = \frac{\epsilon_0 S}{e}}$

Permittivité diélectrique de l'isolant $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$

Permittivité diélectrique relative de l'isolant ϵ_r

Rôle d'un isolant

$\boxed{C = \frac{\epsilon S}{e}}$

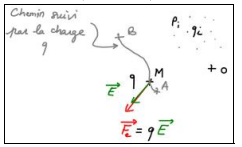
Densité volumique d'énergie électrique au sein d'un condensateur

$\boxed{w_E = \frac{\epsilon E^2}{2}}$ avec $W_E = \iiint_V w_E \, dV$

Énergie potentielle électrique

Mise en évidence

$\delta W = \vec{F}_e \cdot d\vec{\ell} = -d\left(q\sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i}{P_i M}\right) = -d(qV) = -d(\mathcal{E}_p)$



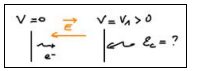
Potentiel électrique V Unité V

Énergie potentielle électrique $\mathcal{E}_p = qV$

Associée à la force électrique

Exemple

$\mathcal{E}_m = Cte = 0 + 0 = \mathcal{E}_c + qV_1$ soit $\boxed{\mathcal{E}_c = -qV_1}$



Lien champ - potentiel

Relation intégrale

$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

Entre deux points

$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

Conséquance directe

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$

Relation locale

$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -dV$ ou $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V}$

Relation intégrale

$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

Conséquance directe

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$

S'il n'existe pas de charges à l'infini

$V(\infty) = 0$

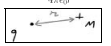
S'il existe des charges à l'infini

$V(\infty) \neq 0$

Exemples

Charge ponctuelle

$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + Cte = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

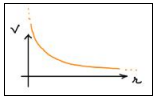


Champ électrique

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$

Potentiel électrique

$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + Cte = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$



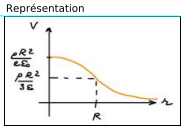
Sphère uniformément chargée en volume

Si $r > R$: $V = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$

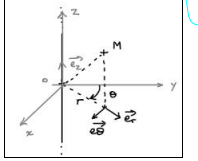
Si $r < R$: $V = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\left(R^2 - \frac{1}{3}r^2\right)$



Représentation



Fil infini uniformément chargé

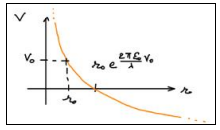


Champ électrique

$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{e}_r$

Potentiel électrique

$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_0 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}$



Champ magnétique en régime stationnaire

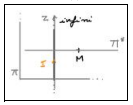
Exemples

Fil infini

Symétries et invariances

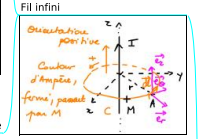
$\vec{B} = B(r)\,\vec{e}_\theta$

Contour d'Ampère circulaire



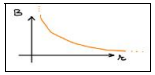
Théorème d'Ampère

$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I$



Champ magnétique

$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{e}_\theta$

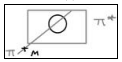


Fil épais infini

Symétries et invariances

$\vec{B} = B(r)\,\vec{e}_\theta$

Contour d'Ampère circulaire



Théorème d'Ampère

$r>R$

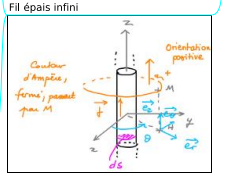
$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 j \pi R^2$

$\vec{B} = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}\,\vec{e}_\theta$

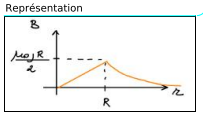
$r<R$

$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2$

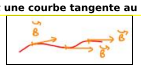
$\vec{B} = \frac{\mu_0 j}{2} r\,\vec{e}_\theta$



Représentation



Une ligne de champ est une courbe tangente au champ magnétique.

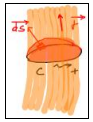


Les lignes de champ sont soit des courbes fermées, soit des droites.

Topographie du champ magnétique

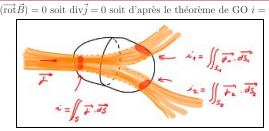
Elle permet de retrouver le théorème d'Ampère.

$\iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ soit d'après le théorème de Stockes $\oint_\ell \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I_{\mathrm{tot}}$



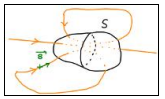
Elle permet de retrouver la loi des mailles.

$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}) = 0$ soit $\mathrm{div}\vec{j} = 0$ soit d'après le théorème de GO $i = i_1 + i_2$



Elle provient de la constatation que les lignes de champ sont des courbes fermées (ou des droites).

$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$ soit d'après le théorème de GO $\mathrm{div}\vec{B} = 0$



En régime stationnaire

Équation de Maxwell-Ampère

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Équation de Maxwell-Thomson

$\mathrm{div}\vec{B} = 0$

Le solénoïde

Modèle de la juxtaposition de n spires par unité de longueur

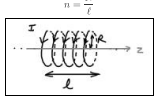
Pour un solénoïde infini

$\vec{B}_{\mathrm{ext}} = \vec{0}$

Solénoïde infini

$\ell > 10R$

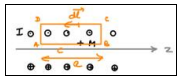
$n = \frac{N}{\ell}$



Théorème d'Ampère

$\vec{B} \cdot a = \mu_0 n a I$

$\vec{B}_{\mathrm{int}} = \mu_0 n I\,\vec{e}_z$



Symétries et invariances

$\vec{B} = B(r)\,\vec{e}_r$



Inductance propre

$\phi_{\mathrm{propre}} = N \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = LI$ soit $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$

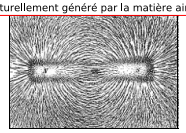
Densité volumique d'énergie magnétique

$w_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$ avec $W_B = \iiint_V w_B\,\mathrm{d}V$

Champ magnétique

$\vec{B}$

Il est naturellement généré par la matière aimentée.



Il est généré par des charges en mouvement (courant électrique). On peut déterminer son orientation par la règle du << tire-bouchon >>.

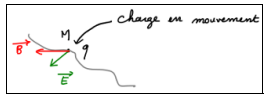


Force magnétique s'exerçant sur une charge ponctuelle

$\vec{F}_m = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$

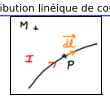
On généralise en introduisant la **force de Lorentz.**

$\vec{F}_{\mathcal{L}} = \vec{F}_{\mathcal{L}e} + \vec{F}_{\mathcal{L}m} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$



Distribution de courant

Distribution linéique de courant

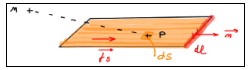


Distribution surfacique de courant

$I = \int_\ell \vec{j}_s \cdot \vec{n}\mathrm{d}\ell$

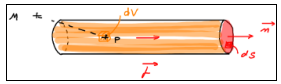
Vecteur densité de courant surfacique

$\vec{j}_s$



Distribution volumique de courant

$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n}\mathrm{d}S$



Pour passer d'un type de distribution à un autre, il faut exprimer le courant de deux façons.

$I = j_s \ell = jS$

Force magnétique s'exerçant sur un conducteur parcouru par un courant et plongé dans un champ magnétique extérieur : force de Laplace

$\vec{F}_L$

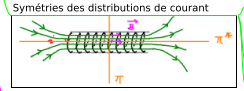
Conducteur filiforme

$\vec{F}_L = \int_\ell I\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B}_{\mathrm{ext}}$

Conducteur massif

$\vec{F}_L = \iiint_V \vec{j} \wedge \vec{B}_{\mathrm{ext}} \cdot \mathrm{d}V$

Symétries des distributions de courant



Constatations

$\vec{B} \in \Pi^*$

$\vec{B} \perp \Pi$

L'intersection des plans d'antimymétrie qui passent par M donne la direction du champs magnétique.

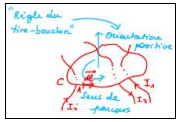
Un plan de symétrie qui passe par M indique que le champ magnétique lui est orthogonal.

Invariances

Une invariance de la distribution de courant selon une coordonnée engendre une indépendance de la norme du champ magnétique selon celle-ci.

Théorème d'Ampère : la circulation du champ magnétique sur un contour fermé est proportionnel à l'intensité totale du courant traversant toute surface s'appuyant sur ce contour.

$\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0\, I_{\mathrm{tot}}$



Perméabilité magnétique du vide

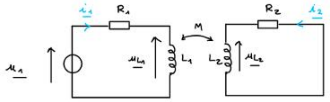
$\mu_0 \simeq 4\pi \times 10^{-7}$

Électromagnétisme en régime variable

Couplage par induction

Circuits couplés par mutuelle induction en régime variable

$$u_1 = R_1\, i_1 + L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$
$$0 = R_2\, i_2 + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$



Découplage

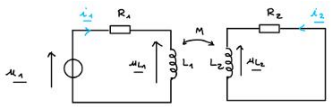
$$\underline{u}_1 = \left(R_1 + jL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{R_2 + jL_2\omega}\right)\underline{i}_1$$

Le couplage est équivalent à un unique dipôle d'impédance

$$\underline{Z} = R_1 + jL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{R_2 + jL_2\omega}$$

Aspects énergétiques de circuits couplés par mutuelle induction

$$u_1 = R_1\, i_1 + L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \rightarrow \times i_1$$
$$0 = R_2\, i_2 + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \rightarrow \times i_2$$



Bilan d'énergie

$$u_1 i_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2\right) + R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$$

Énergie magnétique des deux circuits couplés

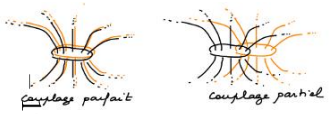
$$W_{LM} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

Condition sur le coefficient de mutuelle induction

$$W_{LM} = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu_0}\mathrm{d}V \geqslant 0$$
$$\frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_2 x^2 + Mx \geqslant 0 \text{ avec } x = \frac{i_2}{i_1}$$
$$\Delta \leqslant 0 \text{ soit } \boxed{M^2 \leqslant L_1 L_2}$$

Couplage parfait, couplage partiel

$$\boxed{M \leqslant \sqrt{L_1 L_2}} = M_{\max}$$



Courants de Foucault

Phénomène d'induction

Exemple d'un cylindre soumis à un champ magnétique extérieur variable



ARQS magnétique

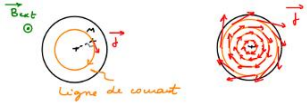
Champ magnétique créé par les courants induits négligé

Loi de Faraday

$$e = \oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = -\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$$
$$E\cdot 2\pi r = \pi r^2 \omega B_0 \sin(\omega t)$$
$$\boxed{\vec{E}_{induit} = \frac{r\omega B_0}{2}\sin(\omega t)\,\vec{e}_\theta}$$

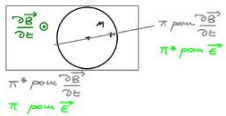
Courants induits

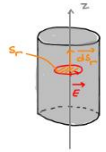
$$\vec{j} = \gamma\vec{E}$$
$$\boxed{\vec{j}_{induit} = \frac{r\gamma\omega B_0}{2}\sin(\omega t)\,\vec{e}_\theta}$$



Symétries et invariances

$$\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_\theta$$





Intérêt du feuilletage

$$\boxed{< p'_J >= \frac{< p_J >}{N}}$$

Aspects énergétiques

$$p_J = \iiint_V \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V = \frac{\gamma B_0^2 \omega^2 L\pi R^4}{8}\sin^2(\omega t)$$
$$\boxed{< p_J >= \frac{\gamma B_0^2 \omega^2 L\pi R^4}{16}}$$

Équations de Maxwell dans le vide

$$\text{M.T} : \boxed{\mathrm{div}\vec{B} = 0}$$
$$\text{M.F} : \boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$
$$\text{M.G} : \boxed{\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$
$$\text{M.A} : \boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}} = \mu_0\vec{j}_C + \mu_0\vec{j}_D$$

Courant de conduction

$$\vec{j}_C = \vec{j}$$

Courant de déplacement

$$\vec{j}_D = \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

La présence d'un courant de déplacement permet d'assurer la cohérence entre l'équation de M.A et l'équation de conservation de la charge.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0$$

Aux fréquences accessibles au XIXe siècle, le courant de déplacement était masqué par le courant de conduction.

En régime variable

$$\epsilon_0\left\|\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right\| \sim \epsilon_0\omega E << \|\gamma\vec{E}\| \sim \gamma E$$
$$\boxed{\omega << \frac{\gamma}{\epsilon_0}}$$

Typiquement

$$\omega << 10^{16}\ \mathrm{rad}$$

Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS) magnétique

$$\|\vec{j}_D\| << \|\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}\|$$

C'est un cas particulier de régime lentement variable.

Équations de Maxwell dans le vide

$$\text{M.T} : \mathrm{div}\vec{B} = 0$$
$$\text{M.F} : \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\text{M.G} : \mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\text{M.A} : \boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} \simeq \mu_0\vec{j}}$$

Conséquences de l'ARQS magnétique

Le champ magnétique est décrit par les **mêmes équations qu'en régime stationnaire, on pourra utiliser les mêmes lois.**

$$\text{M.T} : \mathrm{div}\vec{B} = 0$$
$$\text{M.A} : \boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} \simeq \mu_0\vec{j}}$$

Exemple

$$\vec{B}(t) \simeq \mu_0\, n\, i(t)\,\vec{e}_z$$



Le champ électrique n'est pas décrit par les **mêmes équations qu'en régime stationnaire, on ne pourra pas utiliser les mêmes lois.**

$$\text{M.G} : \mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\text{M.F} : \boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}}$$

Le courant de conduction est **à flux conservatif**, comme en régime stationnaire.

$$\text{M.A} : \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} \simeq \mu_0\vec{j} \text{ or } \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}) = 0$$
$$\boxed{\mathrm{div}\vec{j} \simeq 0}$$

La loi des noeuds est toujours valable.

La densité volumique de charge varie peu.

$$\mathrm{div}\vec{j} \simeq 0 \text{ soit } \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} \simeq 0}$$

La loi des noeuds est toujours valable.

Loi de Faraday

$$\boxed{e = -\frac{\mathrm{d}\phi_{tot}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(\phi_p + \phi_{ext})}{\mathrm{d}t}}$$

Phénomène d'induction

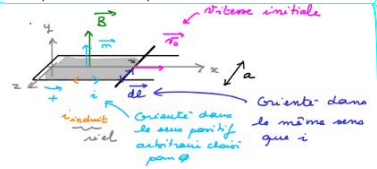
Flux propre

$$\phi_p = \iint_S \vec{B}_{propre}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

Flux extérieur

$$\phi_{ext} = \iint_S \vec{B}_{ext}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

Exemple des rails de Laplace



Le flux propre est négligé ici.

Équation électrique

$$e = -\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t = -Bav \text{ or } e = Ri \text{ soit } \boxed{-Bav = Ri}$$

Équation mécanique

$$m\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t = \vec{F}_L = \int_\ell i\mathrm{d}\vec{\ell}\wedge\vec{B} = iaB\,\vec{e}_x \text{ soit } \boxed{m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = iaB}$$

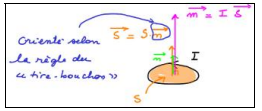
Découplage

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{B^2a^2}{mR}v = 0} \text{ soit } \boxed{v = v_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

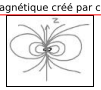
Milieux ferromagnétiques

Moment magnétique d'une spire parcourue par un courant

$\vec{m} = I\vec{S}$



Champ magnétique créé par cette spire



À grande distance, les lignes de champ d'une spire sont proches de celles de n'importe quelle source : on étend la notion de moment magnétique à toutes les sources, alors appelées **dipôles magnétiques**.



Exemples

Aimant : $m \simeq 10\ \mathrm{A.m^2}$

Terre : $m \simeq 7,9 \times 10^{22}\ \mathrm{A.m^2}$

Actions subies par un dipôle magnétique



Énergie potentielle d'interaction

$\mathcal{E}_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_{ext}$

Position stable d'une boussole

$\mathcal{E}_p$ minimale pour $\alpha = 0$

Force

$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathcal{E}_p) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\vec{m} \cdot \vec{B}_{ext})$

Boussole dans un champ uniforme

$\vec{F} = \vec{0}$

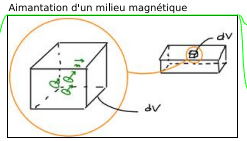
Moment

$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_{ext}$

Boussole subissant un couple nul

$\vec{\Gamma} = \vec{0}$ pour $\alpha = 0$

Aimantation d'un milieu magnétique



Vecteur aimantation

$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}V}$

Densité de dipôles magnétiques par unité de volume

L'aimantation de la matière est équivalente à la présence de courants électriques volumique, appelés **courants d'aimantation** (ou courants liés).

