

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT
D'INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE



**ÉPREUVE OBLIGATOIRE À OPTION DE
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR**

Durée : 4 heures

Coefficient : 3

Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde recto
- 1 page d'instructions recto-verso pour remplir le QCM (*à lire très attentivement*)
- 1 page d'avertissements recto
- 30 pages de texte questions recto-verso

**TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)**

**ÉPREUVE OBLIGATOIRE A OPTION DE
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR****A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT**

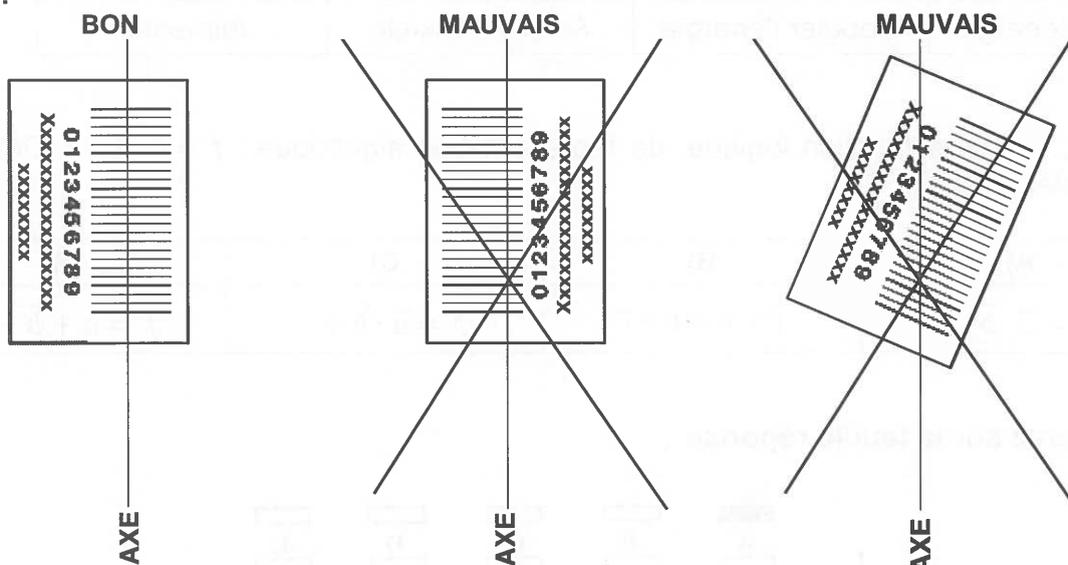
L'épreuve de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

- 1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez**, c'est-à-dire « Epreuve obligatoire à option de sciences industrielles pour l'ingénieur ».

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, positionner celle-ci en **position verticale** avec les chiffres d'identification à **gauche** (le trait vertical devant traverser la totalité des barres de ce code).

EXEMPLES :

- 2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un **STYLO BILLE** ou une **POINTE FEUTRE** de couleur **NOIRE**.
- 3) Utilisez le sujet comme brouillon (ou les feuilles de brouillons qui vous sont fournies à la demande par la surveillante qui s'occupe de votre rangée) et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.
- 4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.
- 5) Cette épreuve comporte 50 questions obligatoires, **certaines de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée sur la page d'avertissements.**

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes

Tournez la page S.V.P.

6) À chaque question numérotée entre 1 et 50, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 51 à 100 seront neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.

Pour chaque ligne numérotée de 01 à 50, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

- ▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question :
la ligne correspondante doit rester vierge.
- ▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse :
vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.
- ▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes :
vous devez noircir deux des cases A, B, C, D **et deux seulement**.
- ▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne :
vous devez alors noircir la case E.

Attention, toute réponse fautive peut entraîner pour la question correspondante une pénalité dans la note.

7) Exemples de réponses

Question 1. Dans une chaîne d'énergie, quel est le rôle d'un moteur électrique ?

A)	B)	C)	D)
Convertir l'énergie	Moduler l'énergie	Adapter l'énergie	Alimenter

Question 2. Soit f la fonction logique, de représentation algébrique : $f = a \cdot b \cdot \bar{c}$. Déterminer le complément de f .

A)	B)	C)	D)
$\bar{f} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c$	$\bar{f} = a + b + \bar{c}$	$\bar{f} = \bar{a} \cdot \bar{b} + c$	$\bar{f} = a + \bar{b} + c$

Vous cocherez sur la feuille réponse :

1	<input checked="" type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input type="checkbox"/> E
2	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> B	<input type="checkbox"/> C	<input type="checkbox"/> D	<input checked="" type="checkbox"/> E

AVERTISSEMENTS

Les questions suivantes sont liées :

Partie A :

Questions 2, 3

Questions 4, 7, 9

Questions 12, 13

Partie B :

Questions 15 à 17

Questions 22, 23

Questions 28 à 30

Questions 35 à 38

Partie C :

Questions 44, 49, 50

Questions 47, 48, 50

ROBOT ASSISTANT « EFFIBOT »



Le sujet porte sur l'étude du robot assistant : « Effibot ». Ce robot est un robot d'aide à la personne permettant de transporter des charges lourdes. Il est actuellement développé par la société française Effidence. Cette société développe ce robot afin de répondre au plus près au besoin des utilisateurs en proposant différentes évolutions des modèles disponibles.

Le principe du fonctionnement d'« Effibot » est relativement simple. L'utilisateur se place devant le robot qui le repère, à l'aide de différents capteurs et d'un traitement des informations. Le robot Effibot suit alors à une distance constante l'utilisateur.

Des sociétés, telles que la SNCF, travaillent en partenariat avec Effidence pour développer « Effibot » afin de permettre aux usagers de transporter leurs bagages.



Ce système se développe également en partenariat avec des sociétés de BTP, de logistique ou même La Poste. Son développement se fait également à l'international avec notamment Deutsch Post (La poste allemande) pour permettre au facteur de livrer dans les villes les différents colis en réduisant la pénibilité du transport.

D'autres domaines d'activités sont intéressés par ce robot, comme le secteur agricole et militaire où les charges à transporter peuvent également être importantes.

PRÉSENTATION ET PLAN DE L'ÉTUDE

Le robot Effibot est contrôlé par un système de commande et de navigation appelé Effinav. Ce système de commande est le cœur du savoir-faire de l'entreprise Effidence. La complexité de ce système Effinav réside dans sa capacité à gérer plusieurs sources d'informations de différents capteurs, d'en faire une synthèse et enfin d'établir la commande des différents moteurs permettant de mouvoir le système. Afin de respecter au mieux l'exigence de suivi d'une personne différents points vont donc être étudiés dans ce sujet :

Dans la partie A, nous étudierons une modélisation de l'asservissement de suivi d'une personne dans un cas simplifié et vérifierons les performances atteintes par le système. L'étude se fera pour un suivi de personne en ligne droite supposée parfaitement horizontale.

Dans la partie B, nous nous intéresserons au système de direction à quatre roues directrices de « l'Effibot ». L'étude géométrique et cinématique de ce système sera faite. Nous attacherons ensuite à estimer deux grandeurs influentes dans le choix de la motorisation du système de direction et dépendantes directement des caractéristiques de « l'Effibot » lui-même ; à savoir l'inertie équivalente du système et le couple résistant dû aux frottements des pneus au sol.

Dans la dernière partie, nous chercherons à évaluer quelle peut être la hauteur maximale (en fonction de son poids) d'un colis que l'on transporterait avec l'Effibot sans risquer un basculement de l'ensemble {robot et charge} lors d'une phase de virage.

PARTIE A ASSERVISSEMENT DE SUIVI DE PERSONNE

Le schéma-blocs fonctionnel du système d'asservissement de suivi d'une personne est présenté sur la figure suivante. On suppose que la charge est équirépartie sur chacune des roues et que le déplacement se fait en ligne droite parfaitement horizontale.

