

SESSION 2020

**AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE**

Section : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR

**Option : SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR
ET INGÉNIERIE MÉCANIQUE**

**MODÉLISATION D'UN SYSTÈME, D'UN PROCÉDÉ
OU D'UNE ORGANISATION**

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Modélisation d'un cube immersif 3D

En plaçant l'utilisateur directement au cœur d'une simulation interactive, la réalité virtuelle est une technologie en plein essor qui permet de faciliter et d'accélérer toutes les phases de développement d'un produit.

Parmi les techniques de réalité virtuelle existantes, le cube immersif 3D communément appelé CAVE (Cave Automatic Virtual Environment) permet à plusieurs utilisateurs d'être totalement immergés dans un environnement virtuel tout en continuant à voir l'environnement réel. Ces CAVEs sont aujourd'hui utilisés dans l'industrie pour valider un design, mener une revue de projet de conception, analyser l'ergonomie d'un futur produit ou bien visualiser le résultat d'une simulation sans avoir à réaliser un prototype physique.

Le principe consiste à projeter l'environnement virtuel réaliste en haute résolution sur les cinq faces d'un cube. Équipé de lunettes et de capteurs, l'utilisateur peut se déplacer et interagir avec les objets virtuels à l'intérieur du cube. Ses mouvements et son champ de vision sont alors recalculés en temps réel.

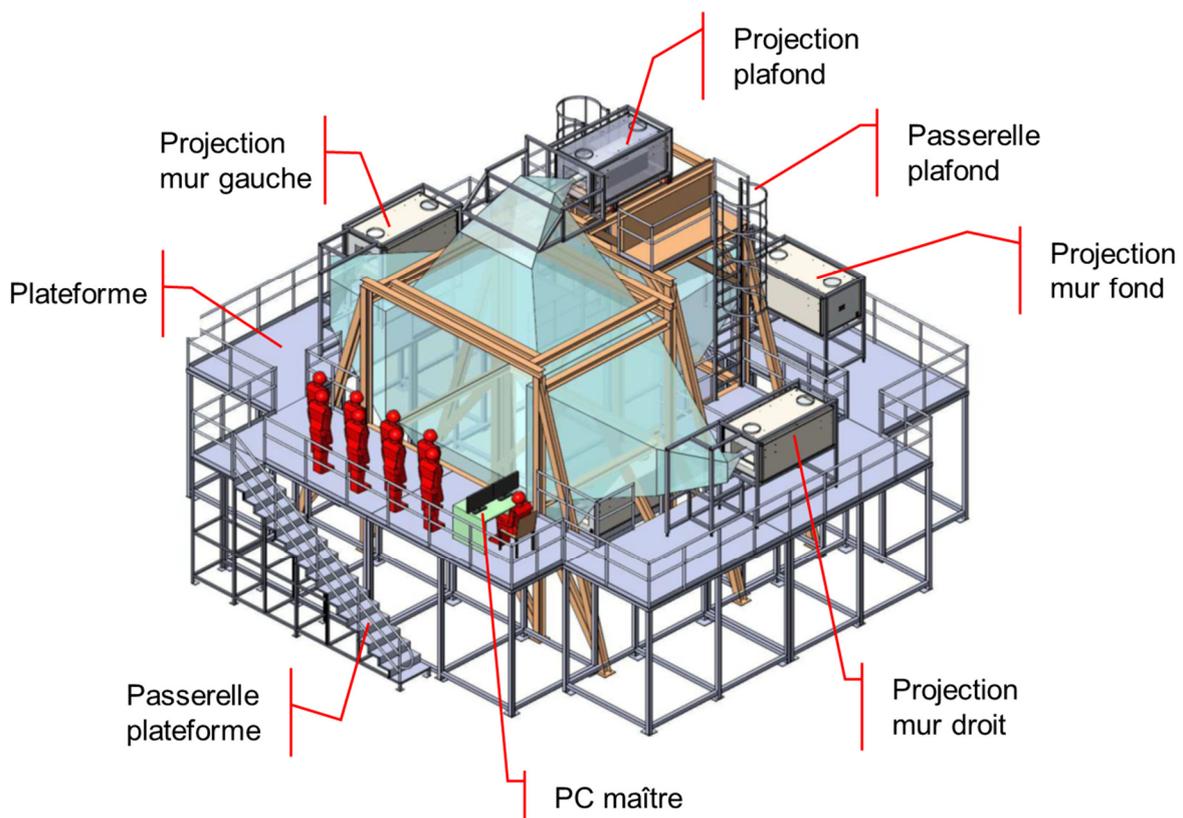


Figure 1 : architecture globale du CAVE étudié

Le cube immersif 3D étudié (Figure 1) est constitué de 5 écrans (mur droit, mur gauche, mur du fond, sol et plafond) sur lesquels sont projetés l'environnement virtuel. La projection sur chaque écran est réalisée à l'aide d'un équipement spécifique appelé système de projection. Un ordinateur maître gère l'ensemble des affichages et des applications pour les projections et l'interaction avec l'utilisateur. Le cube est positionné sur une plateforme surélevée, appelée structure, afin de permettre la projection sur l'écran du sol. Le système de projection sur l'écran du sol (non représenté sur la Figure 1) est placé sous la plateforme, sa configuration est similaire à celle du système de projection sur l'écran du plafond.

La figure 2 montre les principaux blocs du diagramme de définition du CAVE étudié.

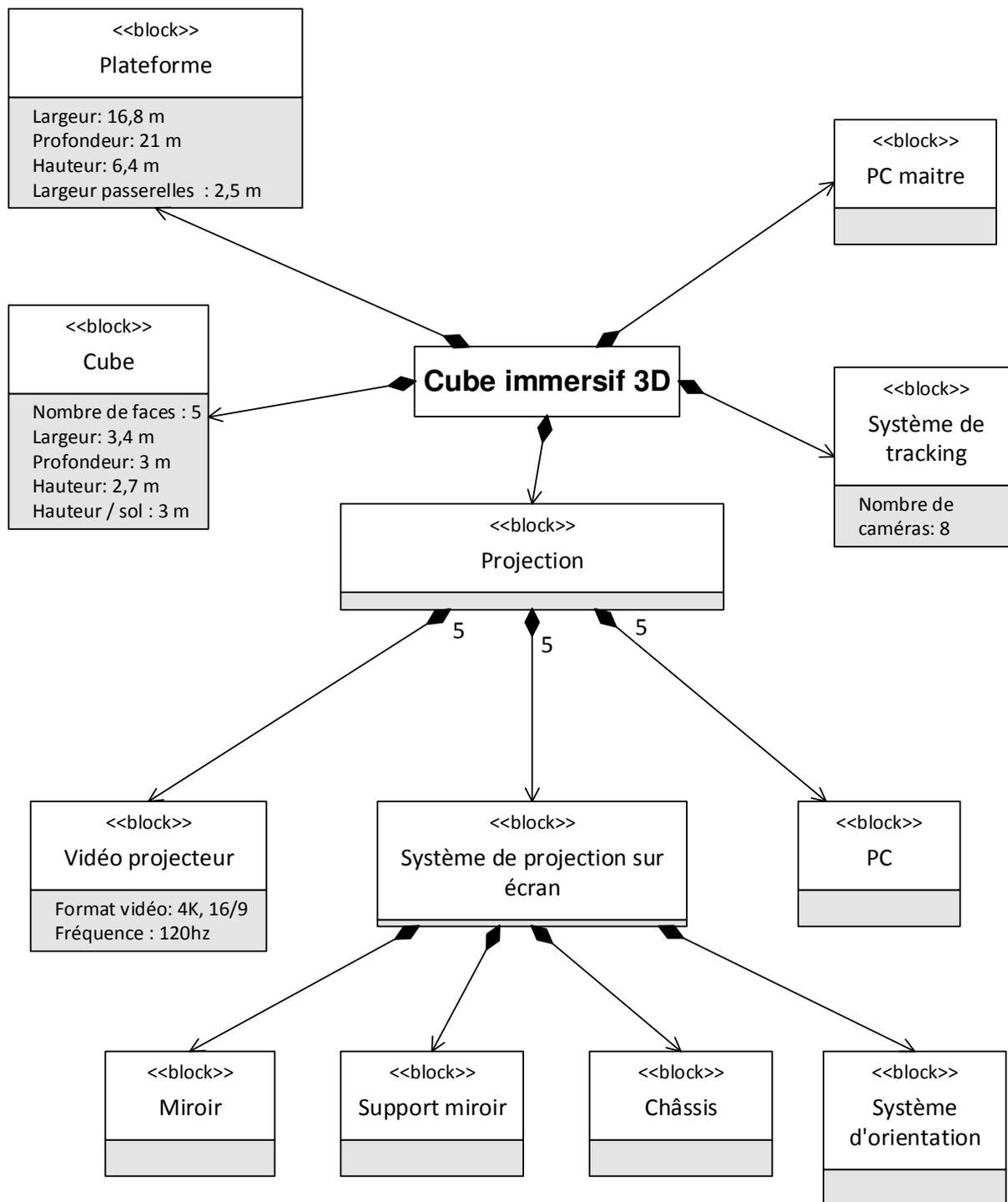


Figure 2 : diagramme de définition des blocs principaux du CAVE étudié

Le système de projection de chaque écran est constitué (Figure 3) d'un vidéoprojecteur, d'un miroir monté sur un châssis et d'un ordinateur esclave de l'ordinateur maitre.

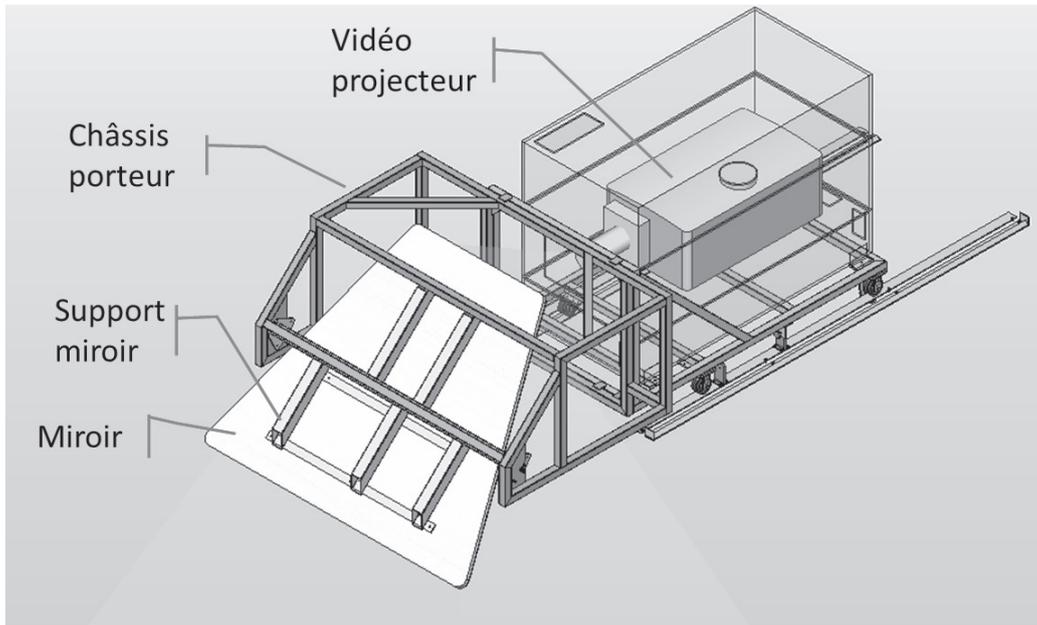


Figure 3 : système de projection au plafond

Afin de permettre à l'utilisateur d'être totalement immergé au sein de l'environnement virtuel, il est impératif de maîtriser les défauts d'alignements relatifs entre les différents écrans. Le moindre désalignement entre deux écrans consécutifs altère la perception de l'utilisateur en créant une image déformée et non synchronisée.

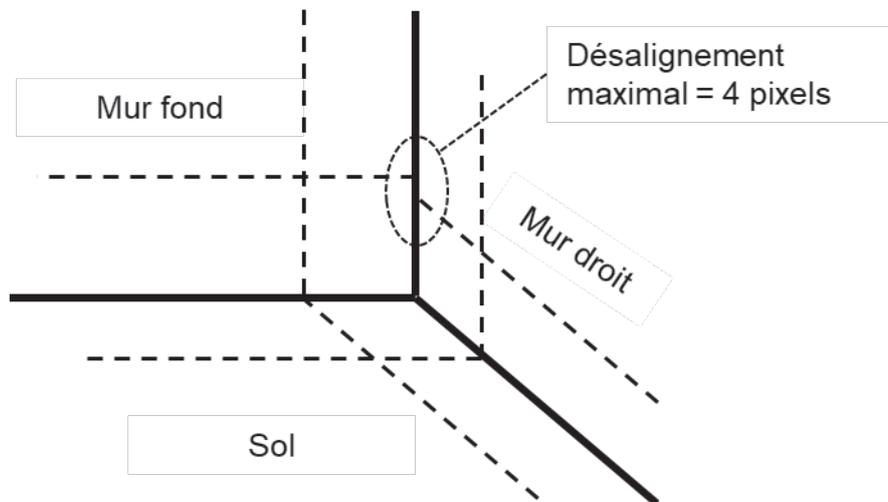


Figure 4 : défaut d'alignement relatif entre trois écrans

Ces défauts d'alignements relatifs sont corrigés en effectuant actuellement un réglage manuel de l'orientation des miroirs par rapport aux écrans. Ce réglage est une opération qui doit être réalisée au niveau de chaque miroir lors de l'installation du système et au moins une fois par an afin de recalibrer les projections. Cette opération nécessite l'intervention de plusieurs personnes et peut s'avérer particulièrement longue et fastidieuse (difficultés d'accès aux miroirs sol et plafonds, réglages peu précis).