$\vec{j}_M = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{M}$

Équation de Mawxell-Ampère dans un milieu magnétique

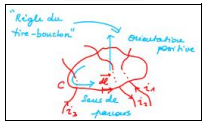
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{H} = \vec{j}$

Vecteur excitation magnétique

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

Théorème d'Ampère généralisé aux milieux magnétiques

$\oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = i_{\mathrm{t\acute{e}}}$



Milieu Linéaire Homogène Isotrope (LHI)

$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

Susceptibilité magnétique du milieu

χ_m

Conséquence directe

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$ avec $\mu = \mu_0\mu_r$

Perméabilité magnétique relative du milieu

$\mu_r = 1 + \chi_m$

Exemples

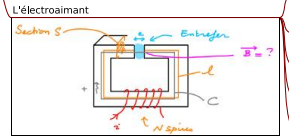
Milieux diamagnétiques

$\chi_m < 0$

Milieux paramagnétiques

$\chi_m(T) > 0$

L'électroaimant



Hypothèses du modèle

Pas de fuites

Milieu magnétique LHI

Section faible $S << \ell$

Caractéristiques de l'excitation magnétique

$\vec{H}$ uniforme

Théorème d'Ampère généralisé

$H_{\mathrm{circuit}} \cdot \ell + H_{\mathrm{entrefer}} \cdot e = N \cdot i$

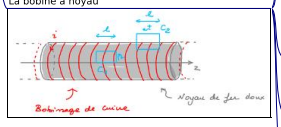
Conservation du flux magnétique

$B_{\mathrm{circuit}} \cdot S = B_{\mathrm{entrefer}} \cdot S$

Champ magnétique dans l'entrefer

$B_{\mathrm{entrefer}} = \frac{\mu_0 N i}{\frac{\ell}{\mu_r} + e}$

La bobine à noyau



Hypothèses du modèle

Pas de fuites $\vec{B}_{\mathrm{ext}} = \vec{0}$

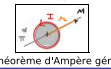
Milieu magnétique LHI

Longueur infinie

Symétries et invariances

$\vec{H} = H(r)\,\vec{e}_z$

Contour d'Ampère circulaire



Théorème d'Ampère généralisé

$\vec{B} = \mu \frac{N}{\ell} i\,\vec{e}_z$

Inductance propre

$\phi_p = N \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = NBS = Li$ soit $L = \frac{\mu N^2 S}{\ell}$

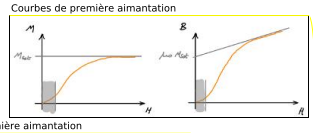
Aspect énergétique

$w_B = \frac{B^2}{2\mu}$

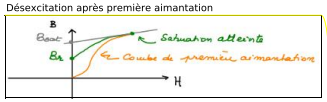
Milieu ferromagnétique (non LHI)

Cycles d'hytérésis

Courbes de première aimantation



Désexcitation après première aimantation



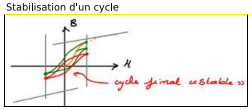
Champ rémanent (le milieu est aimanté)

B_r

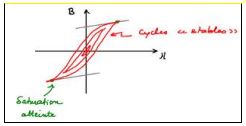
Excitation coercitive (le milieu est désaimanté)

H_c

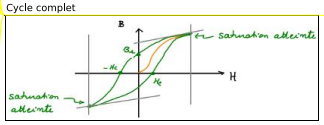
Stabilisation d'un cycle



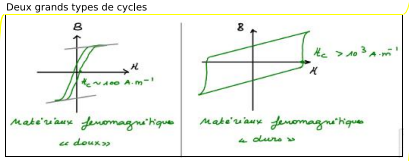
Désaimantation d'un milieu



Cycle complet



Deux grands types de cycles

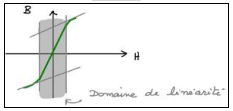


Matériaux doux pour limiter les pertes

Matériaux dur pour un grand champ rémanent

Cas d'un milieu ferromagnétique **particulièrement doux : le milieu peut être considéré comme quasi-LHI.**

$\vec{B} \simeq \mu\vec{H}$



Au delà de la **température de Curie**, le milieu devient paramagnétique.

Pertes dans les systèmes réels

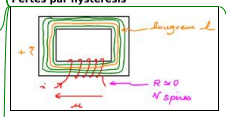
Pertes << cuivre >>

$p_{\mathrm{cuivre}} = R\,i^2$

Pertes << fer >>

Pertes par courants de Foucault

Pertes par hystérésis



Théorème d'Ampère généralisé

$H\ell = Ni$ soit $i = \frac{H\ell}{N}$

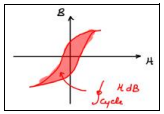
Puissance délivrée par le générateur au matériau

$p = ui = -ei = \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t \cdot i = NS\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\frac{H\ell}{N} = H\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \cdot V$

$p_{\mathrm{vol}} = H\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$

Puissance moyenne, restituée sous forme de chaleur

$< p_{\mathrm{vol}} > = f \oint_{\mathrm{cycle}} H\mathrm{d}B$



Pertes proportionnelles à la **fréquence** et à **l'aire du cycle**

Puissance électrique en régime variable

Régime sinusoïdal

Grandeurs complexes

$u = U\cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow \underline{u} = Ue^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{U}e^{j\omega t}$ avec $\underline{U} = Ue^{j\varphi}$

Impédance $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$

- Condensateur $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$
- Bobine $\underline{Z}_L = jL\omega$
- Résistance $\underline{Z}_R = R$
- Généralisation $\boxed{\underline{Z} = R + jX}$
  - **Résistance** R
  - **Réactance** X
- Module et argument

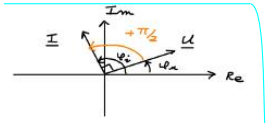
$$\arg(\underline{Z}) = \varphi_u - \varphi_i = \varphi$$
$$|\underline{Z}| = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{\mathcal{R}e(\underline{Z})}{\cos\varphi} = \frac{\mathcal{I}m(\underline{Z})}{\sin\varphi}$$

Facteur de puissance $\cos\varphi = \cos(\varphi_u - \varphi_i)$

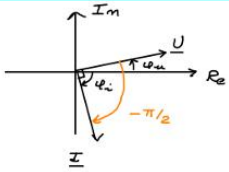
Puissance moyenne $< p >= U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi = \mathcal{R}e(\underline{Z})\ I_{\text{eff}}^2$

Diagramme de Fresnel

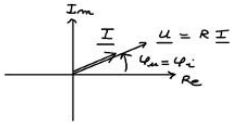
- Condensateur

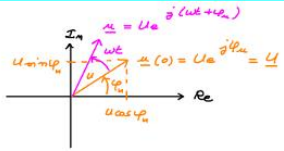


- Bobine



- Résistance



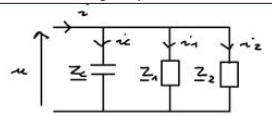


Pour une puissance nécessaire donnée, un facteur de puissance faible engendre un courant à fournir élevé : on cherche à **relever le facteur de puissance** de l'installation.

$$\cos\varphi = \frac{p}{U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}}$$

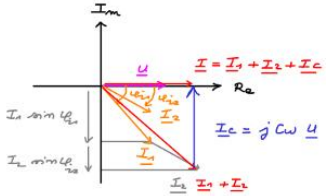
Exemple de relèvement du facteur de puissance

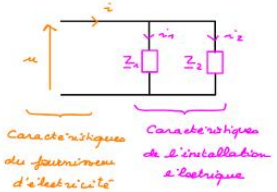
On ajoute une charge capacitive en dérivation.



Sa valeur permet le relèvement à une valeur proche de l'unité.

$$-C\omega = \mathcal{I}m\left(\frac{1}{\underline{Z}_1}\right) + \mathcal{I}m\left(\frac{1}{\underline{Z}_2}\right)$$

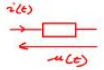




Régime variable

Puissance reçue par un dipôle

$p(t) = u(t)\ i(t)$



Puissance moyenne

$$< p(t) >= \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\ i(t)\ \mathrm{d}t$$

- Condensateur

$$p_C(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_c^2(t)\right) = \frac{\mathrm{d}W_C(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$< p_C(t) >= \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}W_C(t) = 0 \text{ (régime périodique)}$$
$$\boxed{< p_C(t) >= 0}$$

- Bobine

$$p_L(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right)$$
$$\boxed{< p_L(t) >= 0}$$

- Résistance

$$\boxed{< p_R(t) >= RI_{\text{eff}}^2 = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}}$$

Signaux périodiques

Décomposition en série de Fourier

Valeur moyenne

$$\boxed{< s(t) >= \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\mathrm{d}t}$$

Signaux sinusoïdaux

$< \cos(\omega t + \varphi) >= 0$

$< \sin(\omega t + \varphi) >= 0$

C'est la composante continue (fréquence nulle) de la DSF.

$a_0 =< s(t) >$

Valeur efficace

$$\boxed{S_{\text{eff}} = \sqrt{< s(t)^2 >}}$$

Signaux sinusoïdaux

Si $s(t) = S\cos(\omega t + \varphi)$ alors $\boxed{S_{\text{eff}} = \frac{S}{\sqrt{2}}}$

$< \cos^2(\omega t + \varphi) >= 1/2$

$< \sin^2(\omega t + \varphi) >= 1/2$

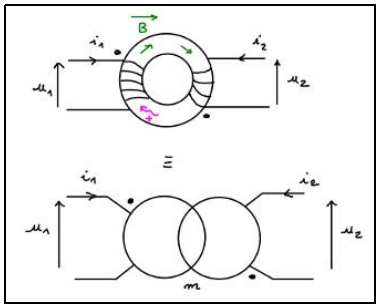
Pour un signal quelconque périodique

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)}$$

Le transformateur

Orientation des courants : tout courant qui rentre par le point créé un champ magnétique orienté dans le sens positif.

$$\frac{u_2}{u_1} = -m \text{ et } \frac{i_2}{i_1} = \frac{1}{m}$$



Aspects énergétiques

Pertes

Cuivre

$$p_{\text{cuivre}} = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$$

Fer

Par hystérésis

$$< p_{\text{vol}} >= f \oint_{\text{cycle}} H \cdot \mathrm{d}B$$

Par courants de Foucault

Énergie stockée

Milieu LHI

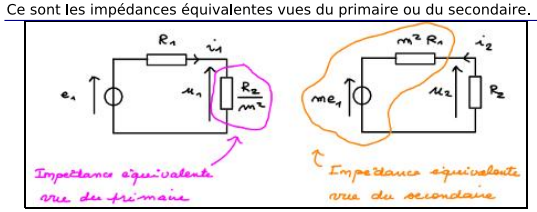
Densité volumique d'énergie magnétique

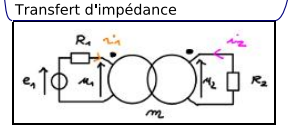
$$w_B = \frac{B^2}{2\mu}$$

$$W_B = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu}\,\mathrm{d}V = \iiint_V w_B\,\mathrm{d}V$$

Transfert d'impédance

Ce sont les impédances équivalentes vues du primaire ou du secondaire.

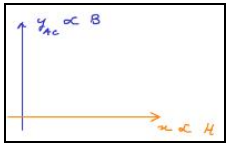




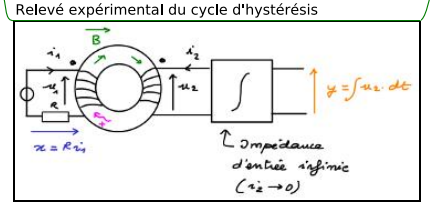
Tracé du cycle

$$u_2 = N_2 S \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \text{ soit } \boxed{y \propto N_2 S B + Cte}$$

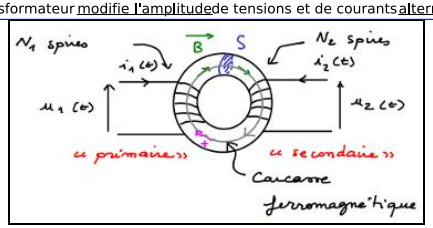
$$H \cdot \ell = N_1 i_1 + N_2 i_2 \simeq N_1 i_1 \text{ soit } \boxed{x = \frac{R_1 \ell}{N_1} H}$$



Relevé expérimental du cycle d'hystérésis



Un transformateur modifie l'amplitude de tensions et de courants alternatifs



Transformateur idéal : abscence de pertes (cuivre et fer) et de fuites

Loi de transformation des tensions

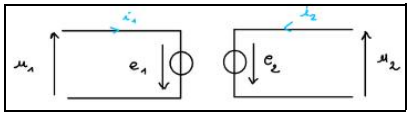
$$u_1 = -e_1 = \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}t} = N_1 S \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = -e_2 = \frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}t} = N_2 S \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1} = m}$$

Rapport de transformation

m



Loi de transformation des courants

Hypothèses

Milieu LHI

Pas de fuites

Théorème d'Ampère généralisé

$$H \cdot \ell = N_1 \cdot i_1 + N_2 \cdot i_2$$

Loi de transformation des courants

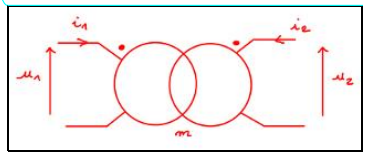
$$H = \frac{B}{\mu} \simeq 0 \text{ soit } \boxed{\frac{i_2}{i_1} = -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{m}}$$

Loi de transformation des puissances

$$\frac{u_2}{u_1} = m = -\frac{i_1}{i_2}$$

$$\boxed{u_1(t) i_1(t) + u_2(t) i_2(t) = 0}$$

Schéma normalisé



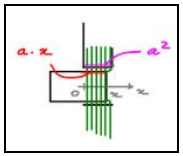
Contacteur électromagnétique en translation

Exemple du contacteur simple

Hypothèses
- Milieu LHI
- Pas de fuites
- Largeur faible $a << \ell$

Théorème d'Ampère généralisé
$$H \cdot \ell + H' \cdot \ell' + H_a \cdot 2e = Ni$$

Conservation du flux magnétique
$$B_a a x = B' a x = B a^2$$



Expression du champ dans la carcasse

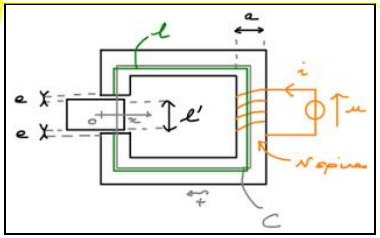
Si $\mu_r \to \infty$ alors $\boxed{B \simeq \frac{\mu_0 N i}{2ea} x}$

Expression de l'inductance

$\phi_p = NBS = Li$ d'où $\boxed{L \simeq \frac{\mu_0 \, aN^2}{2e} x}$

Force électromagnétique

$$F_{em} = \frac{\partial \mathcal{E}_{em}}{\partial x}\Big)_{i=Cte} = \frac{i^2}{2}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} \text{ d'où } \boxed{F_{em} \simeq \frac{\mu_0 \, aN^2}{4e} i^2}$$



Autre exemple

Hypothèses
- Milieu LHI
- Pas de fuites
- Largeur faible $a << \ell$

Théorème d'Ampère généralisé
$$H \cdot \ell + H_a \cdot 2x = Ni$$

Conservation du flux magnétique
$$B_a a^2 = B a^2$$

Expression du champ dans la carcasse

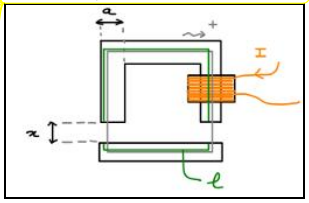
$$\boxed{B = \frac{\mu_0 N i}{\frac{\ell}{\mu_r} + 2x}}$$

Expression de l'inductance

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 \, a^2 N^2}{\frac{\ell}{\mu_r} + 2x}}$$

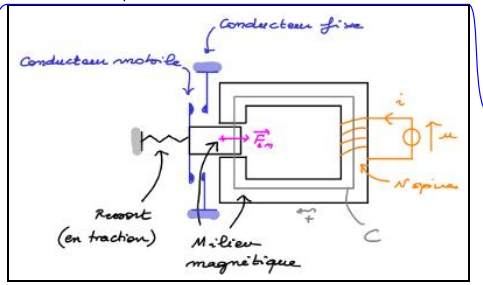
Force électromagnétique

$$\boxed{F_{em} = -\frac{\mu_0 \, a^2 N^2}{\left(\frac{\ell}{\mu_r} + 2x\right)^2} i^2}$$



Les **contacteurs** (ou relais) sont des interrupteurs mécaniques commandés électriquement.