Le déplacement de « l'Effibot » est assuré par 4 roues-moteurs. Chacune des roues peut donc avoir un comportement qui lui est propre. Puisque l'étude s'effectue en ligne droite parfaitement horizontale et que la charge est équirépartie, on suppose alors un comportement équivalent pour chacune d'entre elle. L'inertie équivalente ramenée sur chacune des roues-moteurs est donc égale. Ce qui nous amène à étudier l'asservissement sous cette forme :

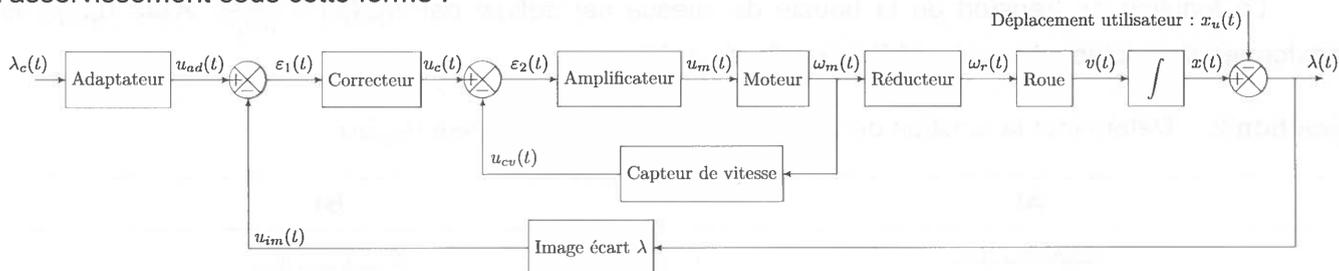


Figure 1 : Schéma-blocs fonctionnel de l'asservissement de l'Effibot

- λ_c est la consigne d'écart (en m) que l'on veut maintenir entre l'utilisateur et « l'Effibot »
- λ est la valeur d'écart (en m) entre l'utilisateur et « l'Effibot »
- L'adaptateur est un gain pur : K_{ad} (en $V \cdot m^{-1}$) permettant d'adapter la consigne d'écart en tension de commande
- Le capteur « Image écart λ » renvoie une tension image de l'écart réel entre l'utilisateur et le système, celui est modélisé par un gain pur K_{im} (en $V \cdot m^{-1}$). Cette information est en réalité issue des différents capteurs du robot et traité par le module « Effinav ».
- L'amplificateur est modélisé par un gain pur : K_{am}
- Le capteur de vitesse est modélisé par un gain pur : K_{cv} (en $V \cdot s \cdot rad^{-1}$)
- Le réducteur est modélisé par un gain pur : K_r
- La roue de « l'Effibot » a un rayon R_r (en m)
- Le correcteur, l'amplificateur et le moteur sont modélisés dans la suite du sujet
- Le déplacement utilisateur $x_u(t)$ est modélisé par une rampe de pente $a = 1,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Il sera vu comme une perturbation du système.

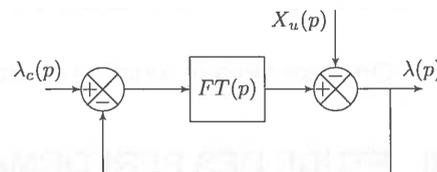
I MODELISATION DES BLOCS

Objectifs

Déterminer les fonctions de transfert de l'adaptateur et de l'amplificateur

1. Modèle de l'adaptateur

On souhaite pouvoir modéliser l'asservissement du système par le schéma-blocs ci-contre :



Avec $\lambda_c(p)$, $\lambda(p)$ et $X_u(p)$ les transformées de Laplace de $\lambda_c(t)$, $\lambda(t)$ et $x_u(t)$.

Question 1. Quelle condition doit alors être vérifiée par K_{ad} ?

A)	B)	C)	D)
$K_{ad} = \frac{1}{2} K_{im}$	$K_{ad} = \frac{1}{K_{im}}$	$K_{ad}^2 = K_{im}$	$K_{ad} = 1$

2. Modèle du moteur

Le moteur permettant la mise en rotation d'une roue est un moteur brushless DC 48 V. On peut alors le modéliser par un moteur à courant continu.

La fonction de transfert du moteur peut alors se mettre sous la forme d'une fonction de transfert du second ordre de gain K_{mot} , de facteur d'amortissement ξ_{mot} et de pulsation propre ω_{mot} .

3. Modèle de l'amplificateur de la boucle de vitesse

La fonction de transfert de la boucle de vitesse est définie par $H_{bv}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_c(p)}$. Avec $\Omega_m(p)$ la transformée de Laplace de $\omega_m(t)$ et $U_c(p)$ celle de $u_c(t)$.

Question 2. Déterminer la fonction de transfert de la boucle de vitesse $H_{bv}(p)$.

A)
$1 + \frac{\frac{K_{am}K_{mot}K_{cv}}{1+K_{am}K_{mot}K_{cv}}}{\omega_{mot}(1+K_{am}K_{mot}K_{cv})} p + \frac{p^2}{\omega_{mot}^2(1+K_{am}K_{mot}K_{cv})}$

B)
$1 + \frac{2\xi_{mot}}{\omega_{mot}} p + \frac{p^2}{\omega_{mot}^2}$

C)
$1 + \frac{\frac{K_{am}K_{mot}}{1+K_{am}K_{mot}K_{cv}}}{\omega_{mot}(1+K_{am}K_{mot}K_{cv})} p + \frac{p^2}{\omega_{mot}^2(1+K_{am}K_{mot}K_{cv})}$

D)
$1 + \frac{\frac{K_{am}K_{mot}}{K_{cv}}}{\omega_{mot}} p + \frac{p^2}{\omega_{mot}^2}$

Question 3. Déterminer la valeur de K_{am} permettant d'obtenir un temps de réponse minimal de la boucle de vitesse.

A)
$K_{am} = (\xi_{mot}^2 + 1) \times \frac{1}{K_{cv}K_{mot}}$

B)
$K_{am} = \left(\frac{\xi_{mot}^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} - 1\right) \times \frac{1}{K_{cv}K_{mot}}$

C)
$K_{am} = \left(\frac{\xi_{mot}^2}{0.69^2} + 1\right) \times \frac{1}{K_{cv}K_{mot}}$

D)
$K_{am} = \left(\frac{\xi_{mot}^2}{0.69^2} - 1\right) \times \frac{1}{K_{cv}K_{mot}}$

On pose alors la fonction de transfert de la boucle de vitesse : $H_{bv}(p) = \frac{K_{bv}}{1 + \frac{2\xi_{bv}}{\omega_{bv}} p + \frac{p^2}{\omega_{bv}^2}}$

II ETUDE DES PERFORMANCES DE L'ASSERVISSEMENT

_____ Objectifs _____

Mettre en place une stratégie de recherche de correcteur afin de valider le cahier des charges du système.

Le cahier des charges concernant les performances de l'asservissement est donné ci-dessous :

Exigence	Critères	Niveaux
Suivre un utilisateur à une distance imposée	Stabilité	$MG \geq 10\text{dB}$ en boucle ouverte
		$M\varphi = 45^\circ$ en boucle ouverte
	Précision	Erreur statique nulle lors d'un déplacement de l'utilisateur $\lambda(t \rightarrow +\infty) = \lambda_c$
	Rapidité	$\omega_{0db} \geq 35 \text{ rad. s}^{-1}$ de la boucle ouverte

Pour rappel, dans notre étude, le déplacement de l'utilisateur $x_u(t)$ est modélisé par une rampe de pente a . La consigne d'écart $\lambda_c(t)$ entre l'utilisateur et « l'Effibot » est un échelon d'amplitude $\lambda_0 = 1\text{m}$.

D'après les différentes hypothèses et modélisations réalisées précédemment, le schéma-blocs de l'asservissement en écart de « l'Effibot » est alors le suivant :

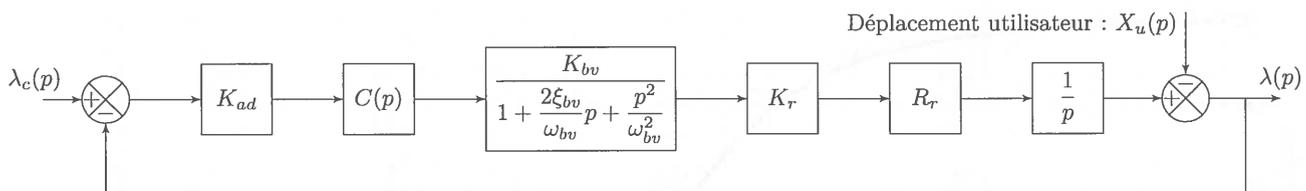


Figure 2 : Schéma-blocs de l'asservissement de l'Effibot

Avec $C(p)$ la fonction de transfert du correcteur

Question 4. Donner la fonction de transfert en boucle ouverte $FTBO(p)$

A)	B)	C)	D)
$\frac{C(p)K_{bv}K_rR_r}{\left(1 + \frac{2\xi_{bv}}{\omega_{bv}}p + \frac{p^2}{\omega_{bv}^2}\right)p}$	$\frac{C(p)K_{ad}K_{bv}K_rR_r}{\left(1 + \frac{2\xi_{bv}}{\omega_{bv}}p + \frac{p^2}{\omega_{bv}^2}\right)p}$	$\frac{1}{1 + p + \frac{2\xi_{bv}}{\omega_{bv}}p^2 + \frac{p^3}{\omega_{bv}^2}}$	$\frac{K_{bv}\left(1 + \frac{2\xi_{bv}}{\omega_{bv}}p + \frac{p^2}{\omega_{bv}^2}\right)p}{\left(1 + \frac{2\xi_{bv}}{\omega_{bv}}p + \frac{p^2}{\omega_{bv}^2}\right)p + K_{bv}}$

On cherche à synthétiser une correction permettant de vérifier l'ensemble du cahier des charges. On se propose d'utiliser une approche incrémentale.