En pratique, un dérèglement des mécanismes d'orientation des miroirs survient durant l'utilisation, un repositionnement doit alors être effectué plusieurs fois par an. Ce dérèglement est constaté plus ponctuellement lorsque des personnes marchent sur la plateforme pendant une projection.

Il est alors envisagé d'optimiser les châssis porteurs des miroirs et de motoriser leur orientation.

L'objectif de cette étude est de mettre en place et en application les outils de modélisation permettant de caractériser ces défauts géométriques d'orientation des miroirs et de choisir les solutions technologiques de réglage associées.

Le sujet est composé de cinq parties indépendantes.

Dans la première partie, on s'attachera à analyser l'influence d'un défaut géométrique intrinsèque du système de projection sur les défauts d'alignements relatifs entre deux écrans.

La seconde partie concernera le système de projection sur le plafond. Elle sera focalisée sur la mise en place d'une solution de réglage permettant de compenser les défauts d'alignements relatifs entre les écrans.

Les parties 3 à 5 concerneront le système de projection sur un mur. Il s'agira de modéliser les désalignements dus au déplacement d'une personne sur la plateforme qui est la première cause constatée de désalignement en cours d'utilisation.

La troisième partie vise à mettre en place une démarche d'optimisation du châssis porteur.

L'influence de cette contrainte sera analysée dans la quatrième partie au niveau de la liaison entre le châssis porteur et le miroir.

Enfin, la cinquième partie traitera de l'analyse de l'influence du déplacement d'une personne sur les défauts constatés au sein du CAVE.

En conclusion, il est proposé d'effectuer une synthèse de la démarche mise en œuvre au cours de l'étude proposée.

Les solutions technologiques retenues pour la réalisation du CAVE seront alors analysées en dernière partie afin de vérifier que le cahier des charges (défini dans le Tableau 1) est correctement respecté.

Exigences	Critères et niveaux d'appréciation
1. Afficher avec réalisme des contenus 3D en stéréoscopie	<ul style="list-style-type: none"> Précision d'affichage < 4 Pixels = 5mm
2. Permettre une immersion visuelle dans un large champ de vision	<ul style="list-style-type: none"> Taille de l'image minimale : 3000 mm x 2700 mm
3. Adapter le contenu en temps réel à la position de l'utilisateur	<ul style="list-style-type: none"> Latence < 20 ms Stabilité : marge de gain $M_G > 10$ dB Marge de phase $M_\phi > 30^\circ$
4. Permettre le travail collaboratif	<ul style="list-style-type: none"> Nombre de personnes dans le cube : 4 maxi Nombre de personnes autour du cube : 6 maxi
5. Permettre le réglage de l'alignement des projections	<ul style="list-style-type: none"> Fréquence de réglage pour cause de désalignement < 1 fois par an Nombre de personnes nécessaires au réglage : 1 au maximum Durée maximale admissible de réglage : 5 minutes par projection

Tableau 1 : exigences, critères et niveaux d'appréciations du cube immersif 3D

Partie 1. Mise en situation

L'objectif de cette partie est d'analyser l'influence d'un défaut géométrique du système de projection sur la qualité de la visualisation du milieu immersif.

Le principe retenu pour la projection est schématisé sur la Figure 5.

Les réglages de la projection pour satisfaire l'exigence 1 sont réalisés au niveau des vidéoprojecteurs par leur positionnement (réglage des distances L_1 et L_4), par l'orientation de leur lentille de projection ainsi que par les mécanismes d'orientation des miroirs (réglage de l'angle β).

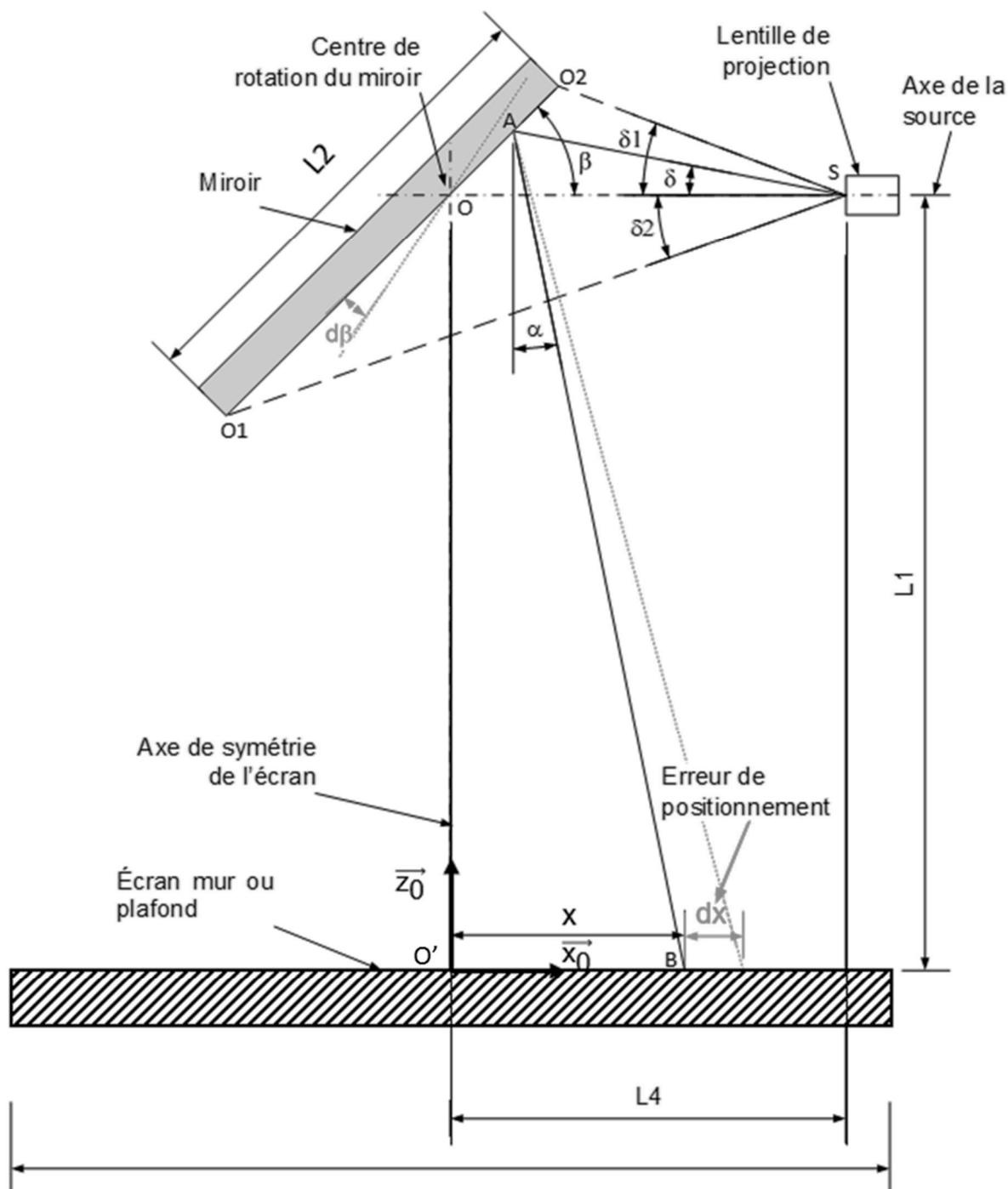


Figure 5 : principe de projection

Les hypothèses suivantes seront considérées :

- l'axe de la source et l'écran sont perpendiculaires ;
- le miroir est en rotation d'axe (O, \vec{y}_0) (selon le schéma de la Figure 5) ;
- il n'y a pas d'erreur sur la distance L_4 , celle-ci pouvant se régler automatiquement sur le vidéoprojecteur ;
- Le repère $(O', \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est associé à l'écran de projection.

Le principe de projection consiste à afficher sur l'écran une image issue de la source (vidéoprojecteur) qui est réfléchi à l'aide du miroir. On s'intéresse dans un premier temps à la projection d'un pixel de l'image issue de la source qui se réfléchit en A sur le miroir et qui sera affiché sur l'écran en B de coordonnées (x,y) dans le repère $(O', \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Question 1) Justifier la relation $x = L_4 \cdot \frac{\tan\delta}{\tan\delta + \tan\beta} (1 + \tan\beta \cdot \tan\alpha) + L_1 \cdot \tan\alpha$, avec $\alpha = 2\beta + \delta - \frac{\pi}{2}$.

Les graphiques de la Figure 6 donnent les valeurs de l'erreur $d\beta$ du paramètre β et dL_1 du paramètre L_1 pour que l'erreur de positionnement dv reste inférieure à 4 pixels soit 5 mm.

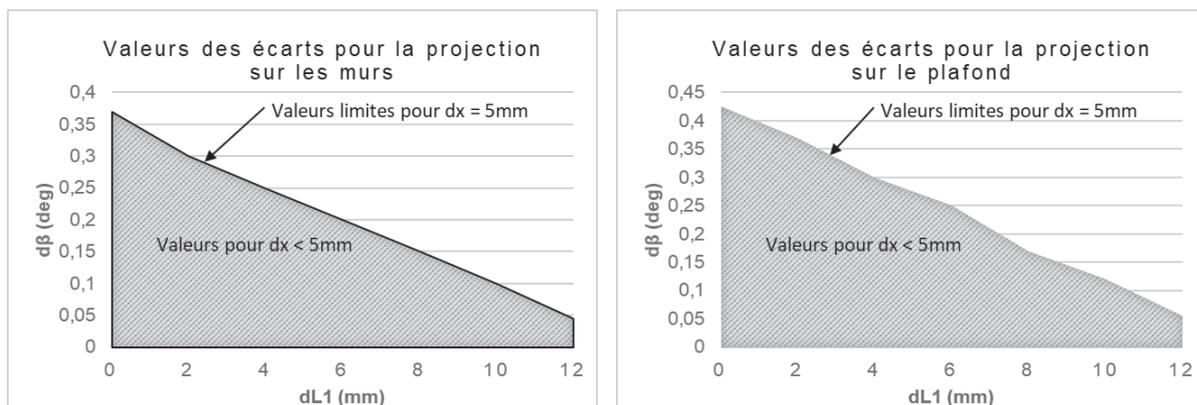


Figure 6 : erreurs admissibles de $d\beta$ et dL_1

Question 2) Justifier comment ont été obtenues les courbes de la figure 6. En déduire l'erreur maximale $d\beta_{Max}$ admissible pour le positionnement angulaire du miroir.

Après s'être concentré sur la projection d'un pixel, il est proposé de se focaliser sur la projection du motif défini Figure 7 au niveau de la source centré en S.

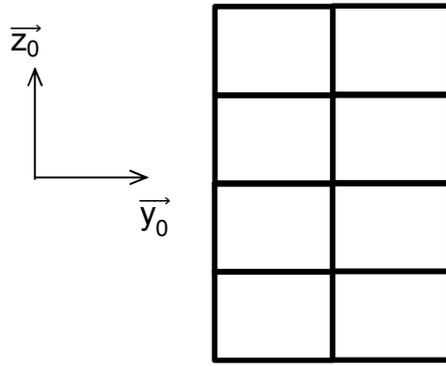


Figure 7 : motif défini au niveau de la source en S

Question 3) Proposer une représentation du motif projeté sur l'écran de la Figure 1 en cas d'erreur $d\beta_{\text{Max}}$ d'orientation du miroir autour de la direction \vec{y}_0 . Une partie des justifications peut être effectuée sous forme de schémas.

Après avoir visualisé l'influence d'un défaut d'orientation angulaire d'un miroir, il est proposé de se concentrer dans la partie suivante sur la mise en place d'une solution de réglage de l'orientation d'un miroir à l'aide d'une motorisation.

Partie 2. Motorisation du système de positionnement du miroir au plafond

L'objectif de cette partie est de faciliter le réglage du miroir du plafond qui est assez difficile d'accès actuellement. Afin d'analyser la pertinence d'une solution de motorisation à l'aide d'un vérin électrique, il est proposé dans un premier temps de déterminer les caractéristiques du vérin. L'équation dynamique du moteur du vérin électrique est déterminée dans un second temps avant de régler l'asservissement en position permettant de respecter certaines exigences.

Le lieu de l'intégration du vérin électrique ci-dessus proposé est indiqué en Figure 8. Avant la proposition de motorisation de l'orientation du miroir au plafond, ce réglage s'effectuait manuellement avec un opérateur qui bloquait en rotation le miroir par adhérence à l'aide de liaisons vis/écrou.