Un modèle simple de contacteur



On peut montrer que

$$F_{em} = \frac{i^2}{2}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)_{i=Cte} = \frac{\partial \mathcal{E}_{em}}{\partial x}\Big)_{i=Cte}$$

Pour un actionneur électromagnétique à excitation simple

$$\boxed{F_{em} = \frac{\partial \mathcal{E}_{em}}{\partial x}\Big)_{i=Cte}}$$

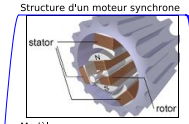
Pour un mouvement de rotation

$$\boxed{F_{em} = \frac{\partial \mathcal{E}_{em}}{\partial \theta}\Big)_{i=Cte}}$$

Machine synchrone

Stator

Structure d'un moteur synchrone



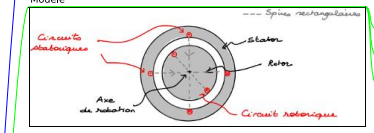
Stator (partie fixe) alimenté par des courants sinusoïdaux

Rotor (partie mobile) alimenté par un courant continu

Entrefer (espace entre les deux)

Fonctionnement réversible (**moteur** ou **alternateur**)

Modèle

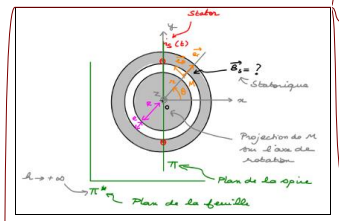


Milieux LHI idéaux
$\mu_r \to \infty$

Entrefer constant, de faible épaisseur
$e << R$

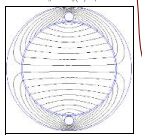
Effets de bord négligés
$h >> R$

Champ magnétique créé dans l'entrefer par une spire



Symétries et invariances

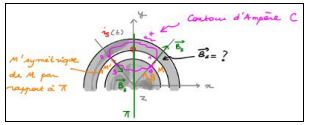
$\vec{B}_s = B_s(\theta)\ \vec{e}_r$



Contour d'Ampère radial dans l'entrefer

Théorème d'Ampère généralisé

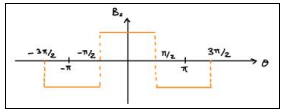
$$0 + \frac{B_s}{\mu_0} e + 0 + \frac{B_s}{\mu_0} e = i_s$$



Structure du champ dans l'entrefer

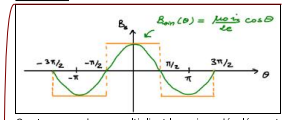
$B_s = \frac{\mu_0 i_s}{2e}$ pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$B_s = -\frac{\mu_0 i_s}{2e}$ pour $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

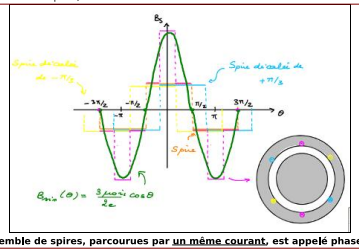


Champ magnétique sinusoïdal créé dans l'entrefer par plusieurs spires

L'objectif est de s'approcher d'une variation sinusoïdale.



On s'en approche en multipliant les spires, décalées entre elles d'un même angle (ci-dessous avec 3 spires).



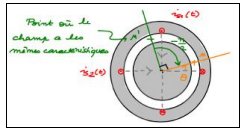
Cet ensemble de spires, parcourues par un même courant, est appelé phase.

$\vec{B}_{\text{phase}} \simeq K_s\ i_s \cos\theta\ \vec{e}_r$

Une phase sera schématiquement représentée par une seule spire.

Cas de deux phases statoriques décalées à angle droit

$\vec{B}_s = \vec{B}_{s1} + \vec{B}_{s2} = K_s\ i_{s1} \cos\theta\ \vec{e}_r + K_s\ i_{s2} \cos(\theta - \pi/2)\ \vec{e}_r$



On impose des courants en quadrature.

$i_{s1}(t) = I_s \cos(\omega t)$ et $i_{s2}(t) = I_s \sin(\omega t)$

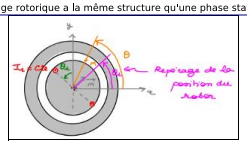
On obtient un **champ glissant**.

Soit $\vec{B}_s \simeq K_s\ I_s \cos(\omega t - \theta)\ \vec{e}_r$

On parle de moteur **diphasé**.

Rotor

Le bobinage rotorique a la même structure qu'une phase statorique.



On impose un courant constant.

$I_r = Cte$

On obtient un champ de la forme :

$\vec{B}_r \simeq K_r\ I_r \cos(\theta - \theta_r)\ \vec{e}_r$

Couple électromagnétique

$\Gamma_{em} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{em}}{\partial \theta_r}\right)_{\text{Courants constants}}$

Démarrage d'un moteur synchrone

$\Gamma_{em}(\alpha = 0) = 0$

Utiliser un dispositif annexe pour lancer le rotor à $\Omega \simeq \omega$

Faire croître progressivement ω pour avoir à tout instant $\Omega \simeq \omega$

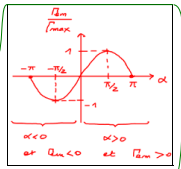
En régime permanent

$\theta_r = \Omega t - \alpha$

$\Gamma_{em} = \phi_0 I_s \sin((\omega - \Omega)t + \alpha)$

Le rotor tourne à la même vitesse que le champ glissant.

Rôle de l'angle α



Modes de fonctionnement

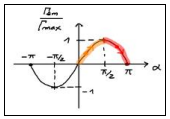
$\alpha > 0$: moteur synchrone

$\alpha < 0$: alternateur

Stabilité du fonctionnement en moteur synchrone

$\alpha \in]0, \pi/2[$: $\alpha \nearrow \Rightarrow \Gamma_{em} \nearrow \Rightarrow \alpha \searrow$: zone de stabilité

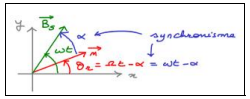
$\alpha \in]\pi/2, \pi[$: $\alpha \nearrow \Rightarrow \Gamma_{em} \searrow \Rightarrow \alpha \nearrow$: zone de décrochage



Condition de synchronisme

$< \Gamma_{em} >= 0$ sauf si $\omega = \Omega$

$\Gamma_{em} = \phi_0 I_s \sin(\alpha) =< \Gamma_{em} >$



Calcul du couple

$\Gamma_{em} = \frac{\partial \mathcal{E}_{em}}{\partial \theta_r}$

$\Gamma_{em} = \phi_0 I_s \sin(\omega t - \theta_r)$ avec $\phi_0 = \frac{V K_r K_s I_r}{2\mu_0}$

Calcul de l'énergie électromagnétique

$$\mathcal{E}_{em} = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu} dV \simeq \iiint_{\text{Entrefer}} \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \iiint_{\text{Entrefer}} \frac{(\vec{B}_r + \vec{B}_s)^2}{2\mu_0} dV$$

$\mathcal{E}_{em} = \frac{V}{4\mu_0}(K_r^2 I_r^2 + K_s^2 I_s^2 + 2K_r K_s I_r I_s \cos(\omega t - \theta_r))$ avec $V = 2\pi R e h$ le volume de l'entrefer

Les courants ne dépendant pas de l'angle rotorique,

$\Gamma_{em} = \frac{\partial \mathcal{E}_{em}}{\partial \theta_r}$

Équations électriques

On se place dans le cas où la condition de synchronisme est réalisée.

$\Omega = \omega$ et donc $\alpha = Cte$

<< Inducteur >>

Le **rotor** est parcouru par un courant constant et il tourne en suivant le champ magnétique statorique, il n'est donc le siège d'aucun phénomène d'induction.

$U_r = r\ I_r$

<< Induit >>

Le **stator** est le siège de phénomènes d'induction.

$u_1 = R\ i_1 + \frac{d}{dt}(\phi_{p1} + \phi_{r\to1} + \phi_{2\to1})$

$\phi_{p1} = L i_1$, $\phi_{2\to1} = 0$ (circuits orthogonaux) et $\frac{d\phi_{r\to1}}{dt} = -e_1 = e'_1$

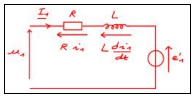
On considère deux phases identiques.

$$u_1 = R\ i_1 + L\frac{di_1}{dt} + e'_1$$
$$u_2 = R\ i_2 + L\frac{di_2}{dt} + e'_2$$

Forces contre-électromotrices d'induction

$e'_1 = \frac{d\phi_{r\to1}}{dt} = -\omega\phi_0 \cos(\omega t - \alpha)$

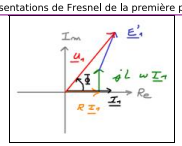
$e'_2 = \frac{d\phi_{r\to2}}{dt} = -\omega\phi_0 \sin(\omega t - \alpha)$



Équations complexes

$$\underline{U_1} = R\ \underline{I_1} + jL\omega\ \underline{I_1} + \underline{E'_1}$$
$$\underline{U_2} = R\ \underline{I_2} + jL\omega\ \underline{I_2} + \underline{E'_2}$$

Représentations de Fresnel de la première phase



La représentation pour la seconde phase est identique.

Aspects énergétiques

La puissance électrique reçue est dissipée par effet Joule (pertes cuivre) et absorbée par les f.c.e.m d'induction pour fournir la puissance motrice.

$U_r = r\ I_r \to \times I_r$

$u_1 = R\ i_1 + L\frac{di_1}{dt} + e'_1 \to \times i_1$

$u_2 = R\ i_2 + L\frac{di_2}{dt} + e'_2 \to \times i_2$

$$u_1 i_1 + u_2 i_2 + U_r I_r = R(i_1^2 + i_2^2) + r I_r^2 + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li_1^2 + \frac{1}{2}Li_2^2\right)}_{=0} + \underbrace{e'_1 i_1 + e'2i_2}_{-\omega\Gamma_{em}}$$

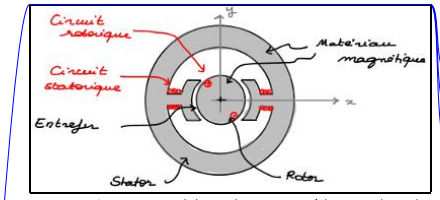
$p_e = p_J + p_{em}$ avec $p_{em} = \omega\Gamma_{em} = p_{to}$

Fonctionnement en alternateur

$\Gamma_{em} < 0$

Machine à courant continu

Structure du moteur à courant continu



Stator (partie fixe) alimenté par un courant continu (ou constitué d'aimants permanents) **<< Induit >>**

Rotor (partie mobile) alimenté par un courant continu **<< Inducteur >>**

Fonctionnement réversible (**moteur** ou **alternateur**)

Stator

Le stator produit un champ magnétique stationnaire, quasi-uniforme.

$$\vec{B} \simeq B_0\,\vec{e}_x$$

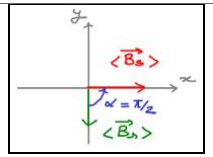
Il est alimenté en courant continu ou constitué d'aimants permanents.

Rotor

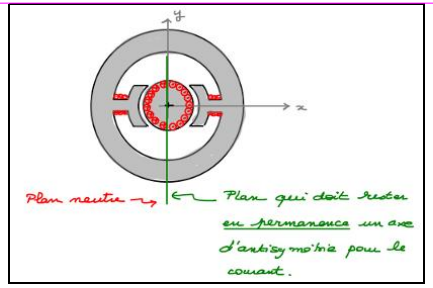
Par analogie avec le moteur synchrone, le couple sera maximal pour un angle droit entre le champ rotorique et le champ statorique.

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Dans le cas du moteur à courant continu, le champ statorique est stationnaire, la direction moyenne du champ rotorique doit donc l'être aussi.

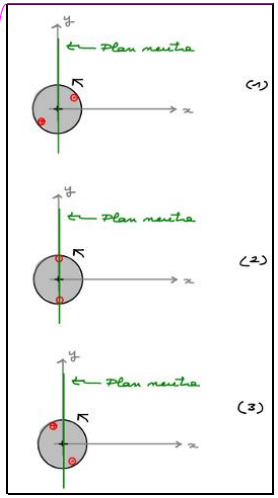


Cela correspond à la configuration suivante, qui doit être conservée au cours de la rotation.



On doit changer le sens du courant dans les spires au passage par le **plan neutre**.

Collecteur



Le collecteur est connecté à l'alimentation par des **balais**.

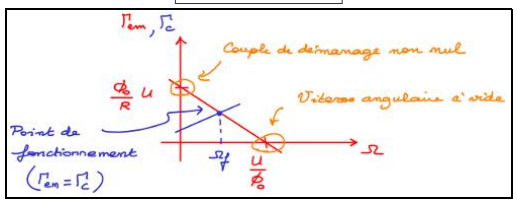
Démarrage du moteur

On suppose le régime stationnaire atteint et une tension d'induit constante.

$$i_r = Cte,\ \Omega = Cte \text{ et } u = Cte = U$$

Couple électromagnétique

$$\Gamma_{em} = \phi_0 i_r = \frac{\phi_0}{R}(U - \phi_0\Omega)$$



Le couple de démarrage est non nul : le moteur peut démarrer seul.

Si $\Omega = 0$ alors $\boxed{\Gamma_{em}(0) = \frac{\phi_0 U}{R}}$

La vitesse angulaire ne diverge pas à vide.

$\Gamma_{em} = \Gamma_c = 0$ soit $\boxed{\Omega_{\lim} = \frac{U}{\phi_0}}$

Diminuer l'alimentation statorique en fonctionnement peut générer une sur-vitesse importante.

$\phi_0 \propto I_s$ donc $\boxed{\text{si } I_s \to 0 \text{ alors } \Omega_{\lim} \to +\infty}$

Courant rotorique

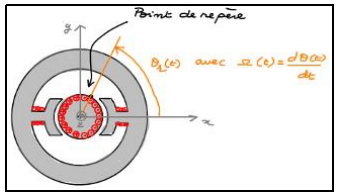
$$\boxed{i_r = \frac{U - \phi_0\Omega}{R}}$$

Équation électrique, aux bornes du rotor

$$\boxed{u = Ri_r + L\frac{\mathrm{d}i_r}{\mathrm{d}t} + \phi_0\Omega}$$

Équation mécanique

$$\boxed{J\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \phi_0 i_r - \Gamma_c}$$



On suppose le régime stationnaire non atteint.

$$i_r = i_r(t) \text{ et } \Omega = \Omega(t)$$

Aspects énergétiques

Couple électromagnétique

Par analogie avec le moteur synchrone

$$\boxed{\Gamma_{em} = \phi_0\, i_r} \text{ avec } \phi_0 \propto I_s$$

Par analogie avec le moteur synchrone, la puissance absorbée par les **f.c.e.m d'induction** est égale à la puissance mécanique fournie.

$$p_{em} = p_m$$

$$\text{Soit : } e' \cdot i_r = \Gamma_{em} \cdot \Omega = \phi_0 i_r \cdot \Omega$$

$$\boxed{e' = \phi_0 \Omega}$$

Lorsqu'une charge (mécanique) est présente, la puissance électrique reçue est dissipée par effet Joule et fournie à la charge mécanique.