1. Un premier correcteur

On cherche tout d'abord à régler la marge de phase. Le diagramme de Bode de la $FTBO(p)$ est donné pour $C(p) = 1$

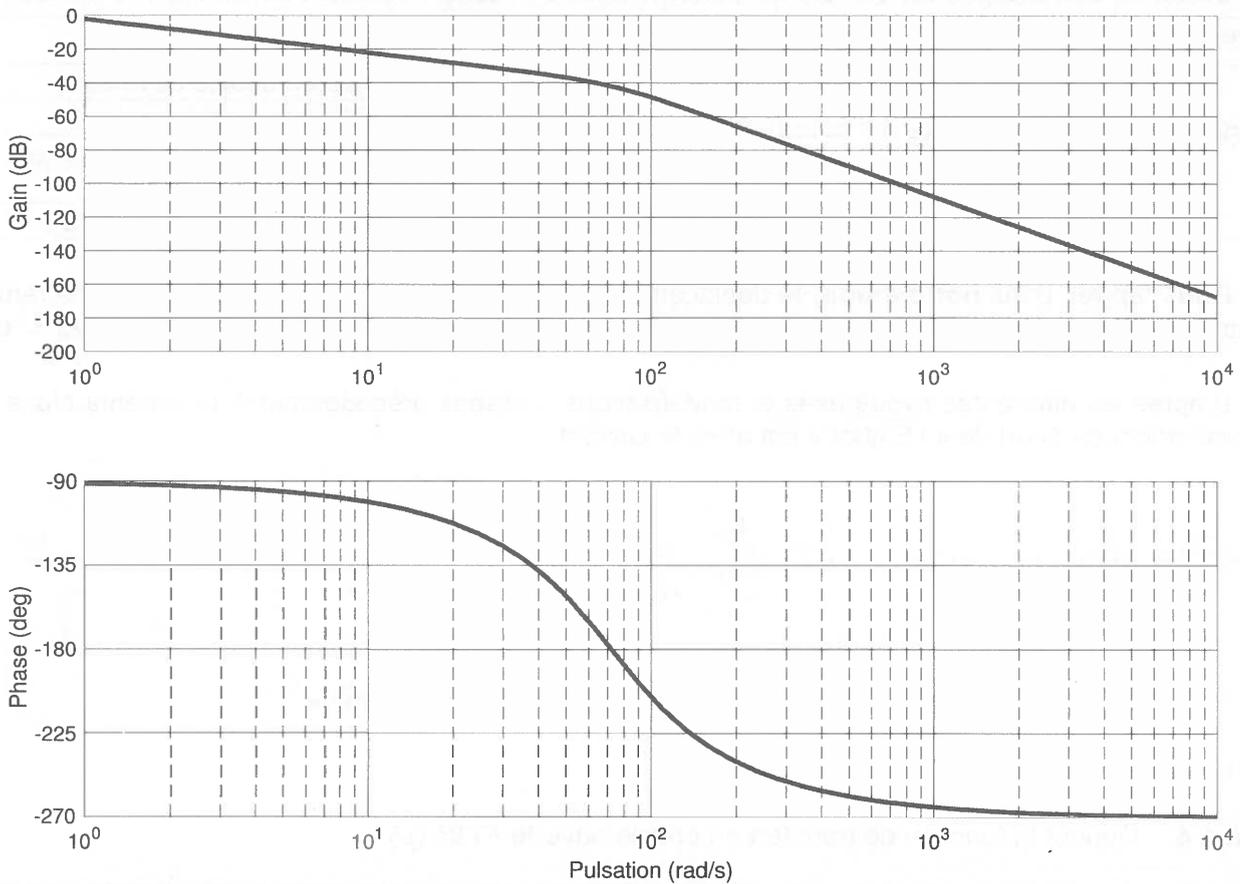


Figure 3 : Diagramme de Bode du système en boucle ouverte lorsque $C(p)=1$

Question 5. Pour $C(p) = 1$ que peut-on dire sur le système :

A)	B)	C)	D)
Précis sans déplacement de l'utilisateur.	Non précis avec un déplacement de l'utilisateur mais l'erreur est finie	Précis malgré le déplacement de l'utilisateur	Non précis avec un déplacement de l'utilisateur et l'erreur est infinie

Question 6. Justifier l'intérêt de dimensionner le correcteur dans le but de respecter le critère de marge de phase par rapport au critère de bande passante.

A)	B)	C)	D)
On pourra chercher à valider ce critère plus tard avec un autre type de correcteur.	On cherche à privilégier uniquement la stabilité.	On ne peut pas vérifier les deux critères à la fois.	D'après la figure 3, si l'on vérifie le critère de marge de phase alors automatiquement le critère de bande passante l'est aussi.

Question 7. Dans le but de régler la marge de phase, déterminer la pulsation ω_{-135° pour laquelle la phase φ vaut -135° .

A)
$\omega_{-135^\circ} = \left(\sqrt{\xi_{bv}^2 + 1} - \xi_{bv} \right) \omega_{bv}$

B)
$\omega_{-135^\circ} = \left(\sqrt{\xi_{bv}^2 + 1} + \xi_{bv} \right) \omega_{bv}$

C)
$\omega_{-135^\circ} = \left(\sqrt{\xi_{bv}^2 - 1} + \xi_{bv} \right) \omega_{bv}$

D)
$\omega_{-135^\circ} = \omega_{bv}$

Question 8. Dans le but de régler la marge de phase, que peut-on dire de ω_{-135° ?

A)	B)	C)	D)
$\omega_{-135^\circ} = \omega_{bv} = \omega_{0db}$	$\omega_{-135^\circ} = \omega_{0db}$	$\omega_{-135^\circ} = 1/\omega_{0db}$	$\omega_{-135^\circ} = \omega_{0db} \sqrt{1 - \xi^2}$

On pose alors $C(p) = K_p$ avec K_p un gain pur.

Question 9. Déterminer l'expression de K_p permettant de vérifier le critère de la marge de phase.

A)
$K_p \approx 10^{\frac{34}{20}}$

B)
$K_p = \frac{\omega_{0db} \sqrt{1 + (4\xi_{bv}^2 - 1) \frac{\omega_{0db}^2}{\omega_{bv}^2}}}{K_{ad} K_{bv} K_r R_r}$

C)
$K_p = \frac{\omega_{0db} \left(1 + \frac{2\xi_{bv} \omega_{0db}}{\omega_{bv}} - \frac{\omega_{0db}^2}{\omega_{bv}^2} \right)}{K_{ad} K_{bv} K_r R_r}$

D)
$K_p = \frac{\omega_{0db} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{0db}^2}{\omega_{bv}^2} \right)^2 + 4\xi_{bv}^2 \frac{\omega_{0db}^2}{\omega_{bv}^2}}}{K_{ad} K_{bv} K_r R_r}$

On suppose avoir trouvé une valeur de K_p permettant d'avoir une marge de phase de 45° .