2.1 Analyse de l'assemblage

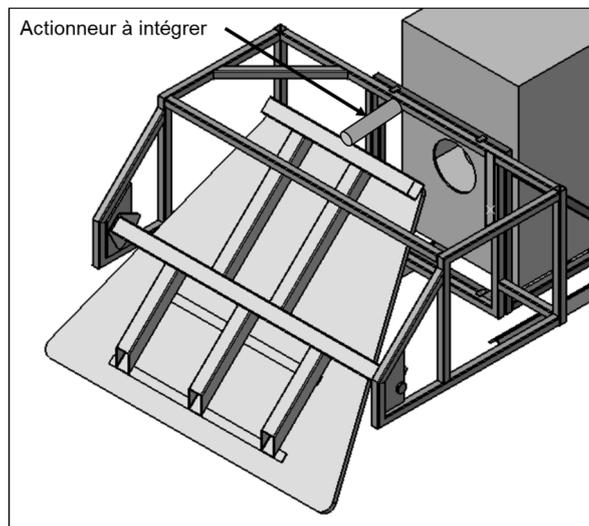
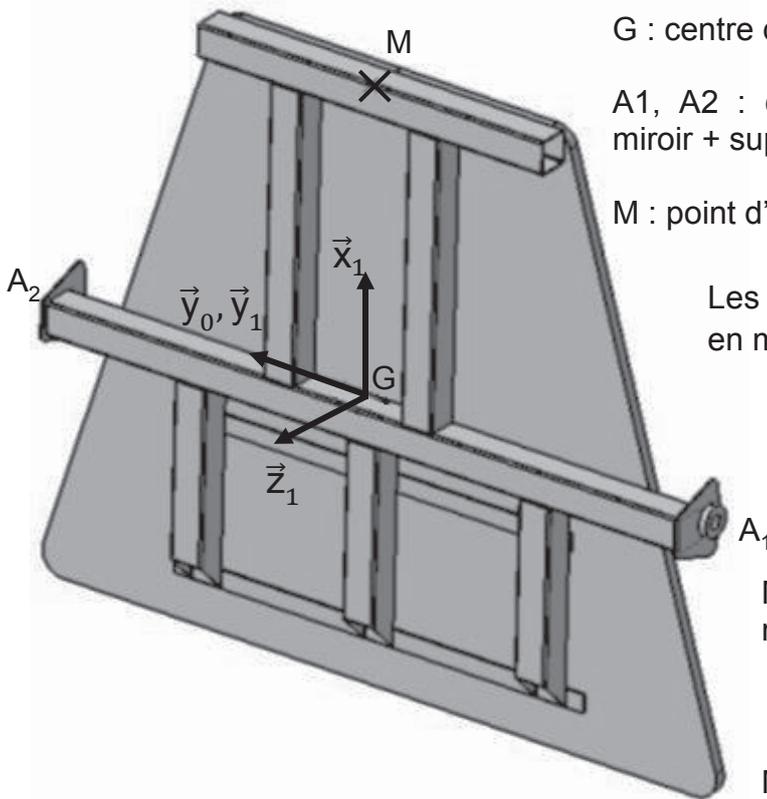


Figure 8 : mécanisme d'orientation des miroirs pour la projection au plafond

Le miroir est monté sur un support mécano-soudé. Les liaisons entre le miroir et le support miroir ne sont pas à étudier. L'ensemble miroir + support noté {1} est en liaison pivot d'axe (A_1, \vec{y}_0) et en liaison pivot d'axe (A_2, \vec{y}_0) avec le châssis.



G : centre de gravité de l'ensemble miroir + support

A1, A2 : centres des liaisons pivot de l'ensemble miroir + support et la structure

M : point d'attache de l'actionneur

Les coordonnées de A1, A2 et M sont données en mm dans le repère $(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$:

$$\overrightarrow{GA1} = \begin{Bmatrix} -23 \\ -945 \\ -31 \end{Bmatrix} \quad \overrightarrow{GA2} = \begin{Bmatrix} -23 \\ 945 \\ -31 \end{Bmatrix} \quad \overrightarrow{GM} = \begin{Bmatrix} 882 \\ 0 \\ 95 \end{Bmatrix}$$

Matrice d'inertie et masse de l'ensemble miroir + support {1} en kg.m² :

$$I_G(1) = \begin{bmatrix} 44 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 90 \end{bmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1}$$

Masse miroir : $M_m = 160$ kg

Masse support miroir : $M_s = 40$ kg

Figure 9 : caractéristiques de l'ensemble miroir + support {1}

L'orientation du miroir + support {1} pour la projection au plafond est réglée à l'aide d'un vérin électrique (tige {2} – corps {3}) en liaison rotule au point M coté support et en liaison rotule au point N coté châssis {0}. Le vérin électrique sera supposé de masse négligeable devant la masse de l'ensemble {1}.

Le schéma cinématique de la partie étudiée est représenté sur la Figure 10.

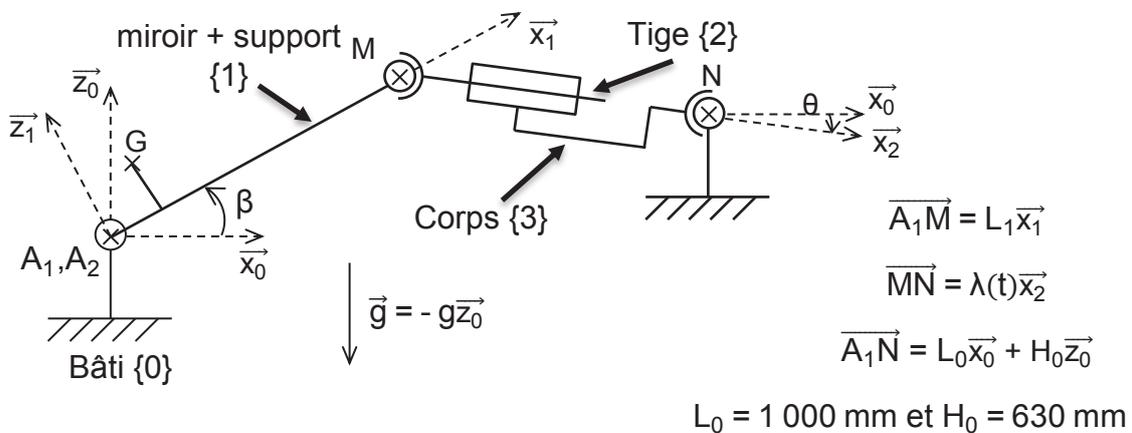


Figure 10 : schéma cinématique du mécanisme de réglage

Question 4) Afin d'obtenir un débattement angulaire de +/- 10° par rapport à la position d'équilibre $\beta = 45^\circ$, déterminer la course minimale du vérin électrique nécessaire.

Question 5) Déterminer le degré d'hyperstatisme de l'assemblage étudié. En déduire les contraintes technologiques à respecter pour effectuer l'assemblage du mécanisme d'orientation sur le châssis.

Question 6) Après avoir justifié la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble miroir + support et après avoir formulé les hypothèses nécessaires, déterminer la projection du moment dynamique de l'ensemble {1} par rapport au bâti {0} en A_1 noté $\overrightarrow{\delta_{A_1}(1,0)} \cdot \overrightarrow{y_0}$.

Question 7) Vis-à-vis de l'utilisation du vérin proposée dans cette étude, calculer l'effort maximal de poussée (noté $\|\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}}\|$) que le vérin doit développer pour permettre l'orientation du miroir.

La solution retenue de motorisation consiste à utiliser un vérin électrique. On choisira de prendre un coefficient de sécurité de 2 sur la valeur obtenue de l'effort de poussée.

Question 8) Proposer des justifications possibles quant à cette hypothèse.

Question 9) Proposer en le justifiant un vérin parmi la documentation fournie dans le tableau 2.

Diamètre de la tige du vérin [mm]	32	40	50
Course utile [mm]	30 ... 800	30 ... 800	30 ... 1 000
Pas de la vis [mm/tr]	2,5	3	4
Force maximale [kN]	0,6	1	1,6
Couple d'entraînement maximal [Nm]	1,1	2,4	4,8

Tableau 2 : caractéristiques mécaniques du vérin électrique

2.2 Implantation d'un vérin électrique

Les calculs précédents ont conduit à définir la solution retenue pour commander l'orientation du système de positionnement.

Le vérin électrique linéaire, de masse totale $M_{\text{vérin}} = 1 \text{ kg}$ comprend :

- un moteur à courant continu solidaire du corps (3). L'inertie de l'arbre moteur est notée $J_m = 0,045 \text{ kg.cm}^2$, sa vitesse de rotation $\omega_m(t)$ et sa position angulaire par rapport au corps du vérin notée $\beta_m(t)$;
- un réducteur à engrenages solidaire du corps (3) et de rapport de réduction $k = 1/5$. Le moment d'inertie du réducteur autour de l'axe de sortie du réducteur est noté $J_r = 0,040 \text{ kg.cm}^2$, sa vitesse de rotation $\omega_r(t)$ et sa position angulaire par rapport au corps du réducteur $\beta_r(t)$. Le rendement sera supposé égal à 1 ;
- un système vis/écrou à filetage trapézoïdal (1 filet et pas = 2,5 mm/tr) de rendement noté η_{ve} , Le moment d'inertie de l'ensemble { vis (5) - écrou (6) – tige (4)} autour de l'axe (N, \vec{y}_0) est noté J_0 . L'inertie J_H du vérin se détermine à partir de l'inertie $J_0 = 0,016 \text{ kg.cm}^2$ (inertie pour 0 mm de course) à laquelle s'additionne l'inertie $J_V = 0,160 \text{ kg.cm}^2/\text{m}$ (inertie par mètre de course utile). La masse de l'ensemble { écrou (6) – tige (4)} est notée $M_{\text{tige}} = 300 \text{ g}$.

Le dessin d'ensemble du vérin est défini sur la Figure 11 sur laquelle l'accouplement avec l'ensemble moteur + réducteur à droite n'est pas représenté :

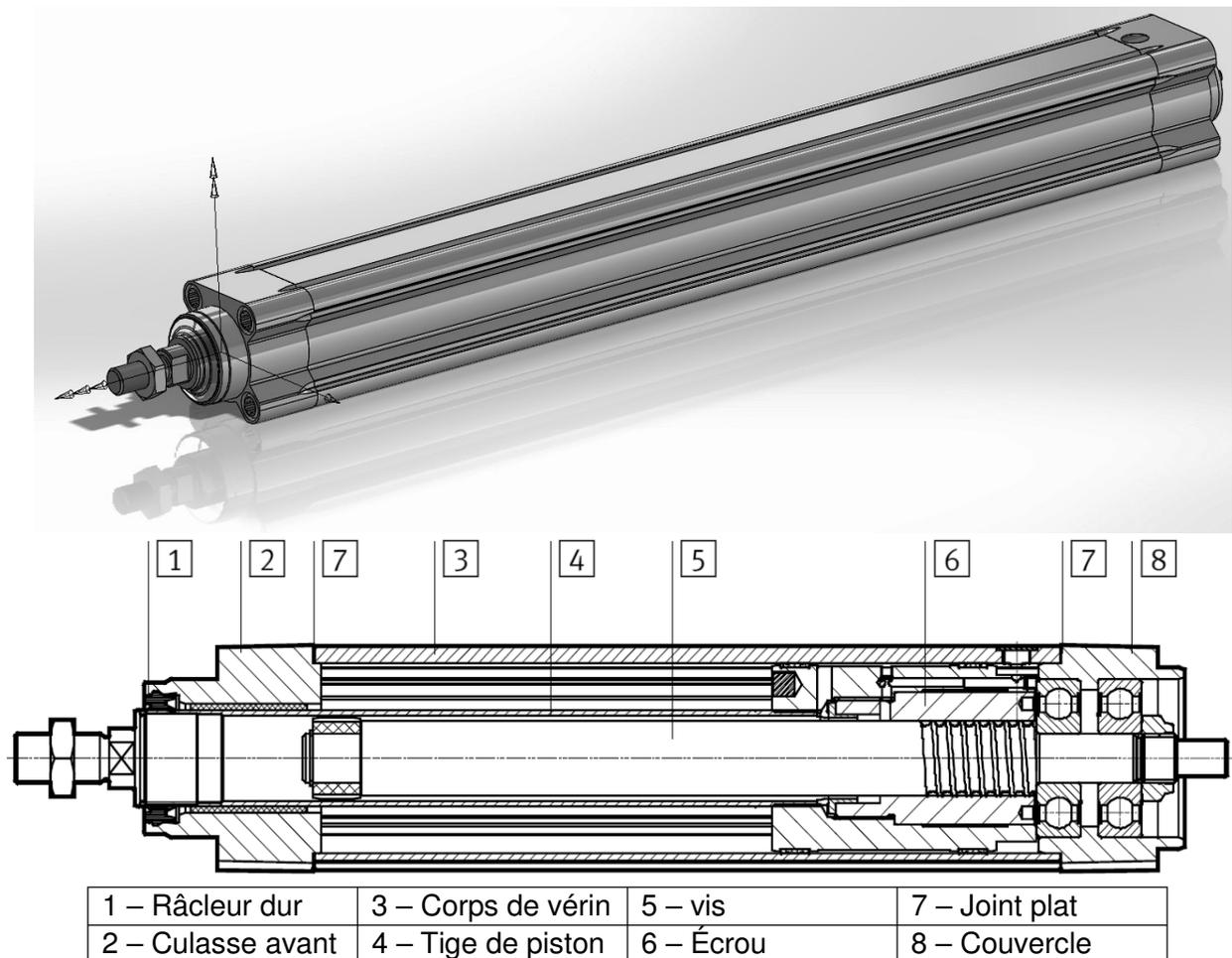


Figure 11 : vue en coupe et en 3D du vérin électrique retenu

Afin de mettre en place la loi de commande du vérin, il est proposé de s'intéresser à la transmission de puissance au sein de la liaison hélicoïdale.