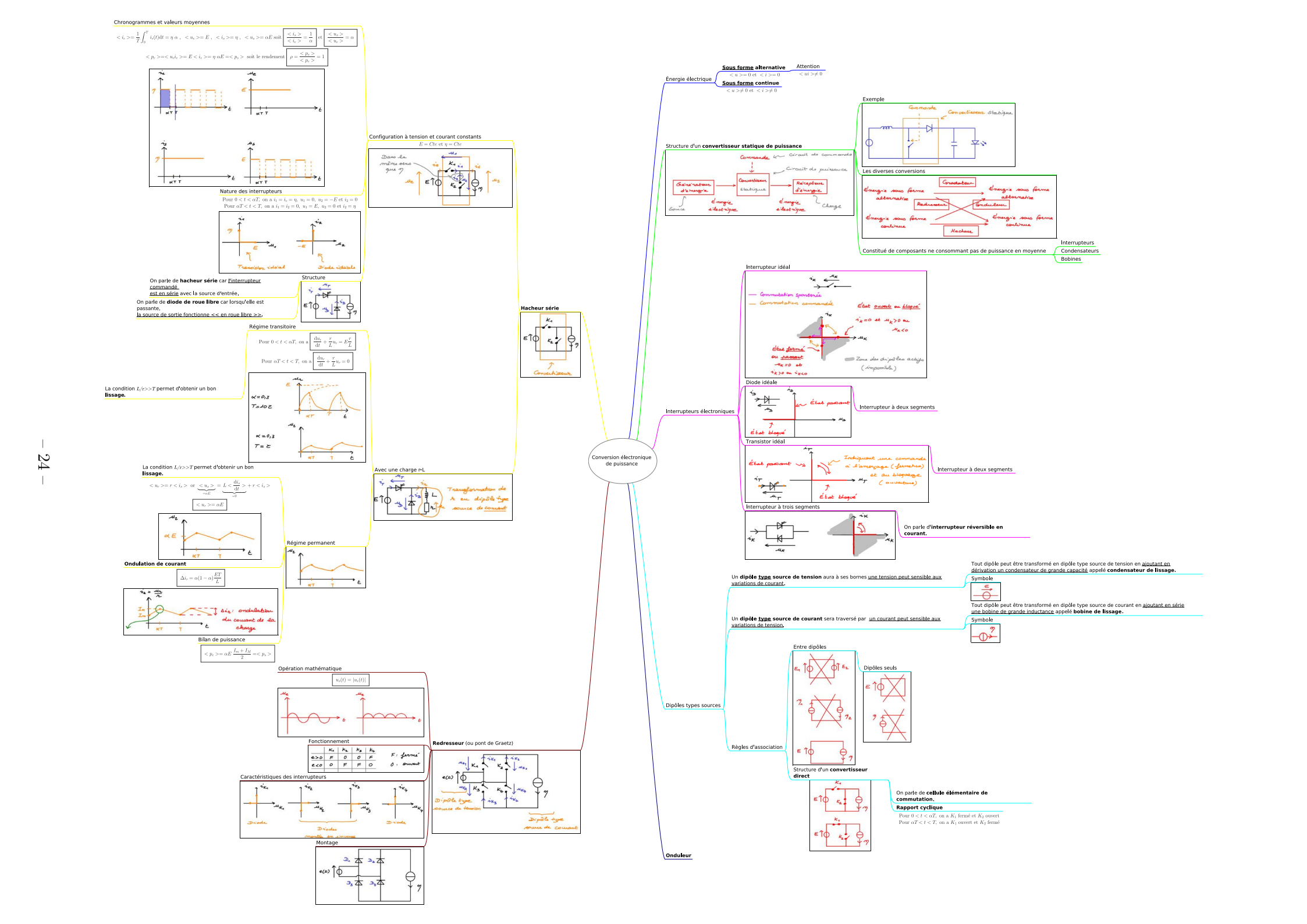
$$J\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \phi_0 i_r - \Gamma_c \to \times\Omega$$

$$U_s = R_s\, I_s \to \times I_s$$

$$u_r = R\, i_r + L\frac{\mathrm{d}i_r}{\mathrm{d}t} + \phi_0\Omega \to \times i_r$$

$$U_s I_s + u_r i_r = R_r i_r^2 + R_s I_s^2 + \Gamma_c \omega$$

$$\boxed{p_e = p_J + p_m}$$


Conversion électronique de puissance
Énergie électrique
Sous forme alternative
Attention
Sous forme continue
Structure d'un convertisseur statique de puissance
Commande
Circuit de commande
Circuit de puissance
Générateur d'énergie
Source
Convertisseur statique
Récepteur d'énergie
Charge
Exemple
Les diverses conversions
Énergie sous forme alternative
Énergie sous forme continue
Gradateur
Redresseur
Ondouleur
Hacheur
Constitué de composants ne consommant pas de puissance en moyenne
Interrupteurs
Condensateurs
Bobines
Interrupteurs électroniques
Interrupteur idéal
Commutation spontanée
Commutation commandée
État ouvert ou bloqué
État fermé ou passant
Zone des dipôles actifs (impossible)
Diode idéale
Interrupteur à deux segments
Transistor idéal
Interrupteur à trois segments
On parle d'interrupteur réversible en courant.
Dipôles types sources
Un dipôle type source de tension aura à ses bornes une tension peut sensible aux variations de courant.
Tout dipôle peut être transformé en dipôle type source de tension en ajoutant en dérivation un condensateur de grande capacité appelé condensateur de lissage.
Symbole
Un dipôle type source de courant sera traversé par un courant peut sensible aux variations de tension.
Tout dipôle peut être transformé en dipôle type source de courant en ajoutant en série une bobine de grande inductance appelé bobine de lissage.
Symbole
Règles d'association
Entre dipôles
Dipôles seuls
Structure d'un convertisseur direct
On parle de cellule élémentaire de commutation.
Rapport cyclique
Pour $0 < t < \alpha T$, on a K_1 fermé et K_2 ouvert
Pour $\alpha T < t < T$, on a K_1 ouvert et K_2 fermé
Onduleur
Hacheur série
Convertisseur
Configuration à tension et courant constants
$E = Cte$ et $\eta = Cte$
Dans la même convention
Structure
On parle de hacheur série car l'interrupteur commandé est en série avec la source d'entrée,
On parle de diode de roue libre car lorsqu'elle est passante, la source de sortie fonctionne << en roue libre >>.
Nature des interrupteurs
Pour $0 < t < \alpha T$, on a $i_1 = i_c = \eta$, $u_1 = 0$, $u_2 = -E$ et $i_2 = 0$
Pour $\alpha T < t < T$, on a $i_1 = i_2 = 0$, $u_1 = E$, $u_2 = 0$ et $i_2 = \eta$
Transistor idéal
Diode idéale
Régime transitoire
Pour $0 < t < \alpha T$, on a $\frac{du_c}{dt} + \frac{r}{L}u_c = E\frac{r}{L}$
Pour $\alpha T < t < T$, on a $\frac{du_c}{dt} + \frac{r}{L}u_c = 0$
$\alpha = 0,3$
$T = 2\tau$
La condition $L/r >> T$ permet d'obtenir un bon lissage.
Régime permanent
Avec une charge r-L
Transformation de R en dipôle type source de courant
La condition $L/r >> T$ permet d'obtenir un bon lissage.
$< u_c >= r < i_s >$ or $\underbrace{< u_c >}_{=\alpha E} = L \underbrace{< \frac{di_c}{dt} >}_{=0} + r < i_s >$
$< u_c >= \alpha E$
Ondulation de courant
$\Delta i_c = \alpha(1-\alpha)\frac{ET}{L}$
Δi_c : ondulation du courant de la charge
Bilan de puissance
$< p_c >= \alpha E \frac{I_m + I_M}{2} = < p_s >$
Opération mathématique
$u_s(t) = |u_c(t)|$
Fonctionnement
Redresseur (ou pont de Graetz)
Dipôle type source de tension
Dipôle type source de courant
Caractéristiques des interrupteurs
Diode
D'abord monté en cathode
D'abord monté en anode
Montage

Équation de d'Alembert

Onde progressive

Une **onde progressive** est le phénomène de propagation d'une perturbation dans l'espace.



Il y a propagation d'énergie, mais pas de matière.

Onde transversale : onde dont la perturbation est orthogonale à la direction de propagation.



Onde longitudinale : onde dont la perturbation est colinéaire à la direction de propagation.



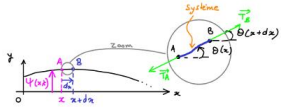
Équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\,\Delta\psi$$

Équation de propagation des ondes dans une corde

Application du PFD

$$\mathrm{d}m \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -T_A\cos\theta(x) \\ -T_A\sin\theta(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_B\cos\theta(x+\mathrm{d}x) \\ T_B\sin\theta(x+\mathrm{d}x) \end{vmatrix}$$



Projection selon Ox

À l'ordre 1 : $\cos\theta \simeq 1$ soit $\boxed{T_A \simeq T_B \simeq T}$

Tension de la corde T

Projection selon Oy

À l'ordre 1 : $\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \frac{\partial\psi}{\partial x}$ et $\mathrm{d}m = \mu\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}\psi^2} \simeq \mu\mathrm{d}x$

Masse linéique μ

$$\mu\mathrm{d}x\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = T\,\frac{\partial\psi}{\partial x}(x+\mathrm{d}x) - T\,\frac{\partial\psi}{\partial x}(x) = T\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

Équation de d'Alembert

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}}$$

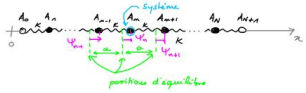
Célérité

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

Équation de propagation des ondes dans une tige

Application du PFD

$$-K\,(\psi_n - \psi_{n-1}) + K\,(\psi_{n+1} - \psi_n) = m\,\ddot{\psi}_n$$



Approximation des milieux continus

$$\psi_n \leftrightarrow \psi(x,t)$$
$$a \leftrightarrow \mathrm{d}x$$

FTY

$$\psi_{n+1} - \psi_n \leftrightarrow \psi(x+\mathrm{d}x) - \psi(x) \simeq \mathrm{d}x\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}x^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$
$$\psi_{n-1} - \psi_n \leftrightarrow \psi(x-\mathrm{d}x) - \psi(x) \simeq -\mathrm{d}x\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}x^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

Pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Équation de d'Alembert

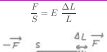
$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}}$$

Célérité

$$\boxed{v = \omega_0\,a}$$

Module d'Young E

$$\frac{F}{S} = E\,\frac{\Delta L}{L}$$



Lien avec le module d'Young

$$E = \frac{K}{a} \text{ soit } \boxed{v = \sqrt{\frac{E}{\mu}}}$$

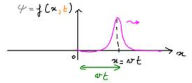
Solutions

Solution en **onde progressive**

$$\boxed{\psi = f(x-vt) + g(x+vt)}$$

Onde se propageant vers les x croissants

$f(x-vt)$



Onde se propageant vers les x décroissants

$g(x+vt)$

Onde progressive **harmonique** se propageant vers les x croissants

$$\boxed{\psi = A\cos(\omega t - kx + \varphi)}$$

Pulsation

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$

Nombre d'onde

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma}$$

Représentation complexe

$$\boxed{\underline{\psi} = A\,e^{i(\omega t - kx + \varphi)} = \underline{A}\,e^{i(\omega t - kx)}}$$

Vitesse de phase

$\phi = \omega t - kx + \varphi$ ne varie pas si $\mathrm{d}\phi = \omega\mathrm{d}t - k\mathrm{d}x = 0$ soit $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k} = v_\phi$

$$\boxed{v_\phi = \frac{\omega}{k}}$$

Relation de dispersion

$\psi = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$ sera solution de $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ si $k^2\psi = \frac{1}{v^2}\omega^2$

$$\boxed{k = \frac{\omega}{v}}$$

Solution en **onde stationnaire**

$$\boxed{\psi = F(x)\cdot G(t)}$$

Forme de la solution dans un milieu régi par l'équation de d'Alembert

$\psi = F(x)\cdot G(x)$ sera solution de $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ si :

$$\boxed{\psi = A\cos(kx+\varphi_x)\cdot\cos(\omega t+\varphi_t)}$$

Exemples

Corde de Guitare

Conditions aux limites

$\psi(0,t) = 0$ et $\psi(L,t) = 0$

Solution en onde stationnaire

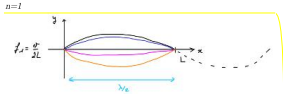
$$\psi(x,t) = -A\,\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(n\frac{v}{L}t + \varphi_n\right)$$

On obtient un ensemble discret de solutions appelées **modes propres** de vibration.

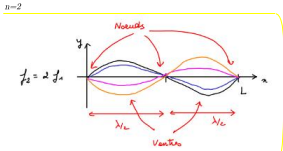
Le mouvement général peut s'écrire comme une superposition de ces modes propres.

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x,t)$$

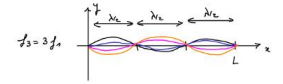
$n=1$



$n=2$

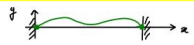


$n=3$



Caractéristiques de ces modes propres

$$\boxed{f_n = n\frac{v}{2L}} \text{ et alors } \boxed{L = n\frac{\lambda}{2}}$$



Corde de Melde

Conditions aux limites

$\psi(0,t) = a\cos(\omega t)$ et $\psi(L,t) = 0$

Solution en onde stationnaire

$$\psi(x,t) = -\frac{a}{\sin(kL)}\sin(k(x-L))\cos(\omega t)$$

Phénomène de résonance

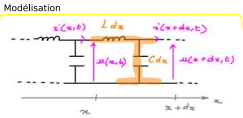
$A \to +\infty$ si $\sin(kL) \to 0$

$$\boxed{f_n \to n\frac{v}{2L}} \text{ et alors } \boxed{L \to n\frac{\lambda}{2}}$$



Câble coaxial

Modélisation



Inductance linéique L

Capacité linéique C

Équations électriques

LDM : $u(x+\mathrm{d}x,t) = u(x,t) - L\mathrm{d}x\frac{\partial i}{\partial t}$

LDN : $i(x+\mathrm{d}x,t) = i(x,t) - C\mathrm{d}x\frac{\partial u}{\partial t}$

Célérité

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{1}{LC}}} \simeq 1{,}8\times10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Découplage

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}}$$

À l'ordre 1

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -L\frac{\partial i}{\partial t}} \to \frac{\partial}{\partial x} \text{ ou } \frac{\partial}{\partial t} \qquad \boxed{\frac{\partial i}{\partial x} = -C\frac{\partial u}{\partial t}} \to \frac{\partial}{\partial t} \text{ ou } \frac{\partial}{\partial x}$$

Relation de dispersion

$\underline{u} = \underline{U}_0\,e^{i(\omega t - kx)}$ est solution de $\frac{\partial^2\underline{u}}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2\underline{u}}{\partial x^2}$ si :

$$\boxed{k = \frac{\omega}{v}}$$

Impédance caractéristique

$\underline{u} = \underline{U}_0\,e^{i(\omega t - kx)}$ est lié à $\underline{i} = \underline{I}_0\,e^{i(\omega t - kx)}$ par $\frac{\partial\underline{u}}{\partial x} = -L\frac{\partial\underline{i}}{\partial t}$ soit $-jk\underline{u} = -jL\omega\underline{i}$

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{L\omega}{k} = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_c} \simeq 50\ \Omega$$

Forme des ondes

$$\underline{u} = \underline{U}_0\,e^{i(\omega t - kx)} + \underline{U}'_0\,e^{i(\omega t + kx)}$$
$$\underline{i} = \underline{I}_0\,e^{i(\omega t - kx)} + \underline{I}'_0\,e^{i(\omega t + kx)}$$

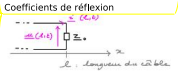
Conditions aux limites

$\underline{u}(\ell,t) = \underline{Z}_0\,\underline{i}(\ell,t)$

Coefficients de réflexion en amplitude

$$\underline{r}_c = \frac{\underline{i}_r(\ell,t)}{\underline{i}_i(\ell,t)} = \frac{Z_c - \underline{Z}_0}{Z_c + \underline{Z}_0}$$
$$\underline{r}_v = \frac{\underline{u}_r(\ell,t)}{\underline{u}_i(\ell,t)} = -\underline{r}_c$$

Coefficients de réflexion



L'onde incidente est entièrement réfléchie si :

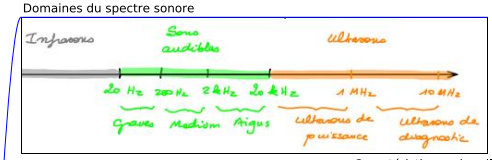
$\underline{Z}_0 = 0$ (court-circuit) ou si $\underline{Z}_0 \to \infty$ (circuit ouvert) car alors $\boxed{\underline{r}_c = -\underline{r}_v = 1}$

L'onde incidente est entièrement absorbée si :

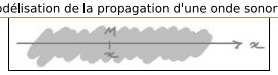
$\underline{Z}_0 = Z_c$ (adaptation d'impédance) car alors $\boxed{\underline{r}_c = -\underline{r}_v = 0}$

Ondes sonores dans les fluides

Domaines du spectre sonore



Modélisation de la propagation d'une onde sonore



Caractéristiques du milieu fluide

$\mu(x,t)$: masse volumique
$p(x,t)$: pression locale
$\vec{v}(x,t)$: vitesse locale (eulérienne)

Approximation acoustique : le fluide est faiblement perturbé au passage de l'onde.

$$\begin{aligned}\mu(x,t) &\simeq \mu_0 + \mu_1(x,t)\\ p(x,t) &\simeq p_0 + p_1(x,t)\\ \vec{v}(x,t) &\simeq \vec{0} + \vec{v}_1(x,t)\end{aligned}$$

avec $\mu_1(x,t)$, $p_1(x,t)$, $\vec{v}_1(x,t)$ et leurs dérivées des infiniments petits d'ordre 1

L'approximation acoustique permet d'aboutir à des équations linéaires, elle est largement vérifiée pour des sons usuels.

Le passage de l'onde sera considéré comme une transformation **isentropique.**

Adiabatique : la longueur d'onde est très supérieure à la distance caractéristique de diffusion thermique.

$$\lambda >> \sqrt{DT} \text{ soit } f << \frac{v^2}{D} \sim 10^{10} \text{ Hz}$$

Réversible : changer t en $-t$ ne modifie pas les équations obenues dans le cadre de ce modèle.

Équation de d'Alembert pour la **surpression acoustique**

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$$

Coefficient de compressibilité isentropique

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\Big)_S$$

Célérité

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}$$

Célérité dans différents milieux

Gaz parfait en évolution isentropique

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \sim 340 \text{ m.s}^{-1}$$

Liquide

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}} \sim 1500 \text{ m.s}^{-1}$$

Solide

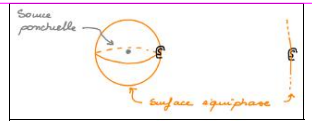
$\chi_S = \frac{1}{E}$ soit $v = \sqrt{\frac{E}{\mu_0}} \sim 5000 \text{ m.s}^{-1}$

Surface d'onde : surface sur laquelle la surpression est la même à t fixé.