2. Un deuxième correcteur

Afin d'améliorer la précision du système on se propose d'utiliser ce type de correcteur :

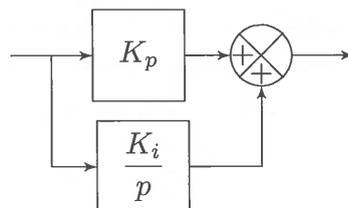


Figure 4 : Schéma-blocs du correcteur proposé

On précise que K_p est le même que celui établi précédemment. On peut mettre la fonction de transfert de correcteur sous la forme : $K_{cor} H_{cor}(p)$

Question 10. Préciser le paramètre K_{cor} et la fonction de transfert $H_{cor}(p)$ en fonction de K_p , K_i et p

A)	B)	C)	D)
$K_{cor} = K_i$	$K_{cor} = K_p$	$K_{cor} = K_p$	$K_{cor} = K_i$
$H_{cor}(p) = \frac{1 + \frac{K_p}{K_i}p}{\frac{K_p}{K_i}p}$	$H_{cor}(p) = \frac{1 + \frac{K_i}{K_p}p}{\frac{K_i}{K_p}p}$	$H_{cor}(p) = \frac{1 + \frac{K_p}{K_i}p}{\frac{K_p}{K_i}p}$	$H_{cor}(p) = \frac{1 + \frac{K_i}{K_p}p}{\frac{K_i}{K_p}p}$

Le rapport $\frac{K_p}{K_i}$ sera noté comme étant égal à T_i : $\frac{K_p}{K_i} = T_i$.

Question 11. Comment doit-on choisir le coefficient T_i pour que la partie intégrale de ce correcteur n'influence pas les réglages établis au paragraphe précédent ?

A)	B)	C)	D)
$T_i = 100 \text{ s}$	$T_i = 0,001 \text{ s}$	$T_i = 0,025 \text{ s}$	$T_i = 0 \text{ s}$

Après un choix judicieux du coefficient T_i , le diagramme de Bode dans une zone précise est donné à la figure suivante.

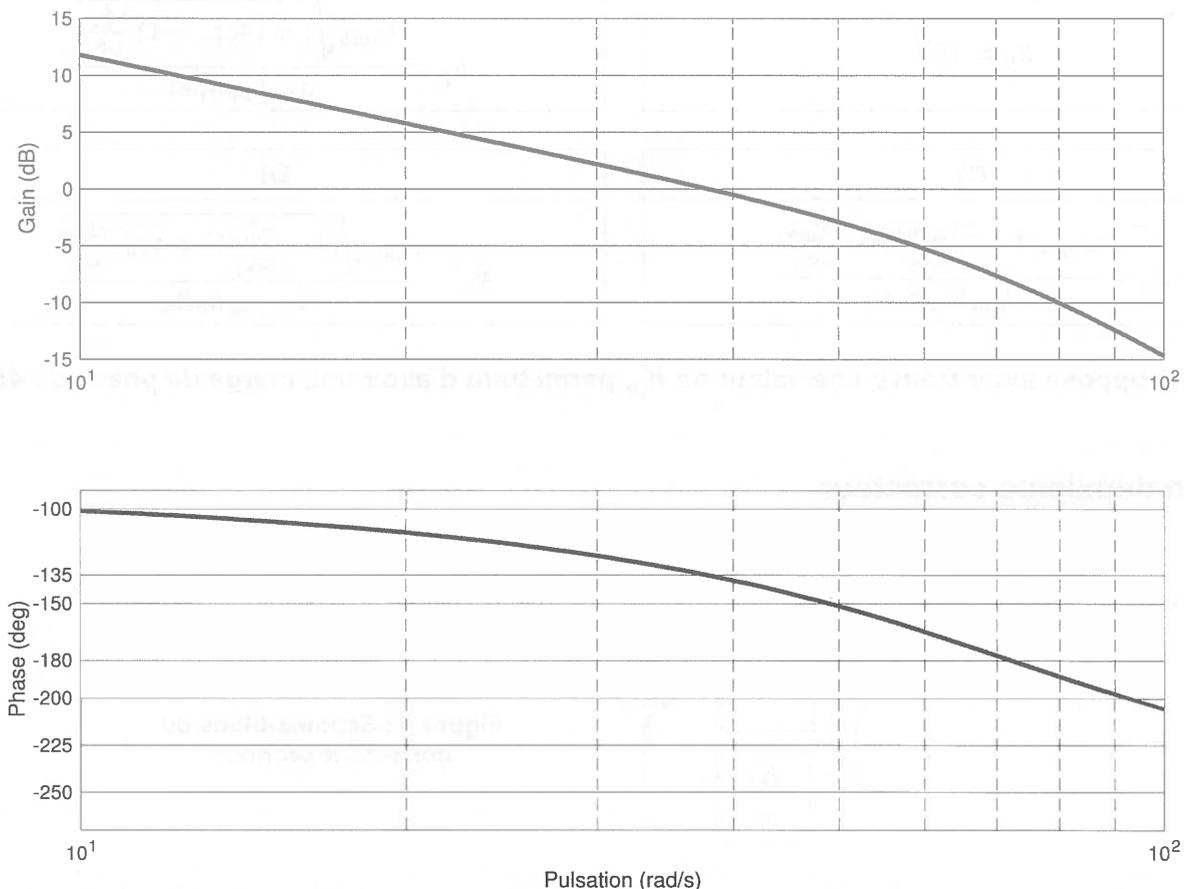


Figure 5 : Diagramme de Bode après correction

Question 12. Quelle(s) est(sont) la (les) affirmation(s) vraie(s) ?

A)	B)	C)	D)
Le critère de marge de gain est vérifié.	Le critère de marge de gain n'est pas vérifié mais elle est néanmoins positive donc le système est stable en boucle fermée.	Le critère de marge de gain n'est pas vérifié et elle est négative donc le système est instable en boucle fermée.	Le critère de marge de gain est vérifié mais on ne peut rien dire sur la stabilité du système.

3. Un dernier correcteur

A partir du constat effectué en question 12, il est nécessaire d'utiliser un dernier correcteur que l'on placera en série avec le correcteur proportionnel intégral que l'on a précédemment mis en place.

Question 13. Quel correcteur est envisageable ?

A)	B)	C)	D)
Correcteur intégrateur pur	Correcteur proportionnelle intégrale	Correcteur à retard pur	Correcteur à avance de phase

4. Analyse temporelle

Une simulation de l'asservissement établi met en avant une tension d'alimentation du moteur brushless de 1000 V. Ceci n'est pas physiquement viable car la tension d'alimentation maximale du moteur est limitée à 48 V.

Question 14. Comment se nomme le phénomène dont il faudrait alors tenir compte dans la modélisation de la simulation établie ?

A)	B)	C)	D)
Phénomène d'irréversibilité	Phénomène d'hystérésis	Phénomène de seuil	Phénomène de saturation

PARTIE B SYSTEME DE DIRECTION

I EPURE DE DIRECTION

_____ Objectif _____

Déterminer d'un point de vue cinématique le comportement en phase de virage, d'un véhicule à quatre roues directrices

Le système de direction de « l'Effibot » s'appuie sur un système à 4 roues directrices. Ce système a pour effet d'augmenter la manœuvrabilité du robot lorsque celui-ci doit évoluer dans des espaces étroits.

Le principe de base est relativement simple : lorsque les roues avant braquent dans un sens, les roues arrière braquent dans l'autre sens.

1. Détermination du rayon de courbure

On s'intéresse ici à l'étude d'un système à 4 roues directrices avec un coefficient de proportionnalité q entre les angles de braquages du train avant et du train arrière. De ce fait, si l'angle de braquage avant est de ϕ celui de l'arrière est alors de $q\phi$ avec $q \in [0,1]$.

La figure 6 représente une épure de direction d'un système à quatre roues directrices.