2.2.1 Modélisation de la liaison hélicoïdale

La liaison hélicoïdale est réalisée à partir d'une vis à filet trapézoïdal dont les caractéristiques géométriques sont rappelées Figure 12.

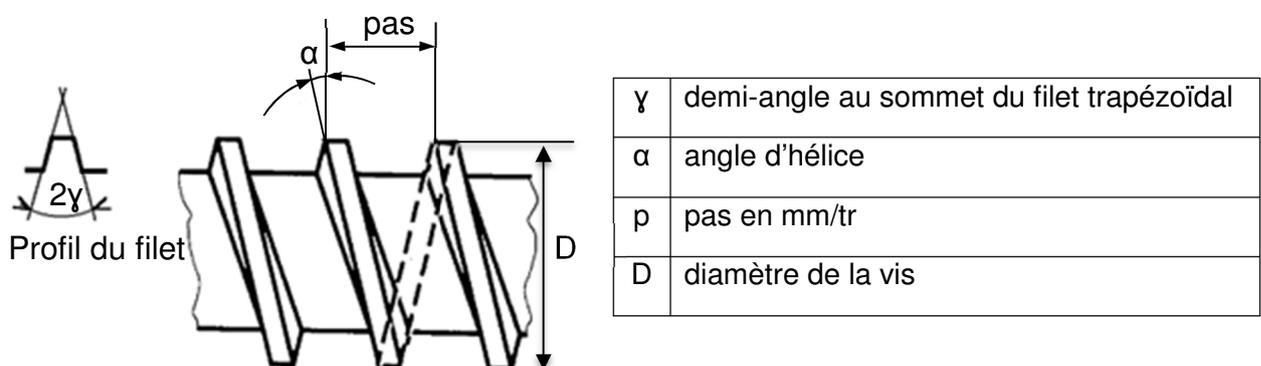


Figure 12 : caractéristiques géométriques de la vis

Lors de la transmission de puissance, la relation entre le couple transmissible sur la vis et l'effort axial de l'écrou est défini par la relation suivante :

$$C_{\text{red}} = -F_a \frac{D}{2} \tan(\alpha + \varphi').$$

Les différents paramètres de l'équation précédente sont définis comme suit :

- C_{red} : Couple du réducteur exercé sur la vis ;
- F_a : Effort axial de la vis sur l'écrou ;
- $\tan(\varphi) = f = 0,3$: coefficient de frottement sec vis/écrou ;
- φ' angle de frottement fictif tel que $\tan(\varphi') = \frac{\tan(\varphi)}{\cos(\gamma)}$.

Question 10) Après avoir justifié l'ensemble des hypothèses, déterminer le rendement de la liaison vis-écrou noté η_{ve} .

2.2.2 Détermination de l'équation dynamique du moteur

L'ensemble mobile E est défini par : $E = \{\text{corps de vérin, moteur, réducteur, tige de vérin, support + miroir}\}$.

L'objectif des quatre questions suivantes est de mettre en place l'équation dynamique du moteur utilisé dans l'asservissement en position angulaire du miroir.

Question 11) À partir du schéma cinématique de la Figure 10, réaliser un graphe de liaison du système étudié. Toutes les actions mécaniques pertinentes à prendre en considération pour la détermination de l'équation dynamique du moteur seront ajoutées sur ce graphe.

Question 12) Établir l'expression de $\dot{\beta}(t) = \frac{d}{dt}\beta(t)$ en fonction de L_0 , L_1 , H_0 , $\beta(t)$ et $\omega_m(t)$.

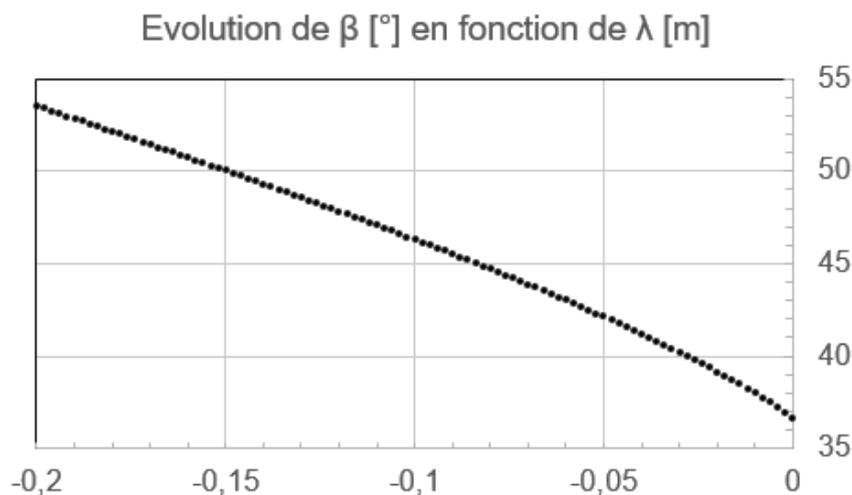


Figure 13 : tracé de la loi $\beta=f(\lambda)$

La loi entrée/sortie de l'angle du miroir en fonction du déplacement du vérin est donnée en Figure 13.

Question 13) Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble mobile E.

Question 14) Après avoir justifié l'ensemble des hypothèses et après avoir analysé les énergies cinétiques mises en jeu, établir à l'aide d'une étude énergétique l'équation dynamique du mouvement de l'ensemble E et la mettre sous la forme :

$$C_m(t) = A \frac{d}{dt} \omega_m(t) + B \cos \beta(t) + C \sin \beta(t).$$

2.2.3 Modélisation de l'asservissement en position angulaire du miroir

L'orientation β du miroir est asservie en position (de consigne β_c) autour de sa position d'équilibre afin de corriger les défauts d'orientation liés aux vibrations des personnes présentes sur la plateforme. Le schéma-bloc est donné sur le document réponse 1.

Afin d'assurer la commande du vérin, et donc l'orientation du miroir, les éléments suivants sont pris en compte dans la chaîne d'asservissement :

- un hacheur de fonction de transfert H ;
- un correcteur de fonction de transfert C(p) ;
- un adaptateur de consigne de fonction de transfert K_a ;
- un codeur incrémental multitours, codé sur 12 bits, qui permet de mesurer l'angle de rotation du moteur vient compléter le dispositif d'orientation.

On donne les équations modélisant le fonctionnement du moteur à courant continu :

- loi des mailles aux bornes du moteur à courant continu ;

$$u_m(t) = R \cdot i_m(t) + L \cdot \frac{di_m(t)}{dt} + e_m(t)$$

- théorèmes généraux de la dynamique appliqués à l'ensemble des solides en mouvement ;

$$C_m(t) - B \cos \beta(t) - C \sin \beta(t) = A \cdot \frac{d}{dt} \omega_m(t)$$

- lois de couplage électromécanique ;

$$C_m(t) = k_c \cdot i_m(t)$$

$$e_m(t) = k_e \cdot \omega_m(t)$$

Avec :

- $u_m(t)$ la tension d'alimentation du moteur à courant continu utilisé en V ;
- $i_m(t)$ le courant d'induit du moteur en A ;
- $e_m(t)$ la force contre électro-motrice (fcem) du moteur en V ;
- $R = 31 \Omega$ la résistance de l'induit du moteur ;
- $L = 0,00104$ H l'inductance de l'induit du moteur ;
- $k_c = 0,344 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}$ la constante de couple ;
- $k_e = 0,344 \text{ V}\cdot\text{rad}^{-1}\cdot\text{s}$ la constante de fcem du moteur.

Question 15) Justifier le choix de positionnement du codeur dans la boucle d'asservissement. En déduire l'expression de la fonction de transfert K_a .

Question 16) À partir des études précédentes compléter les fonctions de transfert du schéma bloc proposé.

Question 17) Quelle(s) hypothèse(s) doit-on formuler afin d'étudier le modèle d'asservissement comme un système linéaire continu invariant ?

Les précédentes hypothèses ayant été mises en œuvre, il est proposé de s'intéresser dans un premier temps à la fonction de transfert en boucle ouverte du système non corrigé et non perturbé. Cela revient donc à considérer $C(p) = 1$.

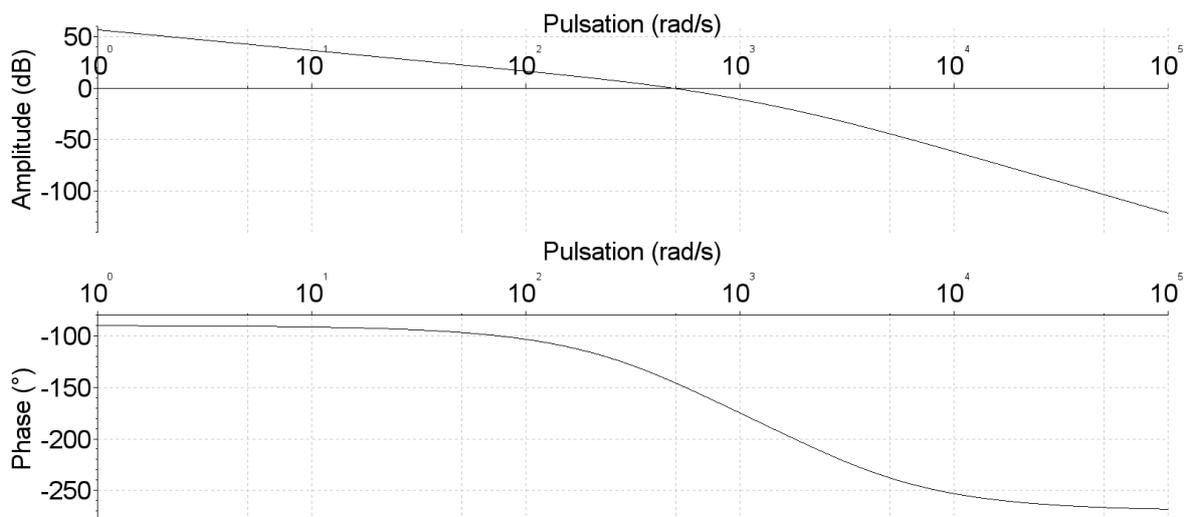


Figure 14 : diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte

Question 18) Après avoir justifié les constructions du diagramme asymptotique et les valeurs caractéristiques de la Figure 14, vérifier si le système est stable ou non en boucle fermée.

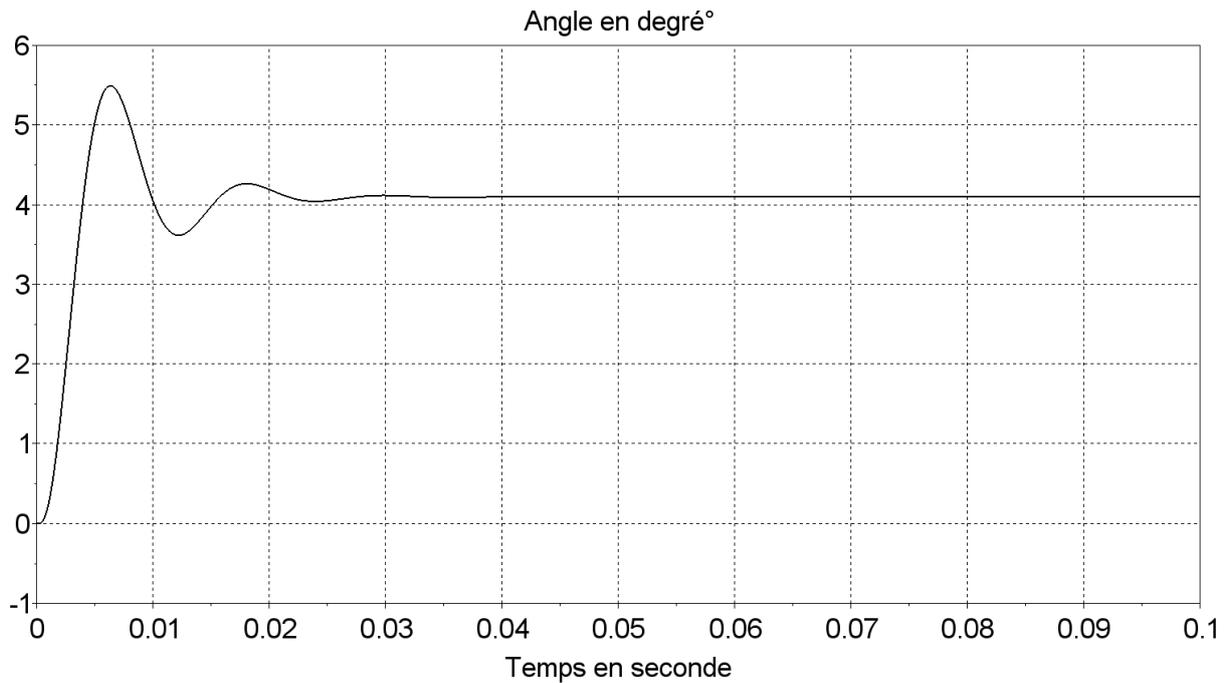


Figure 15 : réponse temporelle à un échelon de position de 5°

Question 19) Après avoir analysé les performances du système à asservir à partir de la Figure 14 et de la Figure 15, justifier un choix de correcteur à mettre en place dans la boucle d'asservissement.