Modèle de **l'onde propressive plane (OPP)**

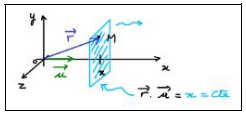
Onde plane : onde pour laquelle les surfaces d'onde sont des plans.

Loi de la source, une onde pourra souvent être considérée localement comme plane.



Structure d'une OPP

$$p_1 = f(\vec{r}\cdot\vec{u} - vt)$$



Vecteur position du point M d'observation $\vec{r}$

Vecteur unitaire caractérisant la propagation $\vec{u}$

La surpression acoustique est constante si $\vec{r}\cdot\vec{u} = x = Cte$ (ce qui désigne un plan)

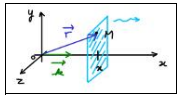
Onde progressive plane harmonique (OPPH)

$$p_1 = A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)$$

$$p_1 = A\,e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)} = \underline{A}\,e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

Vecteur position du point M d'observation $\vec{r}$

Vecteur d'onde $\vec{k} = k\,\vec{u}$



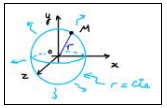
Vecteur unitaire caractérisant la propagation $\vec{u}$

Modèle de **l'onde propressive sphérique (OPS)**

Onde sphérique : onde pour laquelle les surfaces d'onde sont des sphères.

Structure d'une OPP

$$p_1 = \frac{1}{r} f(r \pm vt)$$



Position du point M d'observation r

La surpression acoustique est constante si $r = Cte$ (ce qui désigne une sphère)

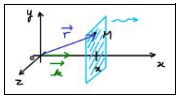
Onde progressive sphérique harmonique (OPSH)

$$p_1 = \frac{A}{r}\cos(\omega t \pm kr + \varphi)$$

$$p_1 = \frac{\underline{A}}{r}\,e^{j(\omega t \pm kr)}$$

Vecteur position du point M d'observation $\vec{r}$

Vecteur d'onde $\vec{k} = k\,\vec{u}$



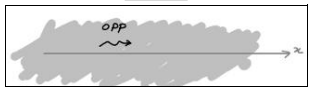
Vecteur unitaire caractérisant la propagation $\vec{u}$

Impédance acoustique

$$Z_a = \frac{p_1}{v_1}$$

OPP se dirigeant vers les x croissants

$$Z_a = \mu_0 v$$



OPP se dirigeant vers les x décroissants

$$Z_a = -\mu_0 v$$

Dans une conduite

$$Z_a = \frac{p_1}{\phi_{v1}} = \frac{p_1}{\iint_S \vec{v}_1 \cdot d\vec{S}}$$

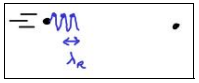
Effet Doppler-Fizeau

Source s'approchant d'un récepteur

$\lambda_R = \lambda_S - v_S T_S$ soit $\frac{v}{f_R} = \frac{v}{f_S} - \frac{v_S}{f_S}$

$$f_R = \frac{1}{1 - v_S/v} f_S$$

La fréquence perçue est plus élevée.



Source s'éloignant d'un récepteur

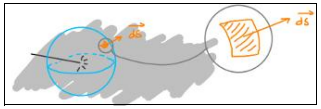
$$f_R = \frac{1}{1 + v_S/v} f_S$$

La fréquence perçue est plus faible.

Aspects énergétiques

Vecteur **densité de courant énergétique**

$$\vec{\Pi}_a = p_1\,\vec{v}_1$$



Force de pression élémentaire

$$d\vec{F}_p = p_1\,d\vec{S}$$

Puissance élémentaire associée

$$dP_a = d\vec{F}_p \cdot \vec{v}_1 = \vec{\Pi}_a \cdot d\vec{S}$$

Puissance acoustique rayonnée à travers une surface

$$P_a = \iint_S \vec{\Pi}_a \cdot d\vec{S}$$

Densité volumique d'énergie acoustique

$$w_a = w_c + w_p = \frac{1}{2}\mu_0 v_1^2 + \frac{1}{2}\chi_S p_1^2$$

Équation locale de conservation de l'énergie acoustique

$$\frac{\partial w_a}{\partial t} + \text{div}\vec{\Pi}_a = 0$$

Pour une OPPH

$$I = \frac{P_{1,\max}^2}{2\mu_0 v}$$

Intensité acoustique

$$I = <||\vec{\Pi}_a||> = <|p_1 v_1|>$$

Niveau sonore

$$I_{dB} = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \text{ avec } I_0 = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$$

Ondes électromagnétiques dans le vide

Modélisation de la propagation d'une OEM

On considère un milieu assimilable au vide sans charges ni courants

$\vec{j} = \vec{0}$ (pas de courants)

$\rho = 0$ (pas de charges)

$\mu \simeq \mu_0$ et $\epsilon \simeq \epsilon_0$ (milieu assimilé au vide)

Équations de Maxwell

$$\text{M.T} : \operatorname{div}\vec{B} = 0$$
$$\text{M.F} : \overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\text{M.G} : \operatorname{div}\vec{E} = 0$$
$$\text{M.A} : \overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Équation de propagation

Champ électrique

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$$

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \text{ avec } v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

Champ magnétique

$$\Delta\vec{B} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Ce sont des équations de d'Alembert.

C'est la célérité de la lumière

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 3\times10^8 \text{ m.s}^{-1} = c$$

Solution en **OPPH**

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_{0x}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_x) \\ E_{0y}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_y) \\ E_{0z}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_z) \end{vmatrix}$$

Notation complexe

$$\underline{\vec{E}} = \begin{vmatrix} E_{0x}\, e^{j\varphi_x} \\ E_{0y}\, e^{j\varphi_y}\cdot e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} = \underline{\vec{E}_0}\, e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \\ E_{0z}\, e^{j\varphi_z} \end{vmatrix}$$

Mêmes notations pour le champ magnétique

Notation complexe des opérateurs

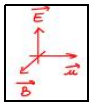
$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \to -j\vec{k}\wedge$$
$$\operatorname{div} \to -j\vec{k}\cdot$$
$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} \to -j\vec{k}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} \to j\omega$$

Notation complexe des équations de Maxwell

$$\text{M.T} : \vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0$$
$$\text{M.F} : \vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = \omega\underline{\vec{B}}$$
$$\text{M.G} : \vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0$$
$$\text{M.A} : \vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = -\frac{\omega}{c^2}\underline{\vec{E}}$$

Relation de transversalité

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}$$

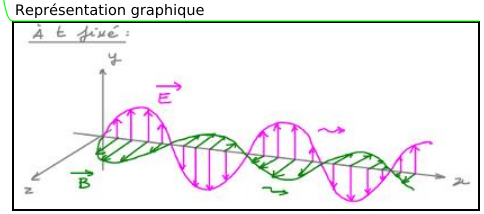


Rapport E/B

$$\frac{||\vec{E}||}{||\vec{B}||} = c$$

Généralisation aux **OPP**

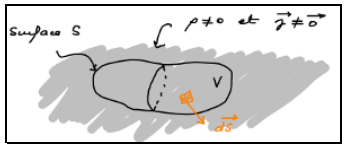
Représentation graphique



Aspects énergétiques

Équation locale de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\Pi} = -p_V$$



Puissance rayonnée à travers une surface

$$p_{ray} = \iint_S \vec{\Pi}\cdot\vec{dS}$$

Vecteur de Poynting ou vecteur densité de courant énergétique

$$\vec{\Pi} = \vec{E}\wedge\frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

Équation de Poynting

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \operatorname{div}\left(\vec{E}\wedge\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) = -\vec{j}\cdot\vec{E}$$

Densité volumique d'énergie électromagnétique

$$w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Puissance volumique cédée aux charges du milieu

$$p_V = \vec{j}\cdot\vec{E}$$

Pour une OPP, le vecteur de Poynting défini le sens de propagation de l'énergie.

$$\vec{\Pi} = \epsilon_0\, c\, E^2\, \vec{u}$$

Intensité

$$I = <||\vec{\Pi}||>$$

Flux de photons traversant une surface

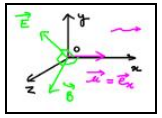
$$\frac{\delta N}{dt} = \frac{p_{ray}}{hf}$$

Polarisation d'une OPPH

Polarisation : direction du champ électrique

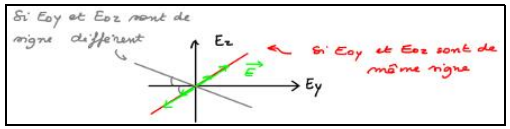
Polarisation **rectiligne**

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} 0 \\ E_{0y}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_y) \\ E_{0z}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_y) \end{vmatrix}$$



On a alors

$$E_y = \frac{E_{0y}}{E_{0z}}E_z = Cte\cdot E_z$$



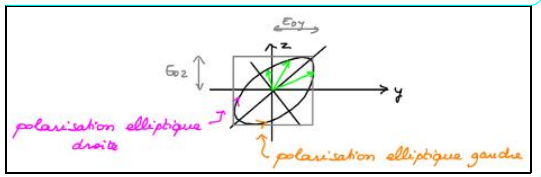
Écriture simplifiée

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}\, e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

Écriture simplifiée

$$\vec{E} = \vec{E}_0\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)$$

Polarisation **elliptique**



Polarisation **circulaire**

Phénomènes de propagation linéaires Absorption et dispersion

Ondes électromagnétiques planes dans les milieux conducteurs

ARQS magnétique

$\vec{j}_D << \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}$ soit $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} \simeq \mu_0 \vec{j}_C}$

Électroneutralité locale

$\rho \simeq 0$ soit $\boxed{\text{div}\vec{E} \simeq 0}$

Loi d'Ohm locale

$\boxed{\vec{j}_C \simeq \gamma_0 \vec{E}}$

Équation de propagation

C'est une équation de diffusion.

$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$ soit $\boxed{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \gamma_0}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}}$

Résolution

Une onde de forme $\underline{\vec{E}} = \underline{E_0}(x)\, e^{j(\omega t)}\, \vec{e}_y$ est solution de l'équation de propagation si :

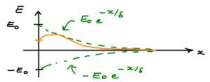
$\boxed{\frac{\partial^2 \underline{E_0}}{\partial x^2} - \frac{1}{\ell^2}\underline{E_0} = 0}$ avec $\frac{1}{\ell^2} = j\,\mu_0\gamma_0\omega$

Structure de l'onde dans le conducteur

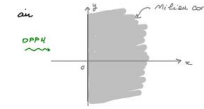
$\underline{E_0} = E_0\, e^{-(1+j)x/\delta)}$ soit $\boxed{\vec{E} = E_0\, e^{-x/\delta}\cos(\omega t - x/\delta)\,\vec{e}_y}$

Épaisseur de peau

$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}}$



Un conducteur s'oppose à la pénétration du champ électromagnétique, L'épaisseur de peau caractérise la profondeur de pénétration du champ dans le conducteur.



Conducteur parfait

Épaisseur de peau

$\boxed{\delta \to 0}$

Champs

$p_V = \vec{j}\cdot\vec{E} \simeq \gamma_0 E^2$ doit rester fini soit $\boxed{\vec{E} \to \vec{0}}$

$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit $\boxed{\vec{B} \to \vec{C}te = \vec{0}}$

$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ soit $\boxed{\rho \to 0}$

$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} \simeq \mu_0 \vec{j}_C$ soit $\boxed{\vec{j}_C \to \vec{0}}$

$\boxed{\gamma_0 \to \infty}$

Plasma

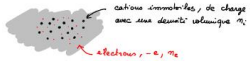
Milieu dilué, pas d'interaction entre constituants

Constitué de cations immobiles

$n_{\text{cation}} >> n_e$

Milieu neutre

Modèle simplifié d'un plasma



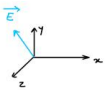
Conductivité électrique

Propogation d'une OPPH transverse

$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}\, e^{j(\omega t - \underline{k}z)}$

Neutralité locale

$\text{div}\vec{E} = 0$ soit $\boxed{\rho = 0}$



PFD sur un électron

En régime variable

$\vec{v} \leftrightarrow \underline{\vec{v}}$ soit $jm\omega\,\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}}$

$\boxed{\underline{\vec{v}} = \frac{-e}{jm\omega}\underline{\vec{E}}}$

Bilan des forces s'appliquant sur un électron

$\vec{P}$ négligeable

$\vec{F}_L = -e(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}) \simeq -e\vec{E}$

car $||\vec{v}\wedge\vec{B}|| \sim \frac{vE}{c} << E$ (électrons non relativistes)

$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}}$

Conductivité électrique

Densité volumique d'électrons n_e

Le courant de conduction et le champ électrique sont en quadrature de phase.

$\frac{1}{j} = -j = e^{-j\pi/2}$

$\vec{j}_C = -n_e e\,\vec{v}$ soit $\vec{j}_C = \frac{n_e e^2}{jm\omega}\vec{E}$

$\boxed{\gamma = -j\frac{n_e e^2}{m\omega}}$

Puissance moyenne nulle cédée au plasma

$< p_V >=< \vec{j}_C\cdot\vec{E} >= \frac{1}{2}\mathcal{R}e(\underline{\vec{j}_C}\cdot\underline{\vec{E}}^*) >= \frac{1}{2}\mathcal{R}e(\underline{\gamma})||\underline{\vec{E}}||^2 = 0$

Relation de dispersion

Équations de Maxwell en notation complexe

$\text{M.F} : \; -j\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{E}} = -j\omega\underline{\vec{B}}$

$\text{M.A} : \; -j\underline{\vec{k}}\wedge\underline{\vec{B}} = \mu_0\underline{\vec{j}_C} + j\omega\mu_0\epsilon_0\underline{\vec{E}}$

$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0\frac{n_e e^2}{m}}$

Relation de dispersion

$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$ avec $\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m\epsilon_0}}}$

Vitesse de phase et de groupe

$v_\phi = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$

$v_g = \frac{d\omega}{dk'} = \frac{c^2}{v_\phi}$

Pas d'absortion si

$\omega > \omega_p$ soit $\underline{k}$ réel soit $\boxed{k' = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}}$ et $\boxed{k'' = 0}$

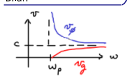
$\boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}\, e^{j(\omega t - k'x)}}$

Onde evanescente si

$\omega < \omega_p$ soit $\underline{k}$ imaginaire pur soit $\boxed{k'' = \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}}$ et $\boxed{k' = 0}$

$\boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}\, e^{-k''x}\, e^{j\omega t}}$

Bilan

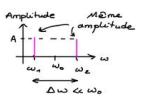


Paquet d'onde

Exemple d'un paquet de deux ondes de pulsations voisines

$\psi = A\cos(\omega_1 t - k'_1 x) + A\cos(\omega_2 t - k'_2 x)$

avec $\omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$ et $\omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$



FTY

$k'_1(\omega) = k'(\omega_1 - \Delta\omega/2) \simeq k'(\omega_0) - \frac{\Delta\omega}{2}\frac{dk'}{d\omega}(\omega_0)$

$k'_2(\omega) = k'(\omega_1 + \Delta\omega/2) \simeq k'(\omega_0) + \frac{\Delta\omega}{2}\frac{dk'}{d\omega}(\omega_0)$

Forme du paquet d'onde

$\psi = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\left(t - \frac{x}{\Delta\omega/\Delta k}\right)\right)\cos\left(\omega_0\left(t - \frac{x}{\omega_0/k'(\omega_0)}\right)\right)$

avec $\frac{\Delta\omega}{\Delta k} \simeq \frac{d\omega}{dk'}(\omega_0) = v_g$ la vitesse de groupe

et $\frac{\omega_0}{k'(\omega_0)} = v_\phi$ la vitesse de phase



La durée séparant deux minimas d'amplitude de l'enveloppe donne :

$\Delta t = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ soit $\boxed{\Delta f\cdot\Delta t = 1}$

Vitesse de groupe

Dans un milieu non dispersif (régi par une équation de d'Alembert)

$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk}}$ or (relation de dispersion) $k = \frac{\omega}{v}$ soit $\boxed{v_g = v}$

Dans un **milieu dispersif**

$\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk'}}$

On a donc

$\boxed{v_g \neq v}$

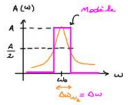
La vitesse de groupe s'apparente à la vitesse de propagation de l'enveloppe d'un paquet d'onde,

Dans un milieu dispersif chaque composante se déplace à une vitesse différente : un paquet d'onde se déforme.