HYPOTHESES :

- $L = RF$ est la longueur d'empattement du véhicule (distance séparant les centres des trains avant et arrière)
- v_a correspond à la voie du véhicule (largeur entre les roues)

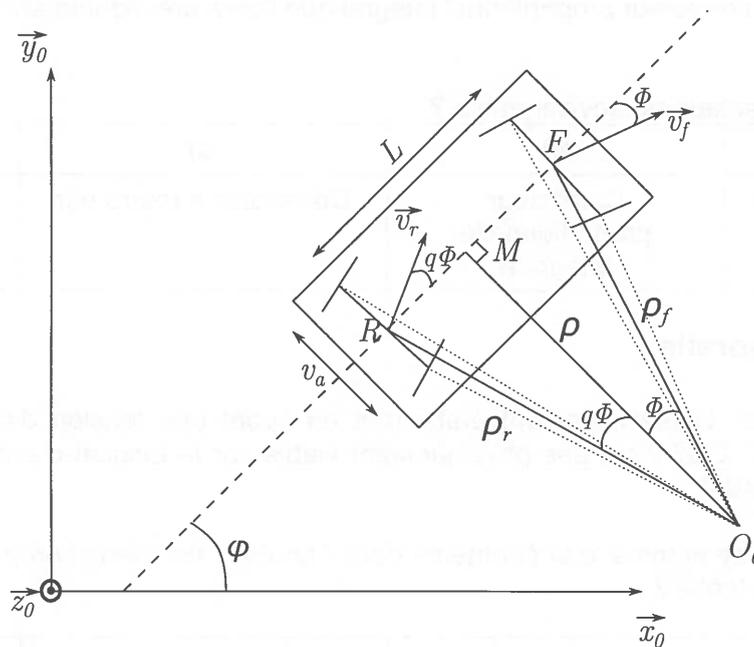


Figure 6 : Epure de direction d'un véhicule à quatre roues directrices

- On note $F = (x_f, y_f)$ et $R = (x_r, y_r)$ les coordonnées du centre de l'essieu avant et arrière.
- \vec{v}_f et \vec{v}_r correspondent respectivement à la vitesse instantanée au point F et au point R dans le référentiel supposé galiléen $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- ϕ caractérise l'angle que fait l'axe longitudinal du véhicule avec l'axe \vec{x}_0 .
- ϕ représente l'angle de braquage moyen des roues de l'essieu avant. Cet angle représente l'angle entre la direction du vecteur \vec{v}_f et l'axe longitudinal.
- ρ_f et ρ_r sont les rayons de giration instantanés associés respectivement aux points F et R .
- On dira ici que le rayon de courbure du virage pris par le véhicule sera égal à la distance O_0M , valant ρ .
- Le point O_0 sera considéré comme le centre du virage.

Question 15. Quelle est la relation liant les distances RM et MF ?

A)	B)	C)	D)
$RM = MF \times \frac{q}{2}$	$RM = MF \times \frac{\sin(q\phi)}{\sin(\phi)}$	$RM = MF \times \frac{\tan(q\phi)}{\tan(\phi)}$	$RM = MF \times \frac{\tan(\phi)}{\tan(q\phi)}$

Question 16. En constatant que $RM + MF = L$, déduisez-en la relation vérifiée par RM et par MF .

A)	$RM = L \frac{\sin(\phi) \cos(q\phi)}{\sin(\phi + q\phi)}$	$MF = L \frac{\sin(q\phi) \cos(\phi)}{\sin(\phi + q\phi)}$
B)	$RM = L \frac{\cos(\phi) \sin(q\phi)}{\sin(\phi + q\phi)}$	$MF = L \frac{\cos(q\phi) \sin(\phi)}{\sin(\phi + q\phi)}$
C)	$RM = L \frac{\cos(\phi) \sin(q\phi)}{\cos(\phi + q\phi)}$	$MF = L \frac{\cos(q\phi) \sin(\phi)}{\cos(\phi + q\phi)}$
D)	$RM = \frac{L}{1 + \frac{\tan(\phi)}{\tan(q\phi)}}$	$MF = \frac{L}{1 + \frac{\tan(q\phi)}{\tan(\phi)}}$

Question 17. En déduire alors l'expression de ρ en fonction de ϕ , q et L .

A)	B)	C)	D)
$\rho = \frac{L}{\sin(\phi) + \sin(q\phi)}$	$\rho = \frac{L}{\tan(\phi) + \tan(q\phi)}$	$\rho = \frac{L}{\cos(\phi) + \cos(q\phi)}$	$\rho = \frac{L}{\tan\left(\frac{\phi+q\phi}{2}\right)}$

2. Relation angulaire idéale entre les roues

Dans le reste de l'étude, on impose maintenant $q=1$.

Après avoir trouvé la relation entre l'angle ϕ et le rayon de courbure du virage ρ , on s'intéresse dans cette section à déterminer la relation théorique entre les angles de braquage des roues gauche et droite afin d'assurer une bonne tenue de « l'Effibot » en phase de virage.

Le système de direction est présenté en figure 7. Ce système permet une symétrie de direction entre le train avant et le train arrière. Le braquage des roues avant, gauche et droite, solidaires des fusées 3_g et 3_d est assurée via les biellettes 2_g et 2_d , elles-mêmes mises en mouvement grâce à la pièce 1. La pièce 1 est mise en rotation par rapport au bâti grâce à un motoréducteur, de rapport de réduction k_{mot} , entraînant une roue dentée solidaire de la pièce 1. La biellette 4 assure la liaison angulaire entre le train avant et le train arrière. Les différentes figures sont présentées dans la base $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ liée au bâti de « l'Effibot ».