Question 20) Proposer une méthode de réglage des paramètres du correcteur garantissant un fonctionnement optimal du système étudié.

Les réglages ayant été effectués, les réponses temporelles et fréquentielles sont données Figure 16 et Figure 17.

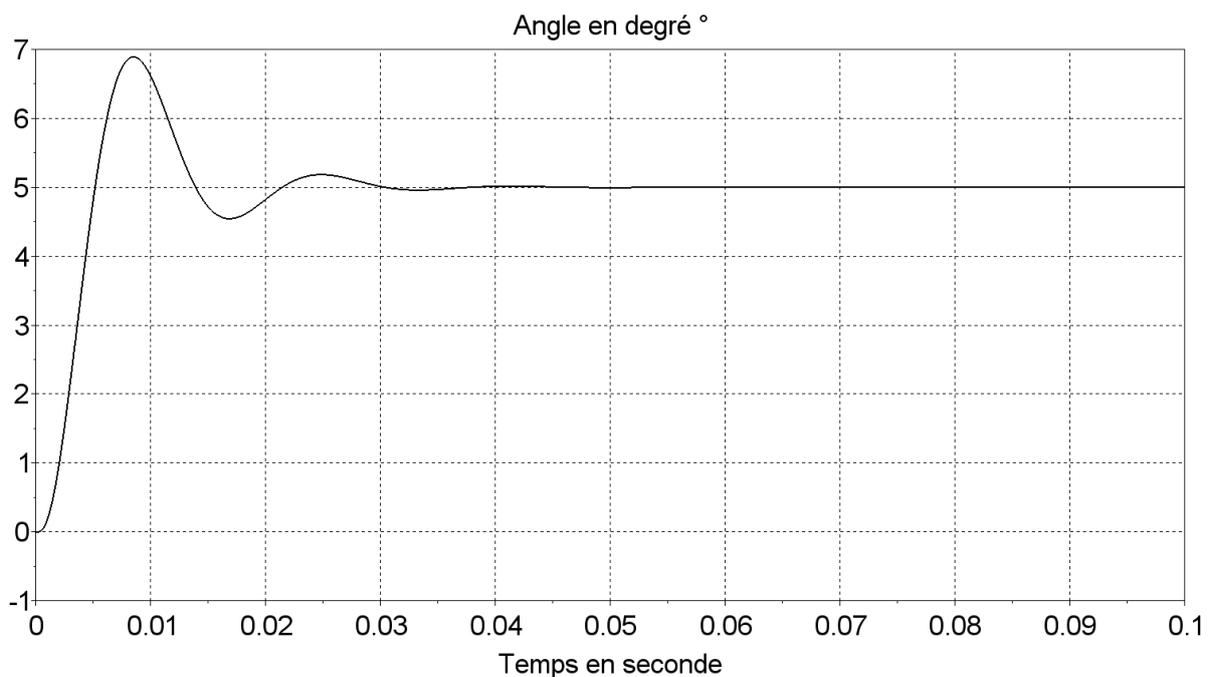


Figure 16 : réponse temporelle du système corrigé à un échelon de position de 5°

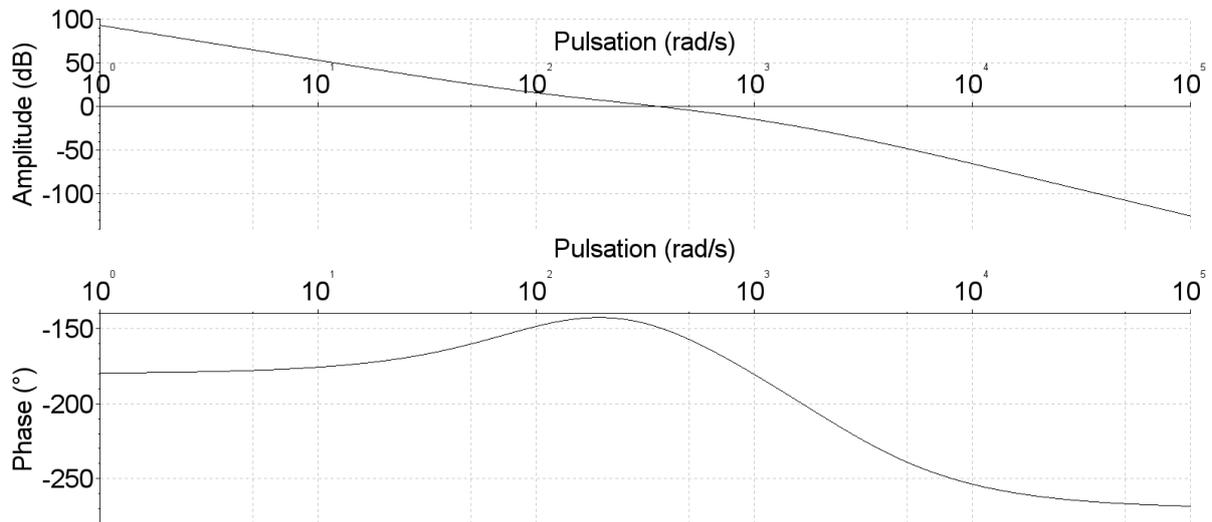


Figure 17 : diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte

Question 21) Conclure quant à l'objectif de la partie 2.

La mise en place d'une solution de motorisation pour effectuer un réglage du système de projection au plafond peut se transposer aisément au système de projection du sol qui est identique à celui du plafond.

Partie 3. Modélisation et optimisation du châssis porteur du miroir de projection

Le déplacement d'une personne sur la passerelle peut provoquer des désalignements des projections sur les murs. Il est alors proposé dans la suite de l'étude (parties 3 à 5) de s'intéresser aux châssis porteurs et aux solutions de réglage des systèmes de projection sur les côtés (mur à droite, mur au fond, mur à gauche).

L'objectif de cette partie est de modéliser le comportement du châssis porteur du miroir de projection sous l'influence du déplacement d'une personne sur la plateforme. Une fois la modélisation effectuée, il est proposé de mettre en place une démarche pour optimiser ce châssis et analyser les résultats de cette optimisation.

Les parties 3 à 5 sont indépendantes des parties 1 et 2. Les notations et numérotations des solides et points n'ont pas de relations avec ceux des parties précédentes.

Le mécanisme d'orientation est constitué de l'ensemble {châssis (1) + miroir (2)} utilisé pour la projection sur les murs, représenté sur la Figure 18 et le document technique DT1 .

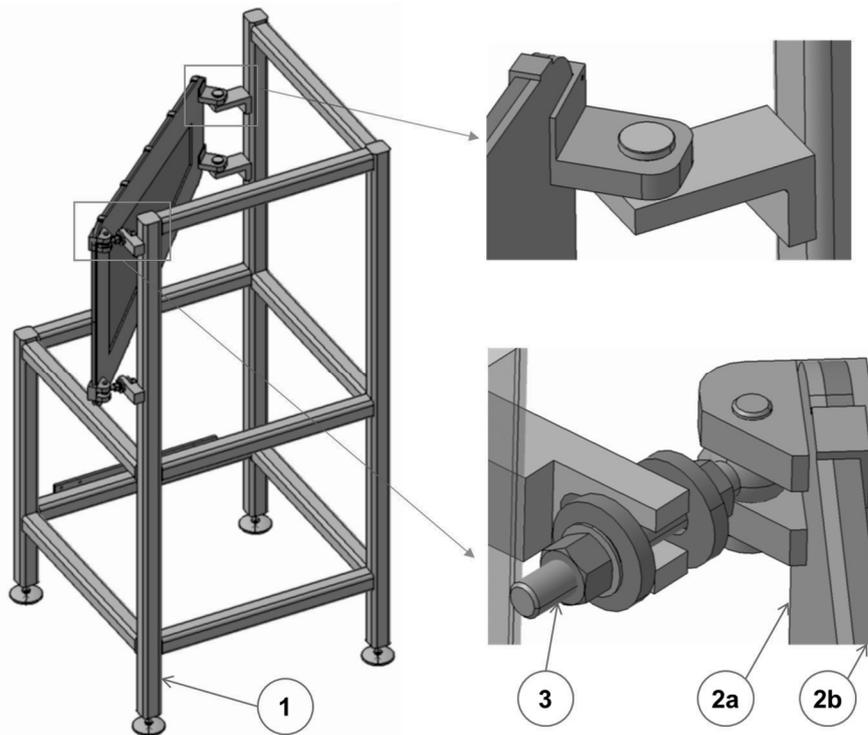


Figure 18 : mécanisme d'orientation des miroirs pour la projection sur les murs
 {(1) : châssis, (2) : miroir, (3) : éléments filetés}

Le châssis est en appui sur la passerelle aux points A_1 , A_2 , A_3 et A_4 définis sur le DT1. Il est également lié à une structure indépendante de la passerelle. Cette structure indépendante, notée (0) sur le DT1, supporte l'ensemble de l'environnement immersif aux points B_1 et B_2 . Cette structure (0) est considérée comme infiniment rigide devant celle du châssis (1).

Le miroir (2) est lié au châssis (1) d'un côté par l'intermédiaire de deux articulations en C_1 et C_2 et de l'autre côté par l'intermédiaire de deux articulations en E_1 et E_2 , reliées au châssis à l'aide d'éléments filetés (3) et (4) en D_1 et D_2 . Ces liaisons seront détaillées dans la partie 4.

Les personnes utilisant le CAVE peuvent se déplacer sur la passerelle selon la direction de l'axe \vec{y}_0 défini sur le document DT1. Ce déplacement engendre une action mécanique de la passerelle sur le châssis (1) en A_1 , A_2 , A_3 , A_4 qui se modélise par des charges notées $p(t)$, définies dans le Tableau 3, telles que :

$$p(t) = P \cdot \frac{n'}{S} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

avec :

- P , amplitude en N de la force provoquée par une personne marchant sur la passerelle ;
- f , fréquence de pas, supposée égale à la fréquence propre de la passerelle ;
- S , aire de la surface chargée en m^2 de la plateforme ;
- n' , nombre équivalent de piétons sur la surface chargée S où $n' = 10,8 \sqrt{\xi \cdot n}$;
- n , nombre de personnes sur la surface chargée S ;
- ξ , taux d'amortissement critique.

Direction	Selon \vec{x}_0	Selon \vec{y}_0	Selon \vec{z}_0
Amplitude	$P_{\text{Transversale}} = 35 \text{ N}$	$P_{\text{Longitudinale}} = 140 \text{ N}$	$P_{\text{Verticale}} = 280 \text{ N}$
Fréquence	$f = 1 \text{ Hz}$		
Nombre de personnes	$n = 4$		
Dimensions de la passerelle	Largeur = 2 m ; Longueur = 5,7 m		
Taux d'amortissement	$\xi = 0,40\%$		

Tableau 3 : caractérisation des charges $p(t)$

Afin de simplifier l'étude, il est supposé que les charges sont identiques en A_1, A_2, A_3, A_4 .

Le miroir sera considéré comme étant infiniment rigide.

Nous nous intéressons dans cette partie au châssis (1).

Question 22) Proposer un modèle pour les liaisons en A_1, A_2, A_3, A_4 entre la passerelle et le châssis ainsi qu'en B_1, B_2, C_1, C_2, D_1 et D_2 . Ecrire, dans la base $\{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ définie sur le DT1, les torseurs d'actions mécaniques modélisant les actions mécaniques extérieures qui agissent sur le châssis (1) en un point A_i (avec $i = 1, 2, 3$ ou 4).

On souhaite modéliser le châssis (1) en vue d'un calcul par éléments finis dans un contexte d'étude dynamique puis optimiser la géométrie du châssis selon la démarche décrite sur le document technique DR2.

Question 23) Proposer sur le document DR2 un type d'éléments ainsi qu'un type de maillage, qui permettra de déterminer les déplacements et les efforts aux points C_1, C_2, D_1 et D_2 . Proposer sur le document DR2 un modèle de conditions limites.

Question 24) Proposer sur le document réponse DR2 une fonction objectif, des variables de conception à optimiser et des contraintes pour l'optimisation du châssis.

Les documents DT2 et DT3 donnent les résultats partiels de la simulation des déplacements des points caractéristiques respectivement pour le châssis existant et pour le châssis optimisé aux instants où les déplacements sont maximum.

NB : les déplacements dC_2 et dD_2 sont respectivement identiques aux déplacements dC_1 et dD_1 .

Question 25) Commenter les résultats des simulations, conclure quant à la flexibilité du châssis.

Après avoir mis en place le modèle de comportement mécanique déformable du châssis, il est ensuite proposé de se concentrer sur la modélisation de la liaison entre le châssis et le miroir.

Partie 4. Modélisation des liaisons entre le châssis porteur et le miroir de projection

L'objectif de cette partie est de modéliser le comportement de la liaison entre le châssis porteur et le miroir de projection. Afin d'étudier dans la partie suivante l'influence sur la projection du déplacement d'une personne sur la passerelle, il sera nécessaire de prendre en compte les deux modélisations proposées dans les parties 3 et 4.

Nous nous intéressons dans cette partie aux liaisons entre le châssis (1) et le miroir (2) réalisées par les pièces filetées (3) (Figure 19).