Modèle du paquet d'onde

$\underline{\psi} = \int_0^\infty \underline{A}(\omega)\, e^{j(\omega t - k'x)}\text{d}\omega$

Distribution lorentzienne



Expression du paquet d'onde

$\psi = A\,\Delta\omega\,\text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2}(t - x/v_g)\right)\cos(\omega_0 t - k'(\omega_0)x)$



La durée séparant deux minimas d'amplitude de l'enveloppe donne :

$\frac{\Delta\omega}{2}\cdot\Delta t = \pi$ soit $\boxed{\Delta f_{1/2}\cdot\Delta t = 1}$

Relation de dispersion : relation entre le nombre d'onde et la pulsation

Une OPPH de forme $\underline{\theta} = \underline{A}\, e^{j(\omega t - kx)}$ est solution de l'équation de propagation si :

$\boxed{\underline{k}(\omega) = k'(\omega) - j\,k''(\omega)}$

Forme d'une solution en OPPH dans un milieu dispersif

$\boxed{\underline{\psi} = \underline{A}\, e^{j(\omega t - \underline{k}x)} = \underline{A}\, e^{-k''x} e^{j(\omega t - k'x)}}$

Vitesse de phase

Dans un milieu non dispersif (régi par une équation de d'Alembert)

$\boxed{v_\phi = \frac{\omega}{k}}$ or (relation de dispersion) $k = \frac{\omega}{v}$ soit $\boxed{v_\phi = v}$

Dans un **milieu dispersif**

$\boxed{v_\phi = \frac{\omega}{k'(\omega)}}$

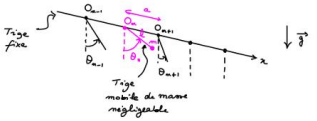
Un milieu dispersif est un milieu dans lequel la vistesse de phase dépend de la pulsation.

$\boxed{v_\phi(\omega)}$

Une OPPH, d'une seule fréquence, est un modèle éloigné de la réalité. Une onde émise par une source est toujours émise pendant une durée finie, on peut alors montrer que son spectre est continu et s'étale autour d'une fréquence centrale, On la modélise par un << paquet d'onde >>.

Un **paquet d'onde** est une onde plane résultatnt de la superposition d'OPPH dont la fréquence varie continûment autour d'une fréquence centrale,

Exemple de milieu << dispersif >> : la chaîne infinie d'oscillateurs couplés



TMC

$\ddot{\theta}_n + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta}_n + \frac{g}{\ell}\sin\theta_n + \frac{C}{m\ell^2}(2\theta_n - \theta_{n-1} - \theta_{n+1}) = 0$

Approximations des petits angles et des milieux continus

$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{g}{\ell}\theta - \frac{Ca^2}{m\ell^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = 0$

L'équation de propagation n'est pas une équation de d'Alembert.

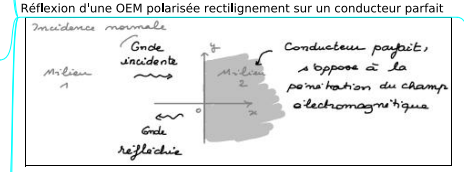
Relation de dispersion

Une OPPH de forme $\underline{\theta} = \underline{A}\, e^{j(\omega t - kx)}$ est solution si :

$\boxed{k^2 = \frac{m\ell^2}{Ca^2}\left(\omega^2 - \frac{g}{\ell} - j\frac{\omega\alpha}{m}\right) = \underline{k}}$

Interfaces entre deux milieux

Réflexion d'une OEM polarisée rectilignement sur un conducteur parfait



Onde réfléchie

OPPH incidente polarisée rectilignement

$$\vec{E}_i = E_{0i}\cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_y$$

Champ magnétique correpondant

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} \text{ soit } \boxed{\vec{B}_i = \frac{E_{0i}}{v}\cos(\omega t - kx)\,\vec{e}_z}$$

Utilisation des relations de passage

$$\underbrace{\vec{E}_{N2}}_{=\vec{0}} - \underbrace{\vec{E}_{N1}}_{=\vec{0}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\vec{n}_{1\to 2} \Rightarrow \boxed{\sigma = 0}$$

$$\vec{E}_{T2} - \vec{E}_{T1} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_i(0,t) + \vec{E}_r(0,t) = \vec{0}}$$

Onde réfléchie

$$\vec{E}_r = -E_{0i}\cos(\omega t + kx)\,\vec{e}_y$$

Champ magnétique correpondant

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} \text{ soit } \boxed{\vec{B}_i = \frac{E_{0i}}{v}\cos(\omega t + kx)\,\vec{e}_z}$$

Onde résultante

C'est une **onde stationnaire.**

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_i + \vec{E}_r \text{ soit } \boxed{\vec{E}_{total} = 2E_{0i}\sin(\omega t)\sin(kx)\,\vec{e}_y}$$

Champ magnétique correpondant

$$\vec{B}_{total} = \vec{B}_i + \vec{B}_r \text{ soit } \boxed{\vec{B}_{total} = \frac{2E_{0i}}{v}\cos(\omega t)\cos(kx)\,\vec{e}_z}$$

Champs magnétique et électrique sont en quadrature temporelle et spatiale.

Il n'y a pas propagation d'énergie.

$$\boxed{<\vec{\Pi}>=\vec{0}}$$

Courant et charge surfaciques

Utilisation des relations de passage

$$\underbrace{\vec{E}_{N2}}_{=\vec{0}} - \underbrace{\vec{E}_{N1}}_{=\vec{0}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\vec{n}_{1\to 2} \Rightarrow \boxed{\sigma = 0}$$

$$\underbrace{\vec{B}_{T2}}_{=\vec{0}} - \underbrace{\vec{B}_{T1}}_{=\vec{B}_{total}} = \mu_0\vec{j}_S\wedge\vec{n}_{1\to 2} \Rightarrow \boxed{\vec{j}_S = \frac{2E_{0i}}{\mu_0 v}\cos(\omega t)\,\vec{e}_y}$$

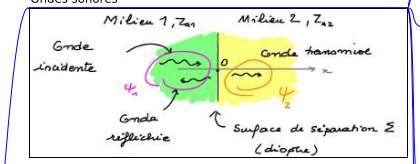
Coefficients de réflexion en puissance

$$\boxed{R = \frac{I_r(0,t)}{I_i(0,t))}}$$

Or $I =< ||\vec{\Pi}|| >=< ||\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}|| >$

$$\boxed{R = 1}$$

Ondes sonores



Détermination des coefficients en surpression

$$A_1\,e^{j(\omega t - k_1\times 0)} + B_1\,e^{j(\omega t + k_1\times 0)} = A_2\,e^{j(\omega t - k_2\times 0)} \to /A_1$$

$$\frac{A_1}{Z_{a1}}\,e^{j(\omega t - k_1\times 0)} + \frac{B_1}{-Z_{a1}}\,e^{j(\omega t + k_1\times 0)} = \frac{A_2}{Z_{a2}}\,e^{j(\omega t - k_2\times 0)} \to /A_1$$

Équations

$$1 + r_p = t_p$$

$$1 - r_p = \frac{Z_{a1}}{Z_{a2}}t_p$$

Coefficients en surpression

$$\boxed{r_p = \frac{Z_{a2} - Z_{a1}}{Z_{a2} + Z_{a1}}}$$

$$\boxed{t_p = \frac{2Z_{a2}}{Z_{a2} + Z_{a1}}}$$

Coefficients en vitesse

$$\boxed{r_v = -\frac{Z_{a2} - Z_{a1}}{Z_{a2} + Z_{a1}} = -r_p}$$

$$\boxed{t_v = \frac{2Z_{a1}}{Z_{a2} + Z_{a1}} = \frac{Z_{a1}}{Z_{a2}}t_p}$$

Coefficients de réflexion et de transmission en surpression et vitesse

$$\boxed{r_p = \frac{p_{1,r}(0,t)}{p_{1,i}(0,t))}} \text{ et } \boxed{t_p = \frac{p_{1,t}(0,t)}{p_{1,i}(0,t))}}$$

$$\boxed{r_v = \frac{v_{1,r}(0,t)}{v_{1,i}(0,t))}} \text{ et } \boxed{t_v = \frac{v_{1,t}(0,t)}{v_{1,i}(0,t))}}$$

Conditions aux limites : surpression et vitesse sont identiques de par et d'autre de l'interface

$$p_{1,1}(0,t) = p_{1,2}(0,t)$$

$$v_{1,1}(0,t) = v_{1,2}(0,t)$$

Coefficients de réflexion et de transmission en puissance

$$\boxed{R = \frac{I_r(0,t)}{I_i(0,t))}} \text{ et } \boxed{T = \frac{I_t(0,t)}{I_i(0,t))}}$$

Détermination des coefficients en puissance

$$I =< ||\vec{\Pi}_a|| >=< |p_1 v_1| >=< \frac{p_1^2}{Z_a} >$$

Coefficients en puissance

$$\boxed{R = r_p^2 = r_v^2}$$

$$\boxed{T = \frac{Z_{a1}}{Z_{a2}}t_p^2 = \frac{Z_{a2}}{Z_{a1}}t_v^2}$$

Conservation de l'énergie à l'interface

$$\boxed{R + T = 1}$$

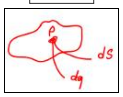
Adaptation d'impédance

$R = 0$ et $T = 1$ pour $\boxed{Z_{a2} = Z_{a1}}$

Relations de passage des OEM

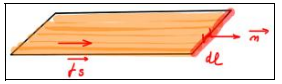
Densité surfacique de charge

$$\boxed{dq = \sigma dS}$$



Vecteur densité de courant surfacique

$$\boxed{I = \int_\ell \vec{j}_S\cdot\vec{n}d\ell}$$



Dans des modélisations surfaciques, les équations de Maxwell ne peuvent être valables. On leur substitue des équations de continuité ou **relations de passage.**

À la traversée d'une surface localement chargée

$$\vec{E}_{N2} - \vec{E}_{N1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\vec{n}_{1\to 2} \text{ remplace l'éq. de M. G}$$

$$\vec{E}_{T2} - \vec{E}_{T1} = \vec{0} \text{ remplace l'éq. de M. F}$$

À la traversée d'une nappe de courant

$$\vec{B}_{N2} - \vec{B}_{N1} = \vec{0} \text{ remplace l'éq. de M. T}$$

$$\vec{B}_{T2} - \vec{B}_{T1} = \mu_0\vec{j}_S\wedge\vec{n}_{1\to 2} \text{ remplace l'éq. de M. A}$$

Application du premier principe à la transformation physico-chimique

Grandeurs tabulées

Enthalpie standard de formation d'un constituant : variation d'enthalpie associée à la formation d'une mole de ce constituant à partir de ses éléments constitutifs pris dans leur état standard de référence à la température T.

$$\Delta_f H^\circ = \left.\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)_{T,p=p^\circ}$$

Enthalpie standard de réaction : on généralise la notion d'enthalpie standard de formation à toute réaction chimique.

$$\Delta_r H^\circ = \left.\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)_{T,p=p^\circ}$$

Enthalpie standard de dissociation de liaison : variation d'enthalpie pour rompre une liaison dans une mole de molécules, à la pression standard, à la température T, réactifs et produits étant gazeux.

$$\boxed{\Delta_{\text{diss}} H^\circ}$$

$$CH_4(g) = CH_3\bullet(g) + H\bullet(g) \;:\; \Delta_{\text{diss}}H^\circ(C-H) = 439 \text{ kJ.mol}^{-1} \text{ à } 25\,^\circ\text{C}$$

Enthalpie standard de changement d'état : enthalpie standard de réaction du changement d'état.

$$\boxed{\Delta_{\text{fus}} H^\circ = -\Delta_{\text{sol}} H^\circ}$$

Énergie (de première) d'ionisation : énergie à fournir à une mole d'atome donné à l'état gazeux et à l'état fondamental pour lui arracher un électron.

$$\boxed{\Delta_{\text{ion}} H^\circ}$$

$$Na(g) = Na^+(g) + e^-(g)$$

Énergie d'attachement électronique : transformation inverse de la précédente.

$$\boxed{\Delta_{\text{att}} H^\circ}$$

$$Br(g) + e^-(g) = Br^-(g)$$

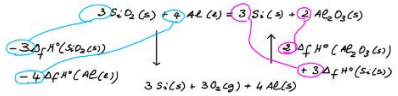
Cycles thermodynamiques

L'enthalpie H étant une fonction d'état, sa variation ne dépend que des valeurs initiales et finales des variables d'état. On peut donc construire des cycles thermodynamiques fictifs pour calculer sa variation.

Pour déterminer l'enthalpie standard d'une réaction, on peut s'appuyer sur les données disponibles dans les tables et construire des cycles thermodynamiques faisant intervenir ces données.

Loi de Hess : cas particulier du calcul d'une enthalpie standard de réaction à partir des enthalpies standards de formation.

$$\Delta_r H^\circ = \sum_i \nu_i \, \Delta_f H_i^\circ$$



Effets thermiques pour une transformation isobare

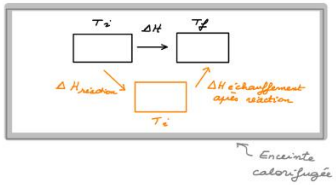
Lorsqu'une transformation provoque un transfert thermique, ce dernier va engendrer une variation de température des constituants du système.

On consière des transformations à pression constante, on parle de **réacteur isobare.**

On se place dans le cas où le transfert thermique vers le milieu extérieur est nul ou négligeable, on parle alors de **réacteur adiabatique.**

L'enthalpie étant une fonction d'état, on décompose la transformation en deux étapes fictives : l'une où la réaction provoque un tranfert thermique sans provoquer de variation de température et l'autre où le transfert thermique provoque une variation de température des constituants du système.

En réacteur isobare adiabatique : $\Delta H_{\text{réaction}} = -\Delta H_{\text{échauffement}}$



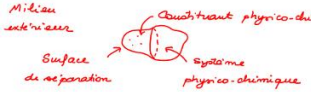
En réacteur isotherme isobare

$$\Delta H_{\text{réaction}} \simeq \Delta_r H^\circ \cdot \xi_f$$

En réacteur isobare adiabatique

$$\Delta H_{\text{échauffement}} = \sum_i n_i c_{p,i} \Delta T_i + \Delta H_{\text{changements d'état}}$$

Système physico-chimique



Espèce chimique : corps simple ou composé caractérisé par sa formule chimique

H_2O

Constituant physico-chimique : espèce chimique dont l'état physique est précisé

$H_2O(\ell)$

Variables d'état

Un sysytème **en équilibre thermodynamique** est caractérisé par des grandeurs macroscopiques qui n'évoluent pas dans le temps, en l'abscence d'échange avec l'extérieur.

Une grandeur macroscopique qui caractérise l'état d'un système en équilibre thermodynamique est appelée **variable d'état.**

Variable d'état extensive : valeur doublée lorsque le système est doublé

n, V

Variable d'état intensive : valeur inchangée lorsque le système est doublé

p, T

Phase

Une **phase** est une partie homogène d'un système.

Un système peut posséder une ou plusieurs **phases uniformes**, dans lesquelles les grandeurs intensives sont uniformes.

φ : nombre de phases uniformes

Paramètres de composition

Concentration molaire

$$c_i = \frac{n_i}{V}$$

Concentration massique

$$c_{m,i} = \frac{m_i}{V}$$

Fraction molaire

$$x_i = \frac{n_i}{\sum_k n_k} \text{ avec } \sum_k x_k = 1$$

Pression partielle

$$p_i = x_i p \text{ avec } \sum_k p_k = p$$

Pour un gaz parfait

$$n_i = p_i \frac{V}{RT}$$

Transformations du système physico-chimique

Une transformation physique fait passer la matière d'un état physique à un autre sous l'action de la température et/ou de la pression.

$H_2O(\ell) = H_2O(g)$

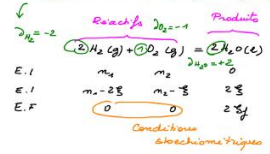
Une transformation chimique s'accompagne d'une modification des quantités de matière de tout ou partie des constituants physico-chimiques du système.

$2\ H_2(g) + O_2(g) = 2\ H_2O(g)$

Une transformation nucléaire engendre une modification de la structure du noyau des atomes.

Avancement d'une réaction

$$\xi = \frac{n_i(t) - n_i(0)}{\nu_i} \text{ d'où } \mathrm{d}n_i = \nu_i \, \mathrm{d}\xi$$



Coefficient stoechiométrique algébrique

ν_i

L'état standard

État de référence d'un élément : état sous lequel un élément est stable à la température considérée

À 25 °C : $I \rightarrow I_2(s)$

À 25 °C : $Fe \rightarrow Fe_\alpha(s)$

En cas d'indétermination, on choisi celui de plus faible atomicité et présent notablement.

$O \rightarrow O_2(g)$ et non $O_3(g)$

Pour le carbone, on choisi le graphite à toute température.