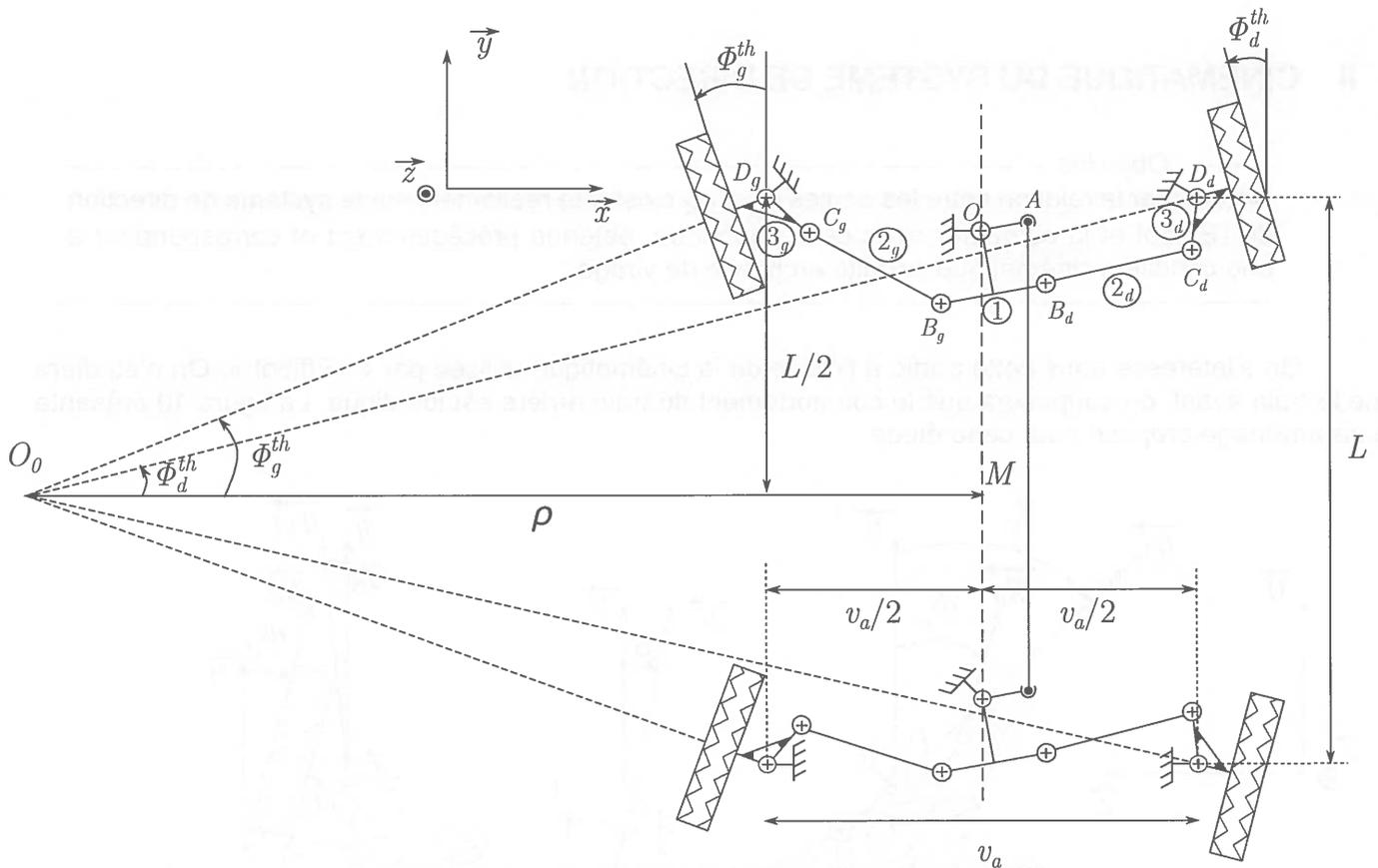


Figure 8 : Modélisation du système de direction de l'Effibot

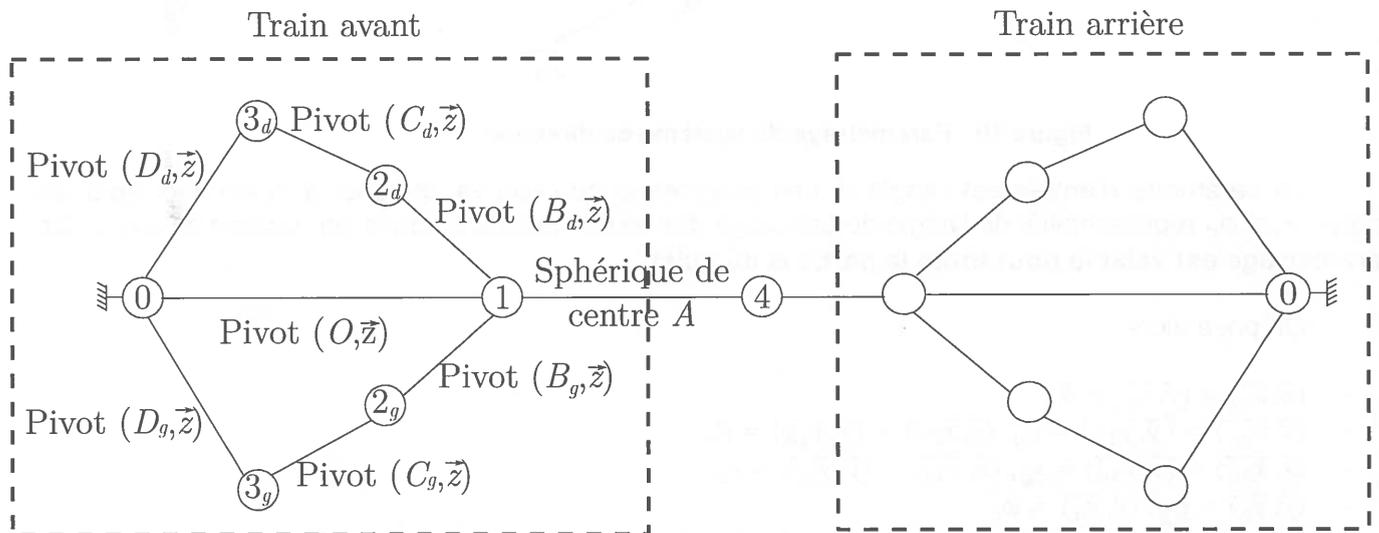


Figure 9 : Graphe de liaisons du système de direction de l'Effibot

Question 18. Déterminer la relation entre ϕ_g^{th} et ϕ_d^{th}

A)
$\tan(\phi_g^{th}) = \frac{L \times \tan(\phi_d^{th})}{L - 2v_a \tan(\phi_d^{th})}$

B)
$\tan(\phi_d^{th}) = -\frac{L \times \tan(\phi_g^{th})}{L - 2v_a \tan(\phi_g^{th})}$

C)
$\tan(\phi_d^{th}) = \frac{L \times \tan(\phi_g^{th})}{-L + 2v_a \tan(\phi_g^{th})}$

D)
$\tan(\phi_g^{th}) = \frac{L \times \tan(\phi_d^{th})}{L + 2v_a \tan(\phi_d^{th})}$

II CINEMATIQUE DU SYSTEME DE DIRECTION

Objectifs

Déterminer la relation entre les angles ϕ_g et ϕ_d existante réellement sur le système de direction de l'Effibot et la comparer avec celle, théorique, obtenue précédemment et correspondant à une condition cinématique parfaite en phase de virage.

On s'intéresse dans cette partie à l'étude de la cinématique utilisée par « l'Effibot ». On n'étudiera que le train avant, on supposera que le comportement du train arrière est identique. La figure 10 présente le paramétrage proposé pour cette étude.

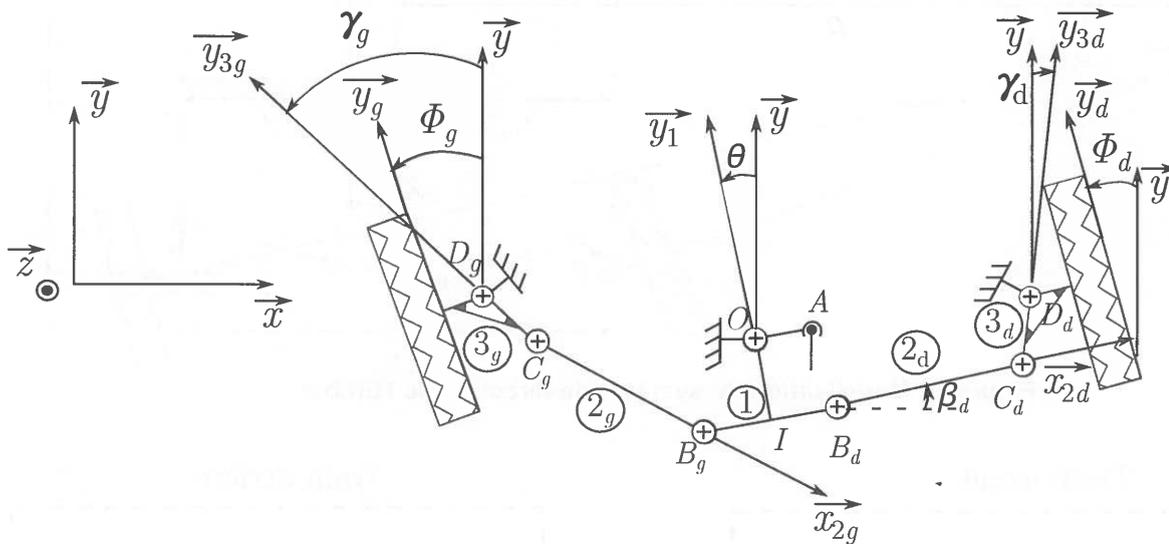


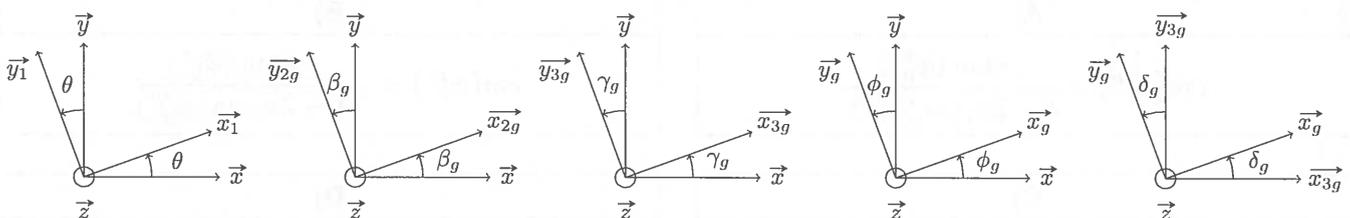
Figure 10 : Paramétrage du système de direction

Le paramètre d'entrée est l'angle θ . Les paramètres que l'on va chercher à déterminer sont les angles ϕ_g et ϕ_d représentatifs de l'angle de braquage des roues gauche et droite par rapport à l'axe \vec{y} . Ce paramétrage est valable pour toute la partie B du sujet.

On pose alors :

- $(\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{y}, \vec{y}_1) = \theta$
- $(\vec{x}, \vec{x}_{2g}) = (\vec{y}, \vec{y}_{2g}) = \beta_g$, $(\vec{x}, \vec{x}_{2d}) = (\vec{y}, \vec{y}_{2d}) = \beta_d$
- $(\vec{x}, \vec{x}_{3g}) = (\vec{y}, \vec{y}_{3g}) = \gamma_g$, $(\vec{x}, \vec{x}_{3d}) = (\vec{y}, \vec{y}_{3d}) = \gamma_d$
- $(\vec{y}, \vec{y}_g) = \phi_g$, $(\vec{y}, \vec{y}_d) = \phi_d$
- \vec{y}_g et \vec{y}_d sont des vecteurs représentant la direction de braquage des roues. En ligne droite $\vec{y}_g = \vec{y}_d = \vec{y}$
- $(\vec{y}_{3g}, \vec{y}_g) = \delta_g$ (angle constant), $(\vec{y}_{3d}, \vec{y}_d) = \delta_d$ (angle constant)

On présente quelques figures géométrales (notamment celle de la partie gauche du train avant).