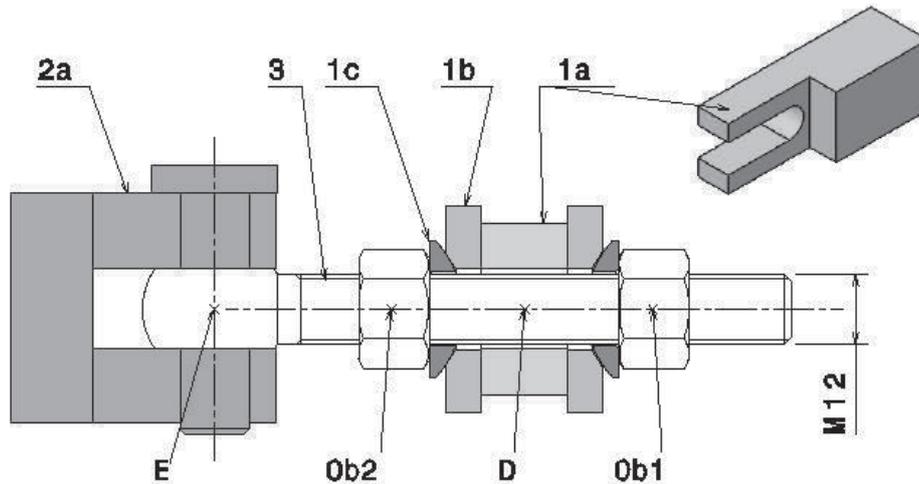


Figure 19 : liaison filetée entre le châssis et le miroir de projection sur les murs

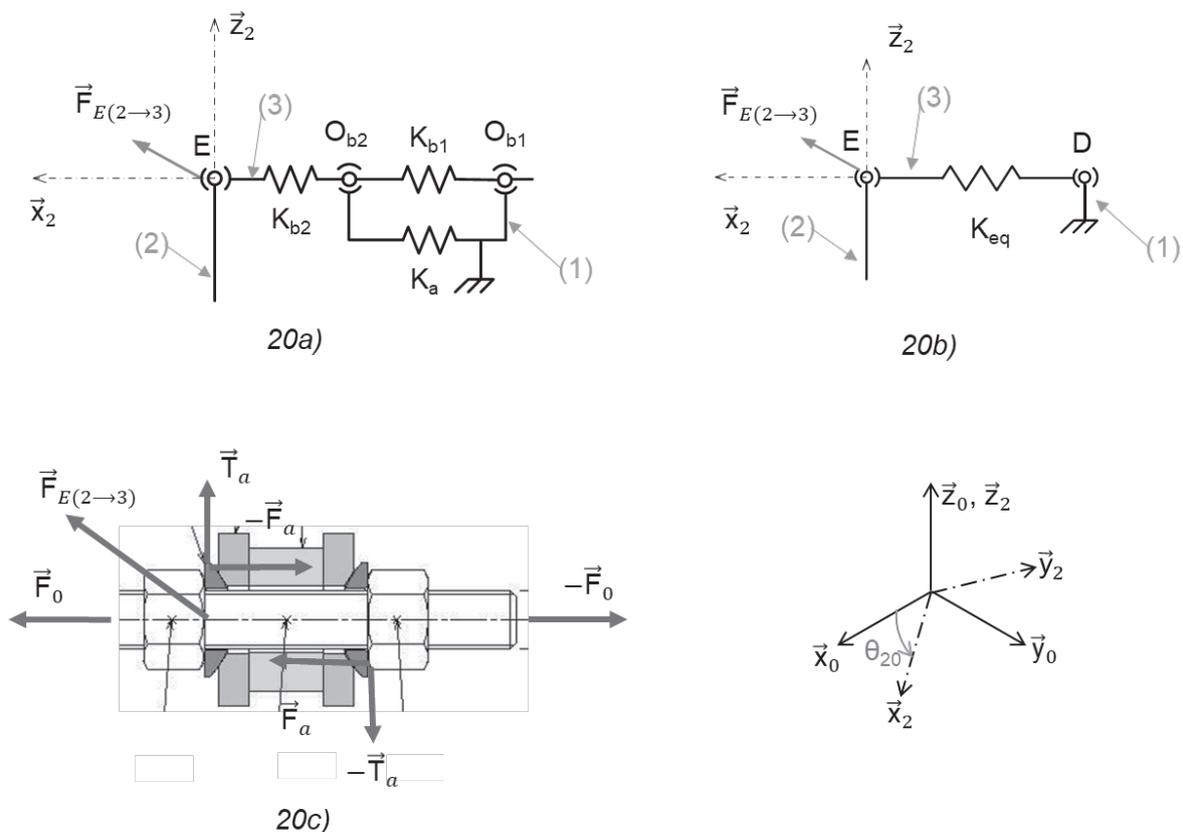


Figure 20 : modélisation mécanique de la liaison filetée
 20a) modélisation globale ; 20b) liaison équivalente ; 20c) modélisation des efforts dans une liaison filetée.

On notera :

- d_{eq} : le diamètre équivalent de la section résistante de la vis (3) ;
- $1_a, 1_b, 1_c$: l'indice correspondant aux pièces assemblées ;
- $d_{i1a}, d_{i1b}, d_{i1c}$: les diamètres intérieurs des pièces assemblées ;
- $d_{e1a}, d_{e1b}, d_{e1c}$: les diamètres extérieurs des pièces assemblées ;
- L_{1a}, L_{1b}, L_{1c} : les épaisseurs des pièces assemblées ;
- E_b : le module d'élasticité longitudinal de la vis (3) ;
- E_a : le module d'élasticité longitudinal des pièces assemblées $1_a, 1_b$ et 1_c .
- $\vec{F}_{E(2 \rightarrow 3)}$: l'effort extérieur exercé sur la vis ;
- T_a : l'effort tangentiel extérieur appliqué à l'assemblage $\{1_a + 1_b + 1_c\}$, avec $T_a = \vec{F}_{E(2 \rightarrow 3)} \cdot \vec{Z}_2$;
- F_a : l'effort axial extérieur appliqué à l'assemblage $\{1_a + 1_b + 1_c\}$;
- F_0 : l'effort appliqué sur la vis (3) lors du serrage des écrous, la norme *NF 25-030-1* préconise pour le filetage choisi un effort de serrage minimum $F_{0min} = 6998 \text{ N}$;
- K_a : raideur de l'ensemble des pièces assemblées ;
- K_{b1} et K_{b2} : raideurs de la vis ;
- δ : l'allongement des pièces assemblées ;
- $\Phi = 0,2$: le coefficient de frottement entre les pièces assemblées ;
- N_b : l'effort de traction subit par la vis, avec $N_b = F_0 + K_{b1} \cdot \delta$;
- N_a : l'effort de traction subit par les pièces assemblées, avec $N_a = \frac{T_a}{\Phi} + F_a = F_0 - K_a \cdot \delta$.

Caractéristiques des liaisons filetées :

<i>Caractéristiques de la vis (3)</i>	
E_b	210 000 MPa
d_{eq}	10,358 mm
$O_{b1} O_{b2}$	44 mm
$E O_{b2}$	30 mm

<i>Caractéristiques des pièces assemblées</i>			
E_a	210 000 MPa		
d_{e1a}	29 mm	L_{1a}	15 mm
d_{e1b}	20 mm	L_{1b}	6 mm
d_{e1c}	20 mm	L_{1c}	3mm
d_{i1a}	14 mm		
d_{i1b}	14 mm		
d_{i1c}	14 mm		

Question 26) Justifier le modèle proposé sur la Figure 20 : modélisation mécanique de la liaison fileté.

Question 27) Déterminer les expressions des raideurs K_{b1} et K_{b2} de la vis en fonction des paramètres géométriques et des caractéristiques des matériaux donnés ci-dessus. Proposer une valeur approchée de la raideur K_a de l'ensemble des pièces assemblées.

On cherche à évaluer le non-décollement entre les pièces assemblées du châssis (1) et l'assemblage fileté (3) à partir de la modélisation proposée.

Les résultats de la simulation ont montré que les efforts $\vec{F}_{E(2 \rightarrow 3)}$ en E1 et E2 peuvent être considérés comme constants avec: $\vec{F}_{E(2 \rightarrow 3)} = 21 \vec{x}_2 + 87,5 \vec{z}_2$ (efforts en N).

On prendra comme valeurs pour les raideurs :

$K_{b1} = 402 \text{ kN}\cdot\text{mm}^{-1}$	$K_{b2} = 590 \text{ kN}\cdot\text{mm}^{-1}$	$K_a = 1\,402 \text{ kN}\cdot\text{mm}^{-1}$
--	--	--

Question 28) Après avoir isolé une pièce d'assemblage, établir une relation liant F_0 , T_a , F_a , $F_{E(2 \rightarrow 3)}$, K_a , K_{b1} et Φ .

Question 29) Proposer, à partir de la relation précédente, une condition de non décollement dans les liaisons filetés. Conclure quant au risque de décollement.

Question 30) Déterminer la valeur de la raideur équivalente K_{eq} de la liaison entre le châssis (1) et le miroir (2) (figure 20b)).

Partie 5. Évaluation de l'influence du déplacement de personnes sur le positionnement des miroirs de projection.

L'objectif de cette partie est d'évaluer les performances du système de positionnement des miroirs de projection sur les murs lors du déplacement d'une personne sur la passerelle.

Nous nous intéressons dans cette partie à l'ensemble S constitué du châssis (1) et du miroir (2) définis sur la Figure 18 et le document DT1. Les axes et repères sont définis sur le document DT1.

On considérera dans cette partie que :

- le châssis (1) est infiniment rigide (hypothèse H1) ;
- le châssis peut pivoter autour de l'axe (O_1, \vec{x}_0) par rapport au repère R_0 (hypothèse H2) ;
- le point O_1 reste fixe (hypothèse H3) ;
- le miroir est infiniment rigide (hypothèse H4) ;
- le miroir peut pivoter autour de l'axe (O_2, \vec{z}_1) par rapport au châssis (1) (hypothèse H5) ;
- la liaison fileté (3) est assimilée à un ressort sans masse de raideur K_{eq} (hypothèse H6) ;
- les quatre pieds du châssis restent en permanence en contact avec le sol de la passerelle aux points A_1 , A_2 , A_3 et A_4 (hypothèse H7).

On notera :

$$\bullet \left\{ \delta_{(10)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{d\theta_{(10)}} = d\theta_{10x} \cdot \vec{x}_0 \\ \overrightarrow{dU_{(M1 \in 1/0)}} = dU_{M1,10x} \cdot \vec{x}_0 + dU_{M1,10y} \cdot \vec{y}_0 + dU_{M1,10z} \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{R_0}$$

le torseur des petits déplacements d'un point M_1 du châssis (1) dans son mouvement par rapport au repère R_0 ;

$$\bullet \left\{ \delta_{(20)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{d\theta_{(20)}} = d\theta_{20x} \cdot \vec{x}_0 + d\theta_{20y} \cdot \vec{y}_0 + d\theta_{20z} \cdot \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{dU_{(M2 \in 2/0)}} = dU_{M2,20x} \cdot \vec{x}_0 + dU_{M2,20y} \cdot \vec{y}_0 + dU_{M2,20z} \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{R_0}$$

le torseur des petits déplacements d'un point M_2 du miroir (2) dans son mouvement par rapport au repère R_0 ;

$$\bullet \left\{ \delta_{(21)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{d\theta_{(21)}} = d\theta_{21z} \cdot \vec{z}_1 \\ \overrightarrow{dU_{(Ci \in 2/1)}} = \vec{0} \end{array} \right\}_{R_1}$$

le torseur des petits déplacements d'un point C_i (C_1 ou C_2) du miroir (2) dans son mouvement par rapport à la châssis (1) dans le repère $R_1 = \{O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1\}$.

$$\bullet \left\{ \delta_{(2/1)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{d\theta_{(21)}} = d\theta_{21z} \cdot \vec{z}_1 \\ \overrightarrow{dU_{(Ei \in 2/1)}} = dU_{Ei,21x} \cdot \vec{x}_1 \end{array} \right\}_{R_1}$$

le torseur des petits déplacements d'un point E_i (E_1 ou E_2) du miroir (2) dans son mouvement par rapport à la châssis (1) dans le repère R_1 .

On donne les caractéristiques du **châssis (1)** ainsi que de l'ensemble **{miroir + support miroir} (2)** :

Châssis (1)	Ensemble {miroir + support miroir} (2)
Masse : $M_1 = 222 \text{ kg}$	Masse : $M_2 = 35 \text{ kg}$
Inerties en G_1 dans le repère R_1 (en kg.m^2): $J_{1/G_1} = \begin{bmatrix} J_{1xx} & -J_{1xy} & -J_{1xz} \\ -J_{1xy} & J_{1yy} & -J_{1yz} \\ -J_{1xz} & -J_{1yz} & J_{1zz} \end{bmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1}$ $J_{1/G_1} = \begin{bmatrix} 130 & -2 & 5 \\ -2 & 128 & -6 \\ 5 & -6 & 74 \end{bmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1}$	Inerties en G_2 dans le repère R_1 (en kg.m^2): $J_{2/G_2} = \begin{bmatrix} J_{2xx} & -J_{2xy} & -J_{2xz} \\ -J_{2xy} & J_{2yy} & -J_{2yz} \\ -J_{2xz} & -J_{2yz} & J_{2zz} \end{bmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1}$ $J_{2/G_2} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1}$

Question 31) Déterminer l'énergie cinétique $T(S/0)$ de l'ensemble S constitué du châssis (1) et du miroir (2) par rapport au repère R_0 en fonction des paramètres définis ci-dessus et des paramètres géométriques, masses et inerties données dans le document technique DT1.