$C_{\text{graphite}}(s)$

État standard d'un constituant : état correspondant à

$H_2O(g)$ à 25 °C et à 1 bar, avec un comportement de gaz parfait

$H_2O(s)$ à -10 °C et à 1 bar

la pression standard

$p^\circ = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

sa température T (pas de température standard)

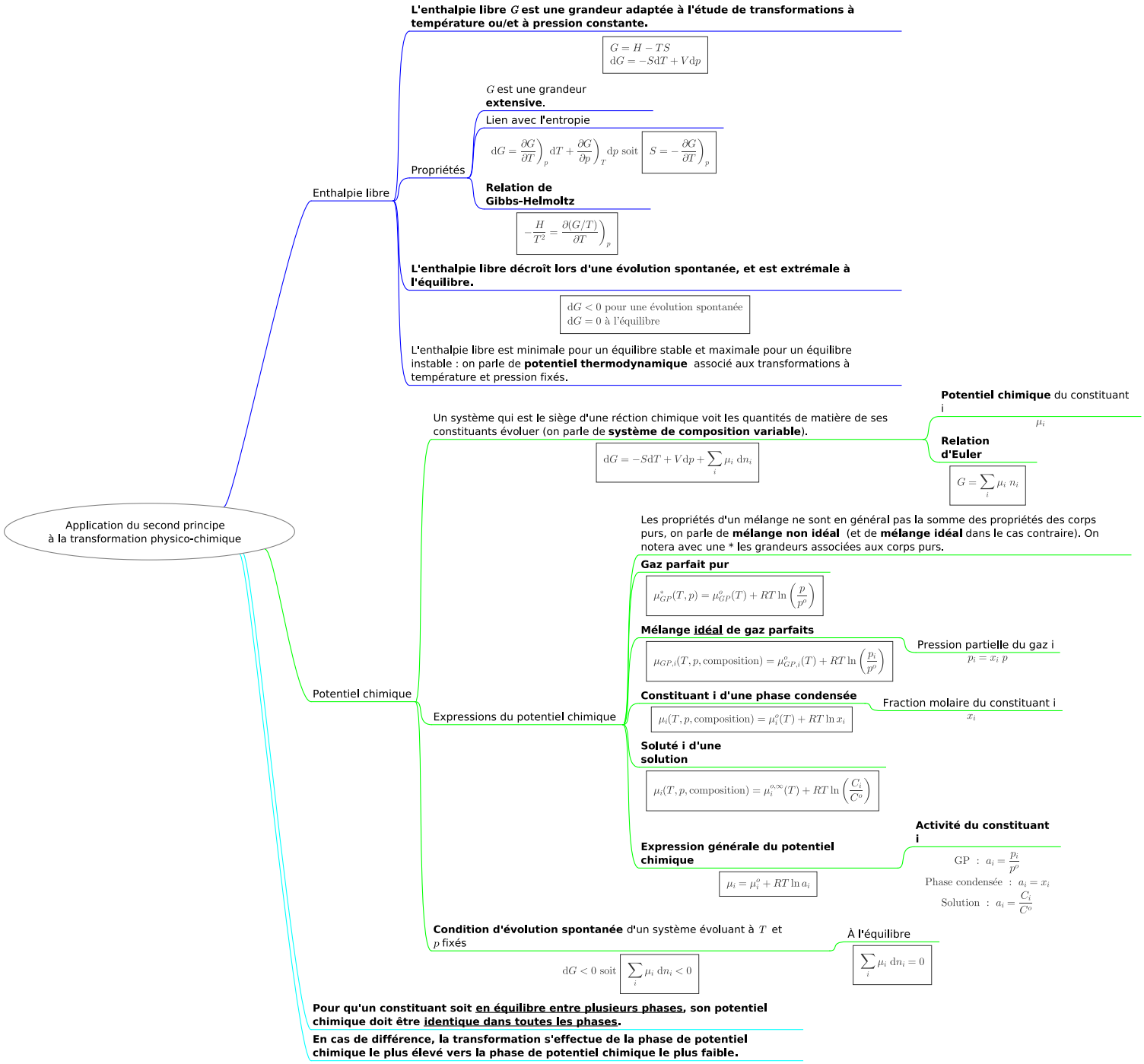
dans son état, considéré avec les caractéristiques :

- État gazeux : avec le comportement d'un gaz parfait
- État de phase condensée : aucune caractéristique particulière
- État de soluté : à la concentration standard, sans interactions entre particules de solutés (comme à dilution infinie)

$C^\circ = 1 \text{ mol.L}^{-1}$

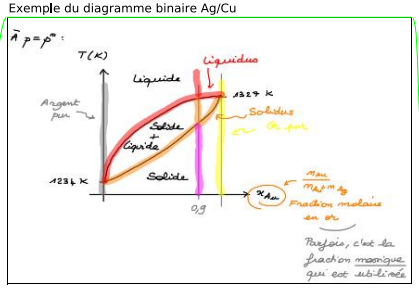
État standard de référence d'un élément : état standard d'un élément pris dans son état de référence.

À 25 °C $Cl \rightarrow Cl_2(g)$à 1 bar, avec un comportement de gaz parfait


Application du second principe à la transformation physico-chimique
Enthalpie libre
L'enthalpie libre G est une grandeur adaptée à l'étude de transformations à température ou/et à pression constante.
$G = H - TS$
$\mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p$
Propriétés
G est une grandeur extensive.
Lien avec l'entropie
$\mathrm{d}G = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p$ soit $S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$
Relation de Gibbs-Helmoltz
$-\frac{H}{T^2} = \left(\frac{\partial (G/T)}{\partial T}\right)_p$
L'enthalpie libre décroît lors d'une évolution spontanée, et est extrémale à l'équilibre.
$\mathrm{d}G < 0$ pour une évolution spontanée
$\mathrm{d}G = 0$ à l'équilibre
L'enthalpie libre est minimale pour un équilibre stable et maximale pour un équilibre instable : on parle de potentiel thermodynamique associé aux transformations à température et pression fixés.
Potentiel chimique
Un système qui est le siège d'une réction chimique voit les quantités de matière de ses constituants évoluer (on parle de système de composition variable).
$\mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p + \sum_i \mu_i \,\mathrm{d}n_i$
Potentiel chimique du constituant i
μ_i
Relation d'Euler
$G = \sum_i \mu_i \, n_i$
Expressions du potentiel chimique
Les propriétés d'un mélange ne sont en général pas la somme des propriétés des corps purs, on parle de mélange non idéal (et de mélange idéal dans le cas contraire). On notera avec une * les grandeurs associées aux corps purs.
Gaz parfait pur
$\mu^*_{GP}(T,p) = \mu^o_{GP}(T) + RT\ln\left(\frac{p}{p^o}\right)$
Mélange idéal de gaz parfaits
$\mu_{GP,i}(T,p,\text{composition}) = \mu^o_{GP,i}(T) + RT\ln\left(\frac{p_i}{p^o}\right)$
Pression partielle du gaz i
$p_i = x_i\, p$
Constituant i d'une phase condensée
$\mu_i(T,p,\text{composition}) = \mu^o_i(T) + RT\ln x_i$
Fraction molaire du constituant i
x_i
Soluté i d'une solution
$\mu_i(T,p,\text{composition}) = \mu_i^{o,\infty}(T) + RT\ln\left(\frac{C_i}{C^o}\right)$
Expression générale du potentiel chimique
$\mu_i = \mu^o_i + RT\ln a_i$
Activité du constituant i
GP : $a_i = \frac{p_i}{p^o}$
Phase condensée : $a_i = x_i$
Solution : $a_i = \frac{C_i}{C^o}$
Condition d'évolution spontanée d'un système évoluant à T et p fixés
$\mathrm{d}G < 0$ soit $\sum_i \mu_i \,\mathrm{d}n_i < 0$
À l'équilibre
$\sum_i \mu_i \,\mathrm{d}n_i = 0$
Pour qu'un constituant soit en équilibre entre plusieurs phases, son potentiel chimique doit être identique dans toutes les phases.
En cas de différence, la transformation s'effectue de la phase de potentiel chimique le plus élevé vers la phase de potentiel chimique le plus faible.

Changements d'état de mélanges binaires

Exemple du diagramme binaire Ag/Cu



Un mélange à 90% d'or et 10% d'argent que l'on chauffe sera successivement solide, biphasé puis liquide.

La variance d'un système est le nombre de papamètres intensifs qui caractérisent un état d'équilibre. C'est aussi le nombre maximal de paramètres intensifs dont la valeur peut être fixée sans rompre l'équilibre.

Variance

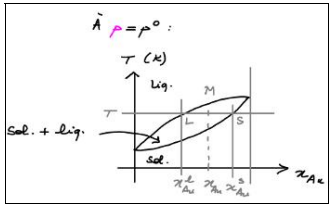
Cas d'un système binaire de constituants non réactifs

Nombre de phases φ

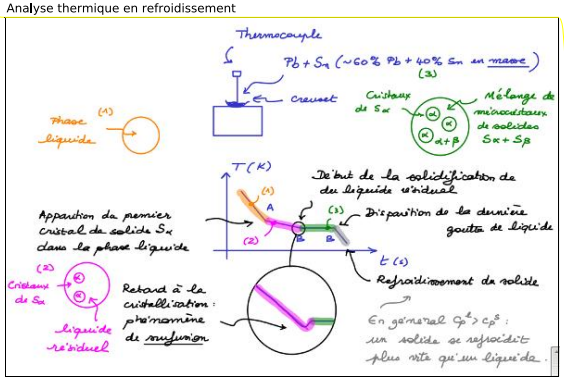
$$v = 4 - \varphi$$

Théorème des moments chimiques

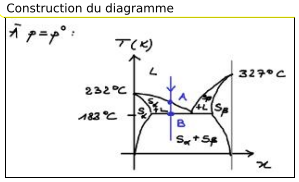
$n^s(x^s_{Au} - x_{Au}) = n^\ell(x_{Au} - x^\ell_{Au})$ soit $\boxed{\frac{n^s}{n^\ell} = \frac{LM}{MS}}$



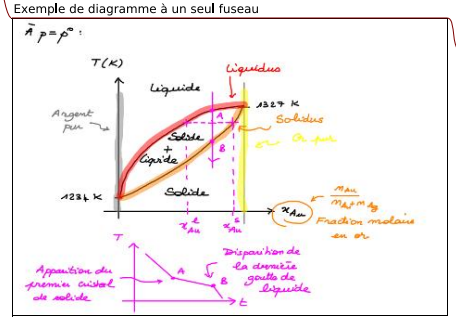
Analyse thermique en refroidissement



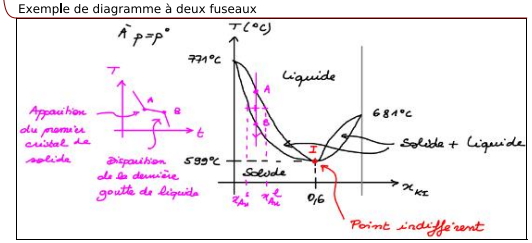
Construction du diagramme



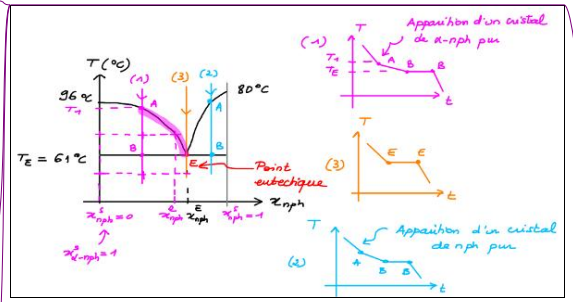
Exemple de diagramme à un seul fuseau



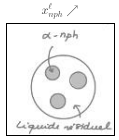
Exemple de diagramme à deux fuseaux



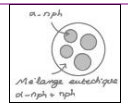
Exemple de diagramme avec absence totale de miscibilité à l'état solide



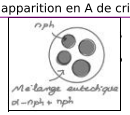
(1) Apparition en A de cristaux purs de α-nph et donc appauvrissement de la phase liquide en α-nph.



Solidification en B de la phase liquide sous forme de microcristaux distincts de α-nph et de nph avec une composition correspondant à celle de l'eutectique et le comportement d'un corps pur.



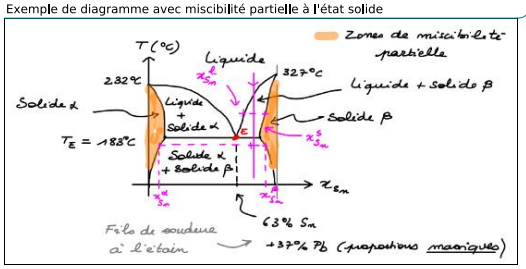
(2) Même principe avec apparition en A de cristaux purs de nph.



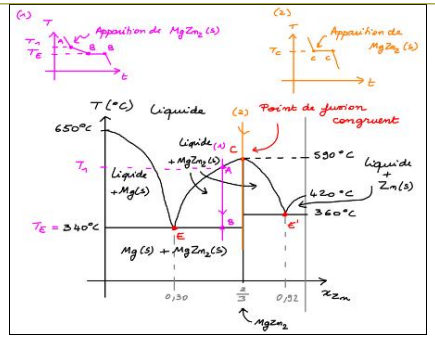
(3) Le mélange eutectique a le comportement d'un corps pur et se solidifie sous forme de microcristaux distincts de α-nph et de nph.



Exemple de diagramme avec miscibilité partielle à l'état solide



Exemple de **composé défini** : il arrive que les deux constituants forme un composé de formule bien définie.



Le théorème des moments peut être utilisé, il faut par contre à la fin prendre en compte la formule chimique du composé défini.

$n^s = n^s_{Mg} + n^s_{Zn} \neq n_{MgZn_2}$ ainsi $n_{MgZn_2} = \frac{n^s}{3}$

Équilibres chimiques

Déplacement d'équilibre

Détermination de l'enthalpie libre standard de réaction

$$G = H - TS \text{ soit } \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_{T,p} = \left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)_{T,p} - T\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)_{T,p}$$

soit $\Delta_r G = \Delta_r H - T\Delta_r S$

et donc $\boxed{\Delta_r G^o = \Delta_r H^o - T\Delta_r S^o}$

On utilise alors les données tabulées :

$\boxed{\Delta_r H^o = \sum_i \nu_i \Delta_f H^o}$ (loi de Hess)

$\boxed{\Delta_r S^o = \sum_i \nu_i S^o_{m,i}}$ (du fait du 3e p. de la th.)

Relation de Gibbs-Helmholtz

$$\boxed{-\frac{\Delta_r H^o}{T^2} = \frac{\mathrm{d}(\Delta_r G^o/T)}{\mathrm{d}T}}$$

L'approximation d'Ellingham consiste à considérer que sur un intervalle de température où il n'y a a pas de changement d'état de l'une des espèces concernées par l'équilibre :

$\Delta_r H^o$ et $\Delta_r S^o$ **varient peu avec la température.**

Effet de la température

Relation de Van't Hoff

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\ln K^o(T)}{\mathrm{d}T} = \frac{\Delta_r H^o}{RT^2}}$$

La constante d'équilibre ne dépend pas de T, la température n'est pas un facteur d'équilibre.

$\Delta_r H^o = 0$

La réaction est **endothermique**, la constante d'équilibre augmente lorsque la température augmente.

$\Delta_r H^o > 0$

La réaction est **exothermique**, la constante d'équilibre diminue lorsque la température augmente.

$\Delta_r H^o < 0$

Sens d'évolution

$\Delta_r G = RT\ln\left(\frac{Q_r}{K^o}\right)$

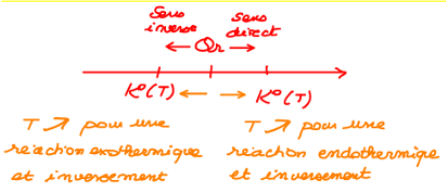
Sens direct

$\Delta_r G < 0$ soit $Q_r < K^o$

Sens inverse

$\Delta_r G > 0$ soit $Q_r > K^o$

Bilan



Modification du quotient réactionnel



Constante d'équilibre

Quotient réactionnel

$\boxed{\Delta_r G(T,p,\xi) = \Delta_r G^o(T) + RT\ln Q_r}$

avec $\boxed{Q_r = \prod_i a_i^{\nu_i}}$ le **quotien réactionnel**

Enthalpie libre standard de réaction

$\Delta_r G^o(T)$

Constante d'équilibre

À l'équilibre $\Delta_r G = 0$ soit $\Delta_r G^o(T) = -RT\ln Q_{r,eq} = -RT\ln K^o(T)$

$$\boxed{K^o(T) = Q_{r,eq} = \prod_i a_{i,eq}^{\nu_i} = \mathrm{e}^{-\Delta_r G^o/RT}}$$

Le **quotient réactionnel** prendra toujours la même valeur d'équilibre (appelée **constante d'équilibre**) pour une température donnée.

Constante d'équilibre

On se place dans le cas de systèmes dont la composition est fixée par la stabilité des espèces qui la compose (comme pour un temps infini), on parle de situation **sous controle thermodynamique** (par opposition à une situation où la composition est ficée par les vitesse relatives de formation, dite sous controle cinétique).