Les différents vecteurs de la géométrie du train avant sont donnés ci-dessous :

- $\vec{OI} = -r \vec{y}_1$ (Le point O est le centre de rotation de la pièce 1 par rapport au bâti)
- $\vec{IB}_g = -b \vec{x}_1$, $\vec{IB}_d = b \vec{x}_1$
- $\vec{B}_g \vec{C}_g = -c \vec{x}_{2g}$, $\vec{B}_d \vec{C}_d = c \vec{x}_{2d}$
- $\vec{C}_g \vec{D}_g = d \vec{y}_{3g}$, $\vec{C}_d \vec{D}_d = d \vec{y}_{3d}$
- $\vec{D}_g \vec{O} = \frac{v_a}{2} \vec{x} - e \vec{y}$
- $\vec{D}_d \vec{O} = -\frac{v_a}{2} \vec{x} - e \vec{y}$

Question 19. En se plaçant dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ exprimer les lois entrée-sortie liant γ_g, γ_d et θ .

A)	$r \sin \theta - b \cos \theta - c \cos \left(\arcsin \left(\frac{-r \cos \theta - b \sin \theta + d \cos \gamma_g - e}{c} \right) \right) - d \sin \gamma_g + \frac{v_a}{2} = 0$ $r \sin \theta - b \cos \theta - c \cos \left(\arcsin \left(\frac{-r \cos \theta - b \sin \theta + d \cos \gamma_d - e}{c} \right) \right) - d \sin \gamma_d + \frac{v_a}{2} = 0$
-----------	---

B)	$r \sin \theta - b \cos \theta - c \cos \left(\arcsin \left(\frac{-r \cos \theta - b \sin \theta + d \cos \gamma_g - e}{c} \right) \right) - d \sin \gamma_g + \frac{v_a}{2} = 0$ $r \sin \theta + b \cos \theta + c \cos \left(\arcsin \left(\frac{r \cos \theta - b \sin \theta - d \cos \gamma_d + e}{c} \right) \right) - d \sin \gamma_d - \frac{v_a}{2} = 0$
-----------	--

C)	$r \sin \theta - b \cos \theta - c \arcsin \left(\frac{-r \cos \theta - b \sin \theta - d \cos \gamma_g - e}{c} \right) - d \sin \gamma_g + \frac{v_a}{2} = 0$ $r \sin \theta + b \cos \theta + c \arcsin \left(\frac{-r \cos \theta - b \sin \theta - d \cos \gamma_d - e}{c} \right) - d \sin \gamma_d + \frac{v_a}{2} = 0$
-----------	---

D)	$r \sin \theta - b \cos \theta + c \cos \left(\frac{-r \cos \theta - b \sin \theta - d \cos \gamma_g + e}{c} \right) - d \sin \gamma_g + \frac{v_a}{2} = 0$ $r \sin \theta + b \cos \theta + c \cos \left(\frac{r \cos \theta - b \sin \theta - d \cos \gamma_d + e}{c} \right) - d \sin \gamma_d - \frac{v_a}{2} = 0$
-----------	--

Une résolution numérique de la précédente loi entrée-sortie a été mise en place pour la roue gauche et le résultat obtenu est présenté en figure 11. Les résultats sont évidemment transposables à la roue droite.

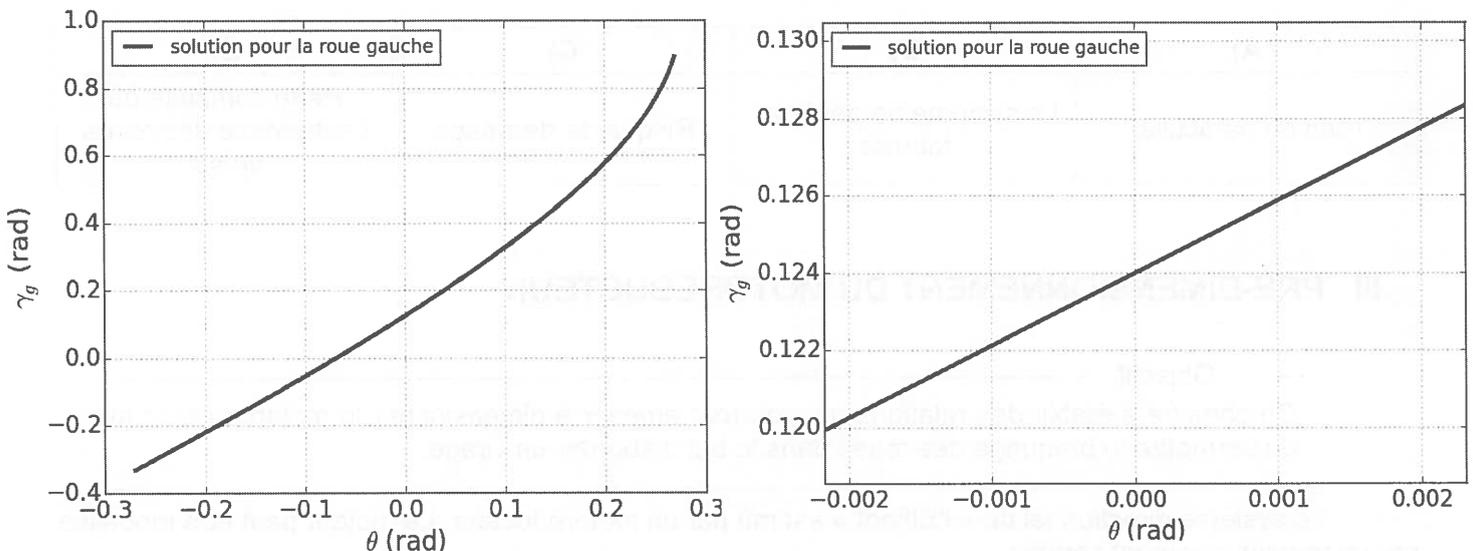


Figure 11 : Résolution de la loi entrée-sortie pour la roue gauche

Question 20. D'après les résultats de simulations et en notifiant que lorsque $\theta = 0$ les roues sont alignées suivant l'axe \vec{y} et que les angles δ_g et δ_d sont constants, en déduire les relations entre γ_g et ϕ_g et γ_d et ϕ_d .

A)	B)	C)	D)
$\phi_g = \gamma_g + 0,124$ $\phi_d = \gamma_d + 0,124$	$\phi_g = \gamma_g - 0,124$ $\phi_d = \gamma_d + 0,124$	$\phi_g = \gamma_g + 0,124$ $\phi_d = \gamma_d - 0,124$	$\phi_g = \gamma_g - 0,124$ $\phi_d = \gamma_d - 0,124$

Sur la figure 12, on présente simultanément l'évolution cinématique théorique parfaite de l'angle ϕ_d en fonction de ϕ_g (correspondant aux angles ϕ_g^{th} et ϕ_d^{th}) et celle issue du modèle cinématique retenu.

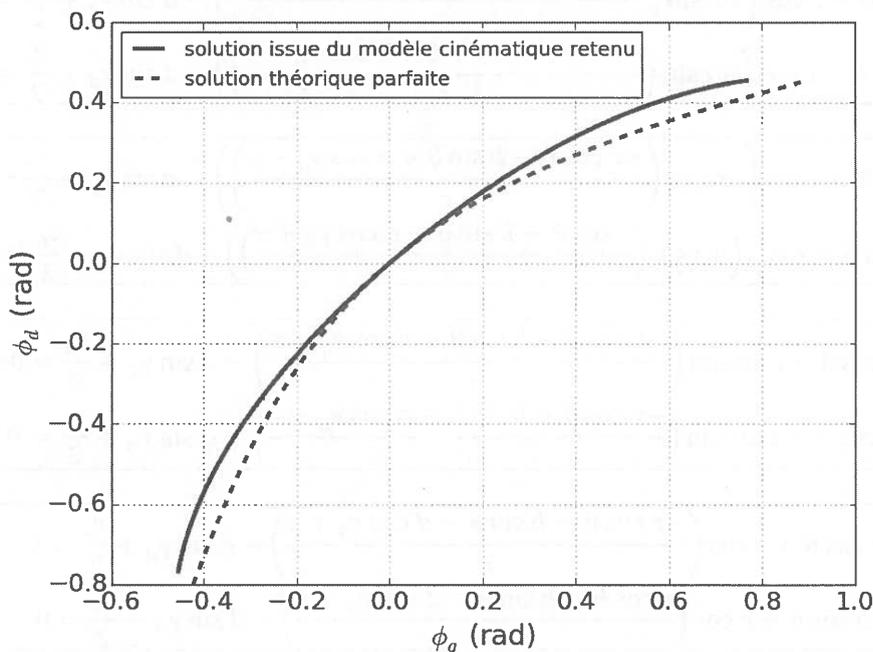


Figure 12 : Comparaison de l'évolution des angles de braquage des roues

Question 21. Que risque t-il de se passer sur le système réel lors d'une phase de virage ?