Question 32) Donner, sans développer, les puissances associées aux actions mécaniques extérieures s'exerçant sur l'ensemble S et les puissances intérieures.

Question 33) Proposer une méthode permettant de déterminer le vecteur déplacement $\overrightarrow{dU_{(M2 \in 2/0)}}$ d'un point M_2 du miroir. Préciser les principales étapes de la résolution.

La Figure 21 donne les résultats de la question précédente qui ont permis de déterminer les déplacements angulaires θ_{10} et θ_{21} .

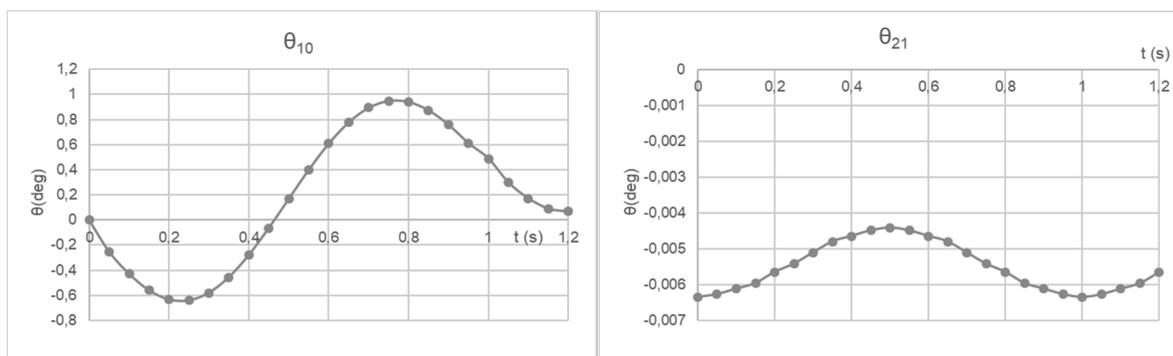


Figure 21 : résultats des déplacements angulaires θ_{10} et θ_{21} .

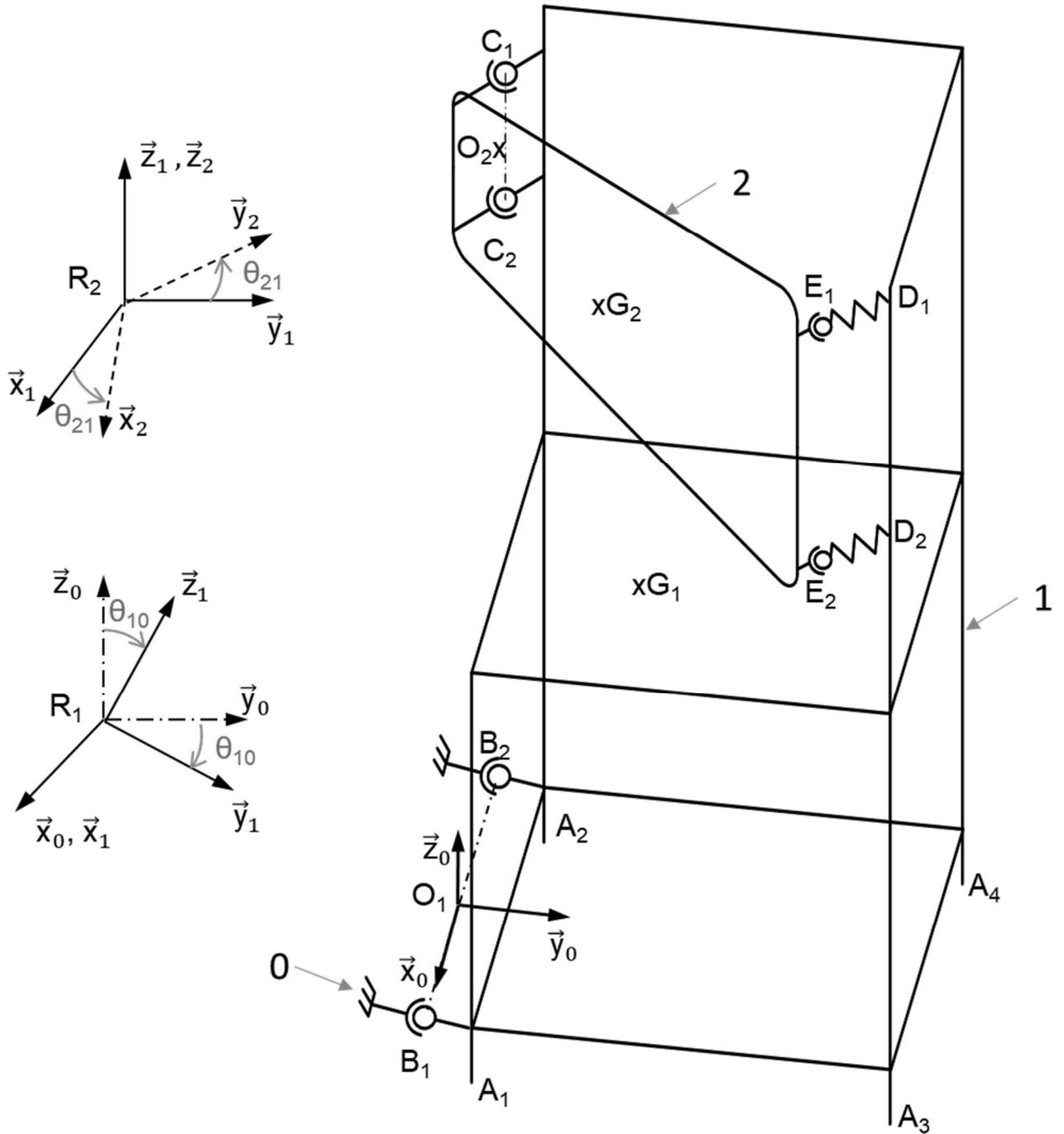
Question 34) Déterminer à partir des résultats précédents et du document DT3 le déplacement du point E_1 (point ayant le plus grand déplacement).

Question 35) En admettant que $d\beta = d\theta_{20z}$ et que $dL_1 = dU_{E1x}$, discuter, à partir des résultats précédents et de la Figure 6 de l'influence du déplacement d'une personne sur la passerelle sur le désalignement des images au sein de l'environnement immersif.

Partie 6. Synthèse de l'étude proposée

Question 36) Après avoir rappelé les exigences vérifiées dans le sujet, proposer une synthèse de la démarche mise en œuvre au cours de l'étude proposée en vous appuyant sur le formalisme proposé au sein du document réponse 3. Préciser les critères qui ont été améliorés.

Document DT1 : Schématisation et caractéristiques de l'ensemble {châssis (1) + miroir (2)} de projection sur les murs :



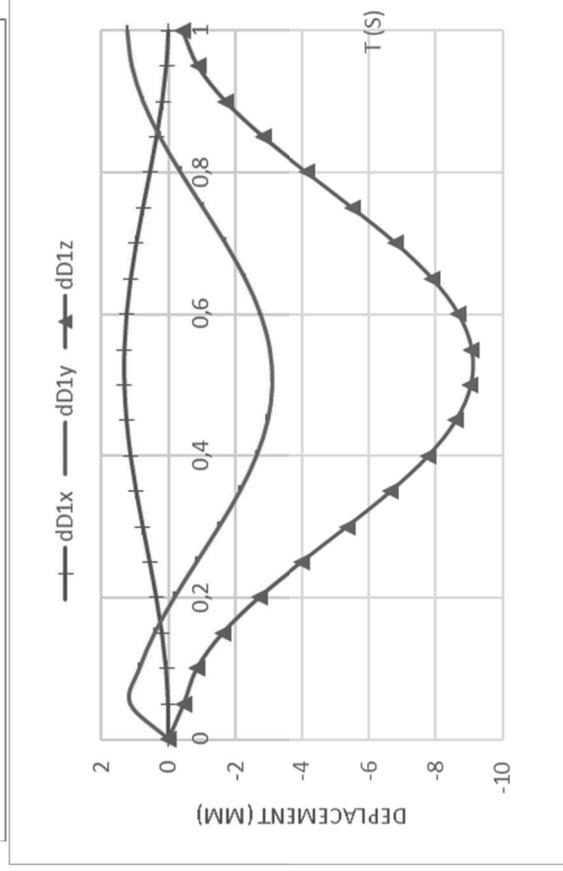
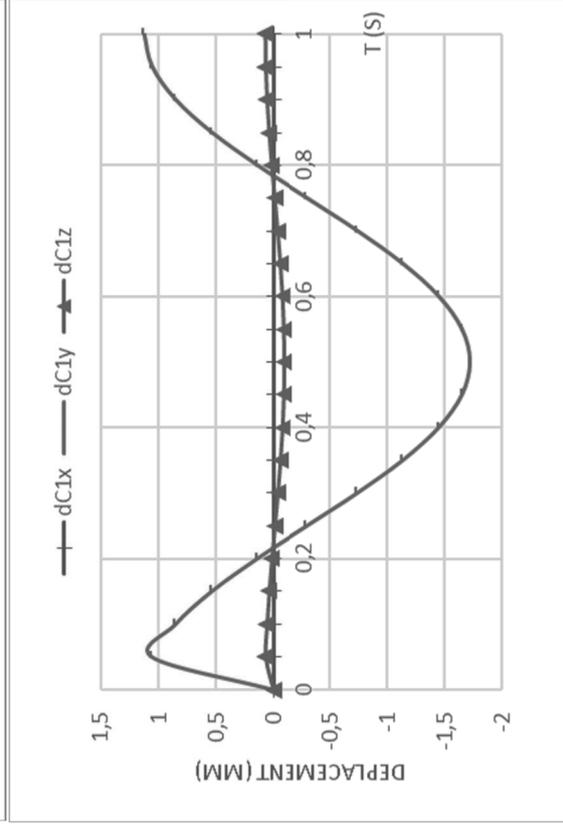
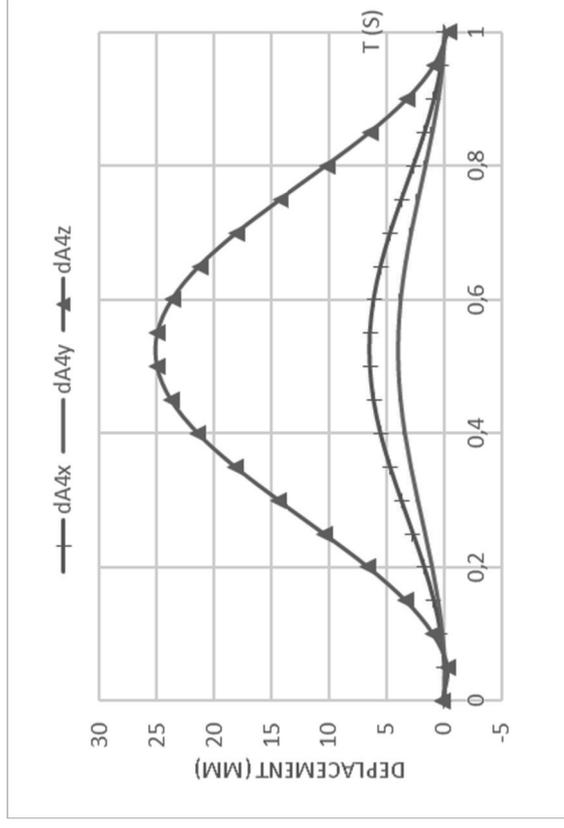
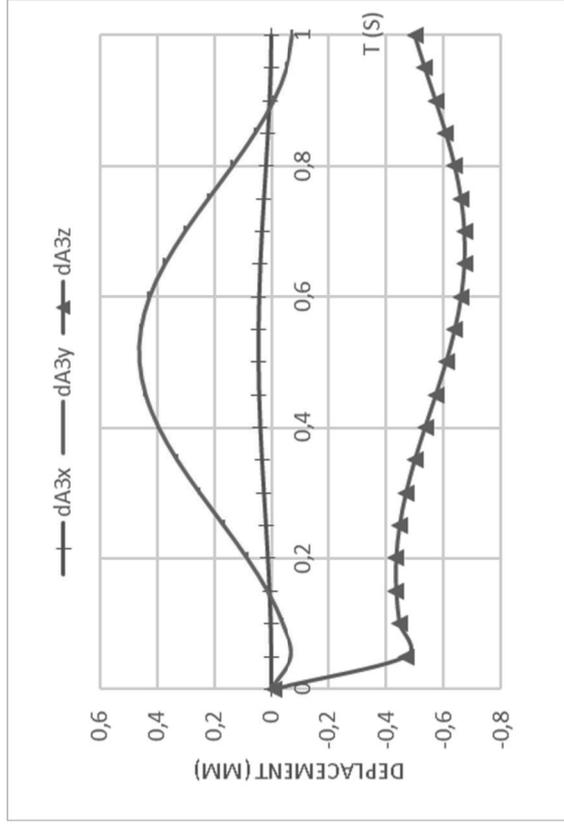
Accélération de la pesanteur : $\vec{g} = g \cdot \vec{z}_0$

Positions des points définis dans le repère R_0 (distances en m) :