On peut montrer que les potentiels chimiques des constituants sont liés entre eux par l'intermédiaire de l'avancement, ainsi on peut écrire :

$G(T,p,\xi)$

Enthalpie libre de réaction (et affinité chimique)

$$\boxed{\Delta_r G = \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_{T,p} = -\mathcal{A}}$$

Critère d'évolution d'un système

$\Delta_r G\,\mathrm{d}\xi \leqslant 0$

Si $\Delta_r G = 0$: le système est **à l'équilibre**

Si $\Delta_r G < 0$ alors $\mathrm{d}\xi > 0$: le système évolue dans le **sens direct**

Si $\Delta_r G > 0$ alors $\mathrm{d}\xi < 0$: le système évolue dans le **sens inverse**

Écriture différentielle

$$\mathrm{d}G = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p,\xi}\mathrm{d}T + \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T,\xi}\mathrm{d}p + \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_{T,p}\mathrm{d}\xi$$

$$\boxed{\mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p + \Delta_r G\,\mathrm{d}\xi}$$

Expressions en fonction des potentiels chimiques

$\mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p + \sum_i \mu_i \mathrm{d}n_i$ et $\mathrm{d}n_i = \nu_i \mathrm{d}\xi$

$$\boxed{\Delta_r G = \sum_i \nu_i \mu_i}$$

Thermodynamique des réactions d'oxydoréduction

Évolution d'un système électrochimique

On se place hors situation d'équilibre et on calcule les potentiels correspondants.

$$\ln\frac{Q_r}{K^\circ} = -\frac{n_{\text{éch}}\mathcal{F}}{RT}(E_{\text{calc},2} - E_{\text{calc},1})$$

Une réaction d'oxydoréduction évoluera spontanément dans le **sens direct** (et inversement) si :

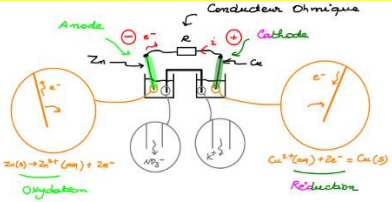
$$Ox_2 + Red_1 = Ox_1 + Red_2$$

$$\boxed{E_{\text{calc}}(Ox_2/Red_2) > E_{\text{calc}}(Ox_1/Red_1)}$$

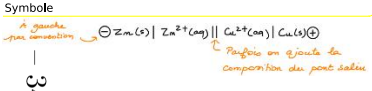


Piles électrochimique

Exemple de la pile Daniell



Symbole



Le travail électrique délivré au maximum par une pile correspond à la diminution de son enthalpie libre.

$$W' \leqslant \Delta G$$

L'enthalpie libre de réaction est lié à la f.e.m de la pile :

$$\boxed{\Delta_r G = -n_{\text{éch}} \cdot \mathcal{F} \cdot e} \text{ avec } e = E_\ominus - E_\odot$$

Capacité d'une pile

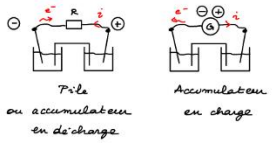
$$\boxed{\Delta q = I \cdot \Delta t}$$ avec I un courant fictif constant délivrable pendant Δt

Unité

A.h ou souvent mA.h

Électrolyse

En fournissant de l'énergie électrique à un système siège d'une réaction d'oxydoréduction, il est possible de forcer la réaction dans le sens inverse de la réaction spontanée. On parle d'**électrolyse.**



Utilisation des données thermodynamiques

Loi de Nernst : Pour une électrode associée à un couple oxydant/réducteur et lorsque la composition macroscopique n'évolue pas, on lui associe un potentiel électrique :

$$Red = Ox + n\ e^-$$

$$\boxed{E = E^\circ + \frac{RT}{n\mathcal{F}}\ln\left(\prod_i a_i^{\nu_i}\right)}$$

avec $\mathcal{F} = N_A\, e \simeq 96500$ C.mol^{-1} la constante de Faraday

L'électrode standard à hydrogène (ESH) est l'électrode de référence.

Couple H^+/H_2

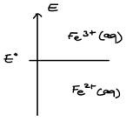
$\boxed{E = 0}$ à toute température

On peut alors tracer des **diagrammes de prédominance.**

Couple Fe^{3+}/Fe^{2+}

$$Fe^{2+}(aq) = Fe^{3+}(aq) + e^-$$

$$\boxed{E = E^\circ + \frac{RT}{\mathcal{F}}\ln\left(\frac{[Fe^{3+}(aq)]}{[Fe^{2+}(aq)]}\right)}$$



Autre expression de la loi de Nernst

$$\frac{RT}{\mathcal{F}}\ln 10 \simeq 0{,}06 \text{ V à } 25\ ^\circ\text{C}$$

$$\boxed{E = E^\circ + \frac{0{,}06}{n}\log\left(\prod_i a_i^{\nu_i}\right)} \text{ à } 25\ ^\circ\text{C}$$

Effet d'un second équilibre

Lien enthalpie libre standard - potentiel standard

Pour une demi-équation $Red = Ox + n\ e^-$

$$\boxed{\Delta_r G^\circ = n\ \mathcal{F}\ E^\circ(Ox/Red)}$$

La relation est opposée si la demi-équation est inversée.

Lien enthalpie libre - potentiels

Pour une équation $Ox_2 + Red_1 = Ox_1 + Red_2$

$$\boxed{\Delta_r G = n\ \mathcal{F}\ (E(Ox_1/Red_1) - E(Ox_2/Red_2))}$$

Lien enthalpie libre standard - constante d'équilibre (rappel)

$$\boxed{\Delta_r G^\circ = -RT\ln K^\circ}$$

Pour calculer un potentiel standard à partir d'autres données thermodynamiques, il faut écrire les équilibres correspondants et les combiner pour obtenir la demi-équation associée au couple étudié.

Couple $[Ag(NH_3)_2]^+/Ag$

$$\boxed{E^\circ([Ag(NH_3)_2]^+/Ag) = E^\circ(Ag^+/Ag) - \frac{RT}{1\cdot\mathcal{F}}\ln\beta_2}$$

Constante d'équilibre

Sur le même principe, la constante d'équilibre d'une réaction d'oxydoréduction s'obtient en combinant les données thermodynamiques associées aux demi-équations et celles de l'équilibre étudié.

$$K^\circ = e^{-\frac{n_{\text{éch}}\mathcal{F}}{RT}(E_1^\circ - E_2^\circ)}$$

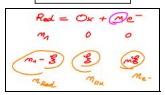
Cinétique des réactions d'oxydoréduction

Les étapes d'une réaction électrochimique

En cinétique hétérogène, on définit une **vitesse surfacique de réaction électrochimique** :

$$v = \frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}n_{Red}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}n_{Ox}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{nS}\frac{\mathrm{d}n_e}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{v = \frac{1}{nS}\frac{\mathrm{d}n_e}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{nFS}i}$$



L'intensité du courant électrique reflète la vitesse de la réaction électrochimique.

Transport de matière (entre la solution et l'électrode)

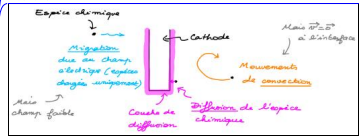
Migration (due au champ électrique)

Convection (mouvements de la solution)

Diffusion (au voisinage de l'électrode)

Facteur limitant

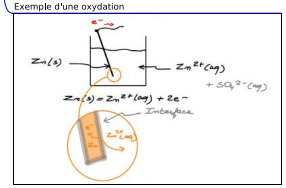
Illustration



Transfert de charge (à l'interface électrode/solution)

Il dépend de la température et du potentiel imposé à l'électrode.

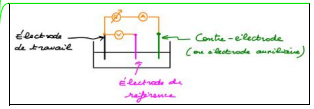
Exemple d'une oxydation



Associée à une électrode

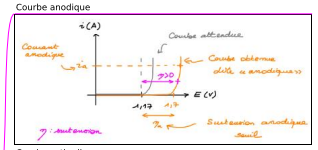
Courbe intensité - potentiel

Montage expérimental **à trois électrodes**

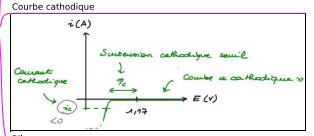


On parle de **système lent**.

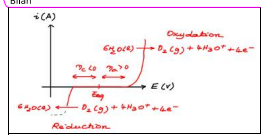
Courbe anodique



Courbe cathodique

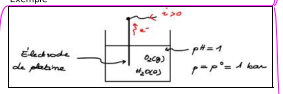


Bilan



Mise en évidence de la limitation par le transfert de charge

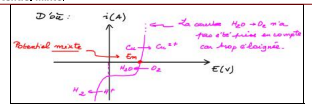
Exemple



Dans un système lent, apparaît des **surtensions anodique et cathodique** seuils. Elles dépendent principalement du couple, du pH et de la nature de l'électrode.

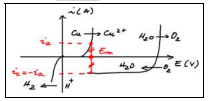
Potentiel mixte

Le potentiel de courant nul, dû à des espèces appartenant à deux couples différents est appelé **potentiel mixte.**



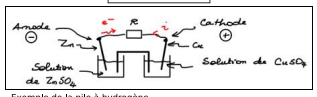
Il correspond au cas où courant anodique et courant cathodique, sont opposés. **Plus cette vitesse commune est grande, plus la réaction directe est rapide.**

$$\boxed{i_a = -i_c \text{ pour } E = E_m}$$



La réaction s'effectue entre deux couples, le courant à l'anode doit être l'opposé du courant à la cathode.

$$\boxed{i(\text{anode}) = -i(\text{cathode})}$$



Piles

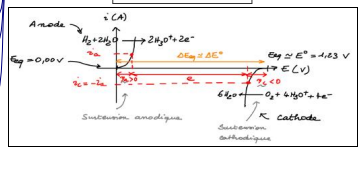
Exemple de la pile à hydrogène

$$\boxed{u = e - ri \simeq \Delta E^\circ + (\eta_c - \eta_a) - ri}$$

Tension à vide $\Delta E_{eq} \simeq \Delta E^\circ$

f.e.m $e \simeq \Delta E^\circ + \underbrace{(\eta_c - \eta_a)}_{\text{dépend de } i}$

Résistance interne (électrodes, électrolyte, pont salin, etc...) r



Électrolyseurs

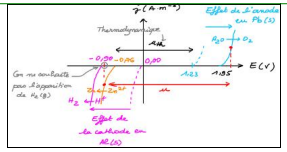
Rendement faradique

$$R_f = \frac{\text{Quantité d'e}^- \text{ ayant servi à la purification}}{\text{Quantité d'e}^- \text{ ayant circulé}}$$

d.d.p à imposer

$$\boxed{u = \Delta E + ri \simeq \Delta E^\circ - (\eta_c - \eta_a) + ri}$$

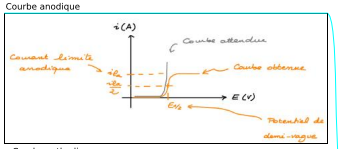
Le choix de l'électrode est crucial pour sélectionner la réaction électrochimique voulue.



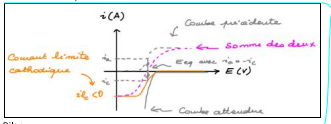
Courbes intensité - potentiel

On parle de **système rapide.**

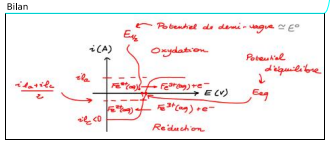
Courbe anodique



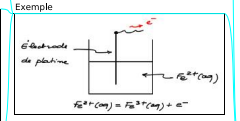
Courbe cathodique



Bilan



Exemple



Les courbes intensité - potentiel peuvent présenter un **palier de diffusion**, dû à l'impossibilité pour les particules de diffuser plus rapidement au voisinage de l'électrode.

Mise en évidence de la **limitation par le transfert de matière**

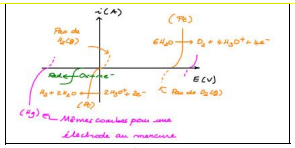
Ccoefficient de proportionnalité, dépend du coefficient de diffusion, de l'épaisseur de la couche de diffusion, etc...

L'intensité du **courant limite** peut être modélisée par la loi :

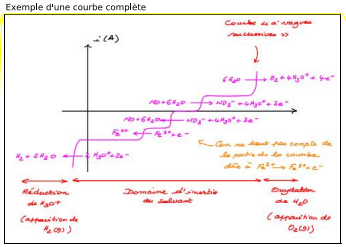
$$i_L = m \cdot n \cdot \mathcal{F} \cdot S \cdot c$$

- Nombre d'électrons mis en jeu : n
- Surface de l'électrode : a
- Concentration en réactifs : c

Le **domaine d'inertie du solvant** dépend de la nature de l'électrode.



Exemple d'une courbe complète



Pour étudier une espèce, il faut que sa courbe intensité - potentiel soit dans le domaine d'inertie du solvant pour une électrode donnée, on dit que l'expèce est **électroactive.**

- Équations différentielles usuelles
  - **du premier ordre**
    - avec second membre
      - Recherche d'une solution particulière
      - Recherche d'une solution de l'équation sans second membre
      - Somme des deux solutions
    - sans second membre
      - Solution
      - $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = 0$
      - $u = A\ \mathrm{e}^{-t/\tau}$
    - **La constante est déterminée grâce aux conditions initiales**
  - **du second ordre**
    - avec second membre
      - Recherche d'une solution particulière
      - Recherche d'une solution de l'équation sans second membre
      - Somme des deux solutions
    - sans second membre
      - Avec amortissement
        - $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\ u = 0$
        - Équation caractéristique
          - $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}\ r + \omega_0^2 = 0$
        - Discriminant
          - $\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$
          - Discriminant positif (Q<1/2)
            - $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -\alpha \pm \beta$
            - Solution
              - $u = A_1\ \mathrm{e}^{r_1 t} + A_2\ \mathrm{e}^{r_2 t}$
              - $= \mathrm{e}^{-\alpha t}(A_1\ \mathrm{e}^{\beta t} + A_2\ \mathrm{e}^{-\beta t})$
            - Régime apériodique
          - Discriminant nul (Q=1/2)
            - Racine double : $r = -\omega_0$
            - Solution
              - $u = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$
            - Régime critique
          - Discriminant négatif (Q>1/2)
            - $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\ \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\alpha \pm j\ \Omega$
            - Solution
              - $u = \mathrm{e}^{-\alpha t}(B_1\cos(\Omega t) + B_2\sin(\Omega t))$
              - $= \mathrm{e}^{-\alpha t}C\cos(\Omega t + \phi)$
            - Régime pseudo-périodique
        - Pulsation propre et facteur de qualité
          - ω_0 et Q
      - Sans amortissement
        - $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\ u = 0$
        - Solution
          - $u = A\ \cos(\omega_0 t + \phi)$
          - $= B_1\ \cos(\omega_0 t) + B_2\ \sin(\omega_0 t)$
          - Amplitude et phase
            - A et ϕ
        - Avec un coefficient négatif
          - $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} - \frac{1}{\ell^2}\ u = 0$
          - Solution
            - $u = A_1\ \mathrm{ch}\left(\frac{x}{\ell}\right) + A_2\ \mathrm{sh}\left(\frac{x}{\ell}\right)$
            - $= B_1\ \mathrm{e}^{x/\ell} + B_2\ \mathrm{e}^{-x/\ell}$
    - **Les constantes sont déterminées grâce aux conditions initiales**
  - **avec second membre sinusoïdal**
    - Solution
      - $X(t) = X_y(t) + X_p(t) \simeq X_p(t) = X_m\cos(\omega t + \varphi_X)$
      - La solution générale de l'équation sans second membre tendant rapidement vers 0, on ne considère que la solution particulière (on se place donc en régime permanent).
      - **On ne peut donc pas appliquer les conditions initiales pour déterminer les constantes.**
    - A toute grandeur X, on associe une grandeur complexe.
      - $\underline{X} = X_m\ \mathrm{e}^{j\varphi_X}\mathrm{e}^{j\omega t} = \underline{X_m}\ \mathrm{e}^{j\omega t}$
      - Équation différentielle complexe associée
      - Injection de la solution complexe
        - $X_m = |\underline{X_m}| = |\underline{X}|$
        - $\varphi_X = \arg(\underline{X_m})$
    - Exemple
      - $\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\ X = \omega_0^2\ A_m\cos(\omega t + \varphi)$
      - Équation différentielle complexe associée
        - $\ddot{\underline{X}} + \frac{\omega_0}{Q}\ \dot{\underline{X}} + \omega_0^2\ \underline{X} = \omega_0^2\ \underline{A}_m\mathrm{e}^{j\omega t}$
        - $\underline{A}_m = A_m\mathrm{e}^{j\varphi}$
      - Injection de la solution complexe
        - $X_m = \frac{A_m}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$
        - $\varphi_X = \varphi - \arctan\left(\frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$
      - Résonance en amplitude
        - $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$
        - $\omega = \omega_r \neq \omega_0$