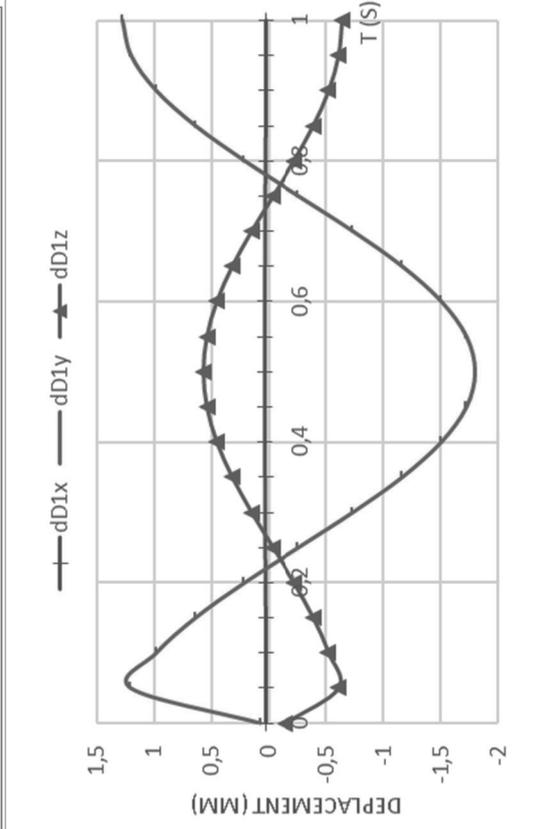
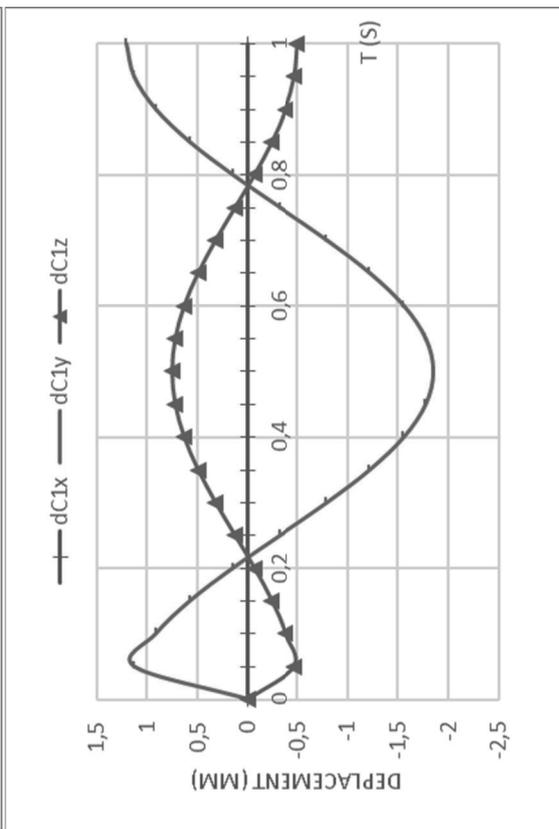
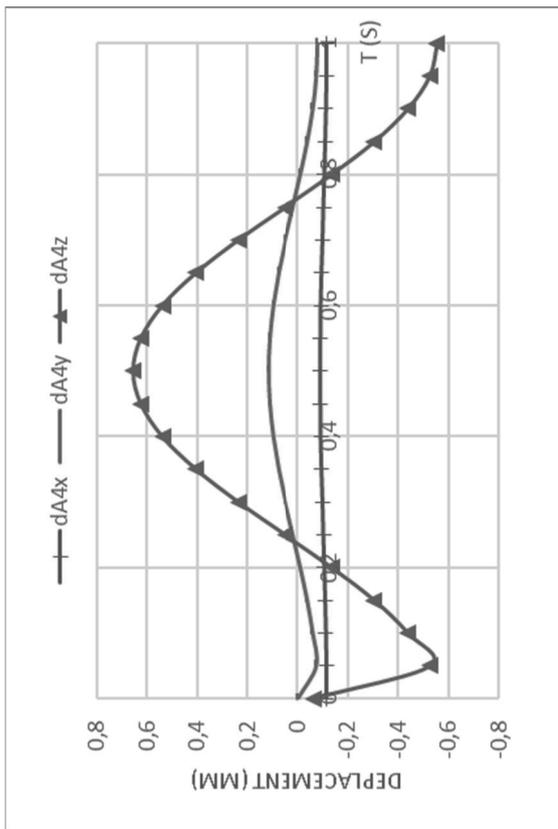
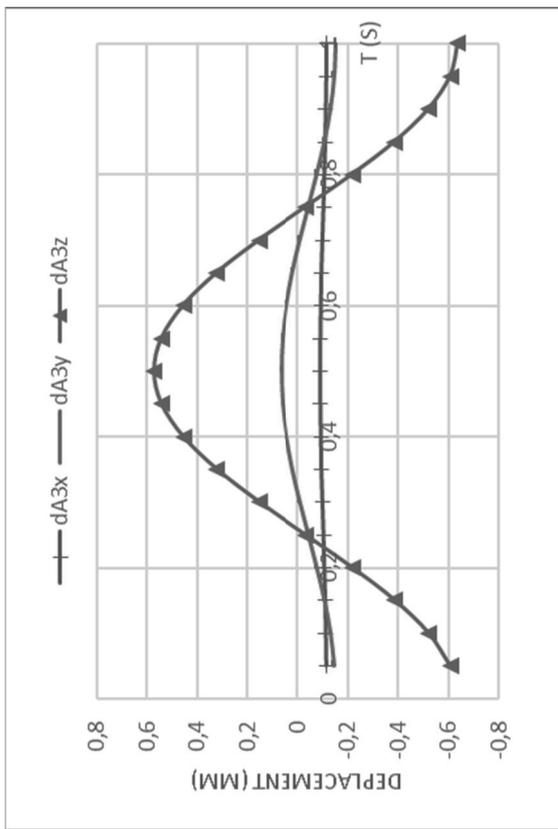
	X ₀	Y ₀	Z ₀
O1G1	-0,035	0,346	0,611
O1A3	0,32	0,64	-0,1
O1A4	-0,32	0,64	-0,1
O1D1	0,32	0,64	1,57
O1D2	0,32	0,64	1,17
O1O2	-0,276	-0,099	1,37

	X ₀	Y ₀	Z ₀
O2G2	0,351	0,323	-0,197
O2C1	0	0	0,1
O2C2	0	0	-0,1
O2E1	0,596	0,634	0,2
O2E2	0,596	0,634	-0,2

Document DT2 : résultats des simulations du **modèle existant**, déplacements des points A_3 , A_4 , C_1 et D_1 dans la base $\{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$.



Document DT3 : résultats des simulations du **modèle optimisé**, déplacements des points A_3, A_4, C_1 et D_1 dans la base $\{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$.



Tournez la page S.V.P.

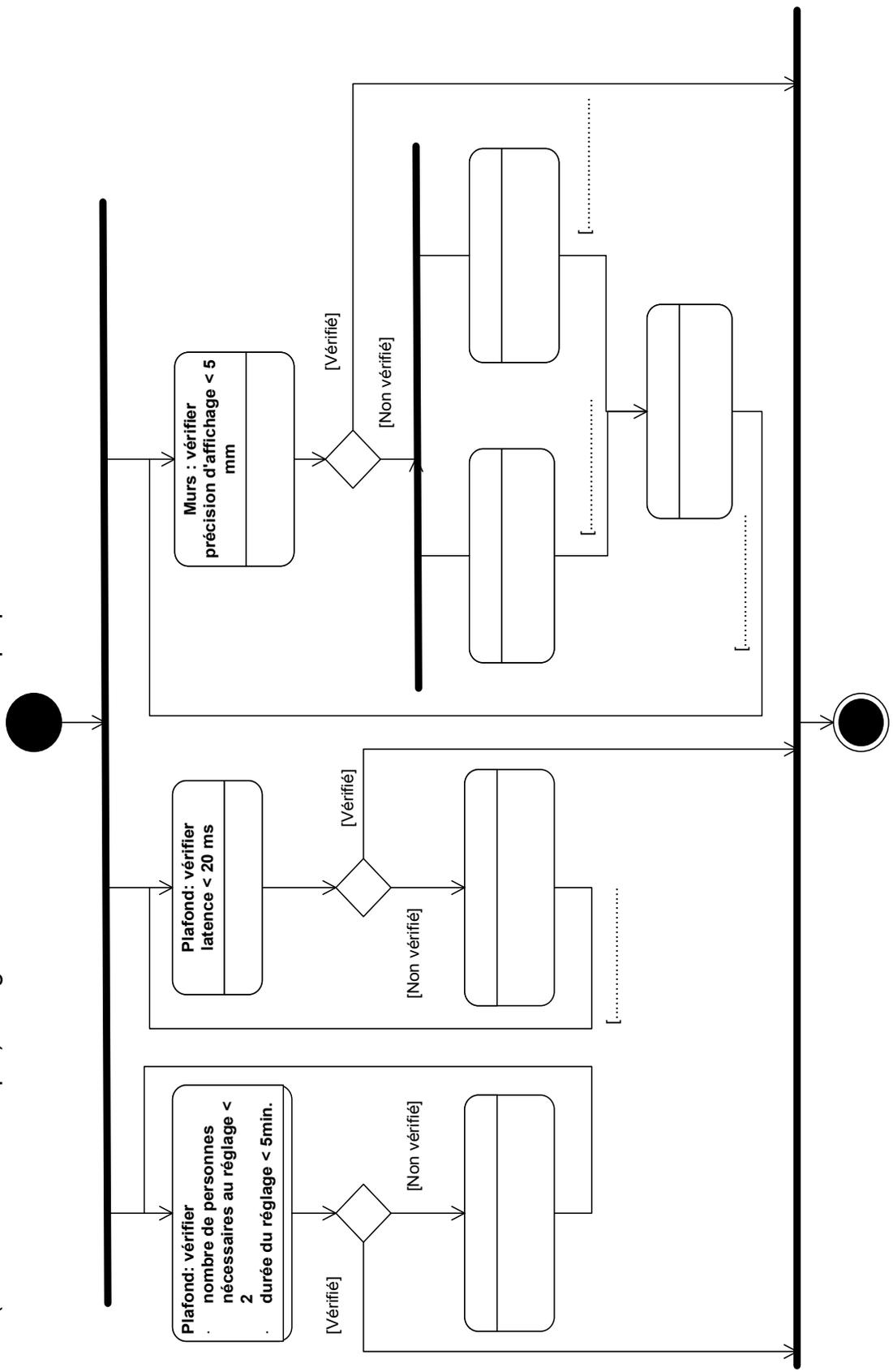
INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

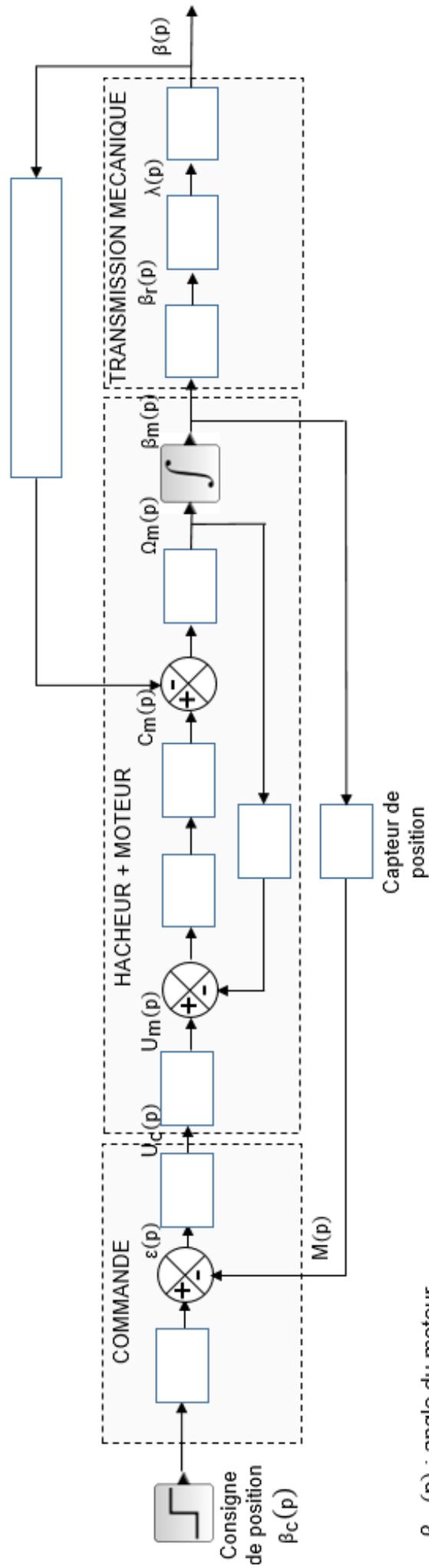
Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAE	1414A	102	2680

Document DR3 (à rendre avec la copie) : diagramme d'activité de l'étude proposée



NE RIEN ECRIRE DANS CE CADRE

Document DR1 (à rendre avec la copie) : schéma-bloc d'asservissement



- $\beta_m(p)$: angle du moteur
- $\beta_r(p)$: angle du réducteur
- $\lambda(p)$: déplacement de la tige du vérin
- $\beta(p)$: Angle d'orientation du miroir

Tournez la page S.V.P.

Document DR2 (à rendre avec la copie) : démarche pour le calcul par éléments finis et l'optimisation du châssis