A)	B)	C)	D)
Rien de particulier	Le système ne peut pas tourner	Risque de dérapage	Perte complète de l'adhérence des roues au sol

III PRE-DIMENSIONNEMENT DU MOTOREDUCTEUR

Objectif

On cherche à établir des relations qui pourront amener à dimensionner le motoréducteur afin de permettre le braquage des roues dans le but d'aborder un virage.

Le système directionnel de « l'Effibot » est mû par un motoréducteur. Le moteur peut être modélisé par un moteur à courant continu.

Les équations de celui-ci sont :

$$J_{eq} \frac{d\omega(t)}{dt} = C_{mt}(t) - C_r(t)$$

$$u(t) = R i(t) + e(t)$$

$$C_{mt}(t) = k_c i(t)$$

$$e(t) = k_e \omega(t)$$

- J_{eq} : Inertie équivalente de l'ensemble du système de direction (en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$) ramené à l'arbre moteur.
- $\omega(t)$: Vitesse angulaire du moteur (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)
- $C_{mt}(t)$: Couple moteur (en $\text{N} \cdot \text{m}$)
- $C_r(t)$: Couple résistant équivalent ramené sur l'arbre moteur (en $\text{N} \cdot \text{m}$)
- $u(t)$: Tension d'alimentation du moteur (en V)
- R : Résistance électrique du moteur (en Ω)
- $i(t)$: Courant électrique du moteur (en A)
- $e(t)$: force électro-motrice (en V)
- k_e : Constante de force-électromotrice (en $\text{V} \cdot \text{s}$)
- k_c : Constante de couple (en $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$)

Avec $k_e = k_c$

Afin d'avoir un système « Effibot » permettant de remplir efficacement sa fonction de suivi d'une personne, il faut que le système de direction puisse être réactif et donc que le moteur atteigne rapidement une vitesse angulaire suffisante. On ne cherchera pas à quantifier les termes « rapidement » et « suffisante » mais uniquement à fournir les différentes équations pouvant permettre à l'ingénieur de faire un choix de moteur adapté.

Dans ce sens, deux grandeurs sont à exprimer afin de dimensionner le moteur : J_{eq} et $C_r(t)$. Le couple $C_r(t)$ sera celui induit par le frottement des pneus sur le sol lors du braquage des roues.

1. Estimation du couple résistant ramené à l'arbre moteur $C_r(t)$

Dans cette partie, on cherche à déterminer le couple résistant à dépasser afin de faire pivoter les roues. Dans cette phase de prédimensionnement, on mènera alors une étude statique permettant d'estimer celui-ci.

1. Détermination de l'action mécanique du sol sur la roue

Afin de calculer ce couple, il est tout d'abord nécessaire d'estimer l'action mécanique du sol sur les roues. Sur les figures, on représente les différentes grandeurs et paramètres sur **la roue avant droite du robot**.

HYPOTHESES :

- On appelle M_{tot} la masse totale de « l'Effibot » (masse du robot + masse de sa charge)
- On suppose que la masse est équirépartie sur chacune des roues.
- La zone de contact entre le sol et le pneu **déformable**, notée S_c , est un disque de rayon R_{SC} .
- Le centre de ce disque est le point O_{SC} .
- Le centre géométrique de la roue est noté G_{roue}
- Les points G_{roue} et O_{SC} sont alignés verticalement (suivant l'axe \vec{z})
- A l'arrêt, la réaction du sol sur la roue est modélisée par une pression uniforme p_{react} sur S_c
- Le facteur de frottement entre le pneu et le sol est noté f .

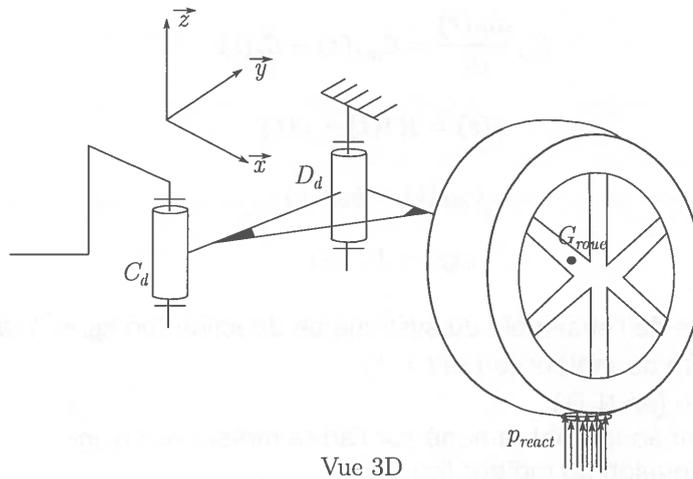


Figure 13 : Vue en 3D du système de direction de la roue avant droite

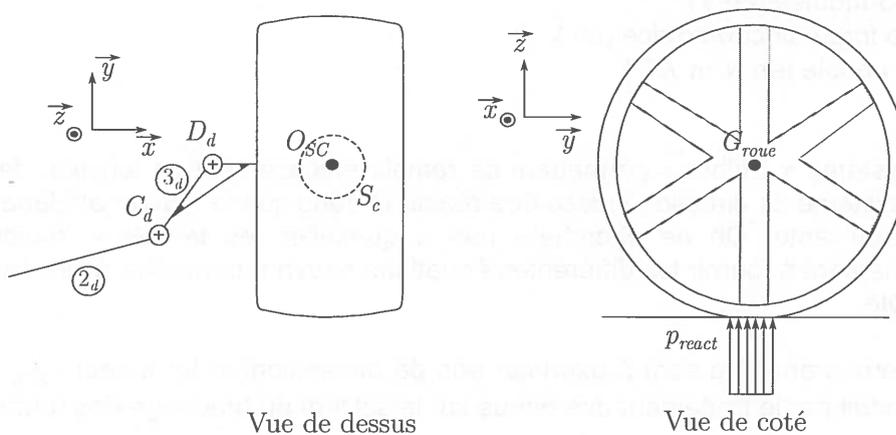


Figure 14 : Présentations 2D du système de direction pour la roue avant droite

Afin de faciliter les calculs, on supposera que les points D_d et G_{roue} sont confondus (ce qui est une hypothèse cohérente par rapport aux dimensions du système réel). On rappelle que le point O_{sc} est aligné avec G_{roue} suivant l'axe \vec{z} et donc maintenant avec D_d .

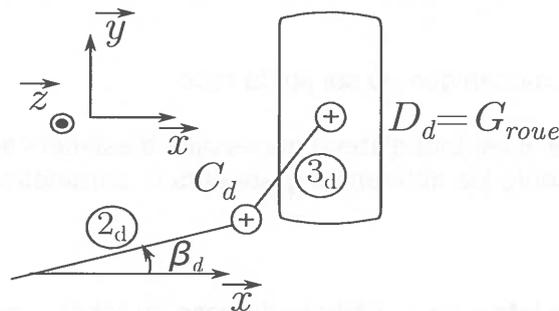


Figure 15 : Modèle où les points D_d et G_{roue} sont confondus

HYPOTHESES :

- On suppose que le robot n'avance pas.
- On suppose également que les roues sont toutes orientées parallèlement (comme si on allait avancer en ligne droite, et donc $(\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{y}, \vec{y}_1) = \theta = 0$ rad) et que l'on cherche à faire tourner les roues de telle façon à prendre un virage à gauche.

On donne le paramétrage de la surface de contact S_c , à utiliser pour mener l'étude statique sur le pneu aux questions 22 et 23.

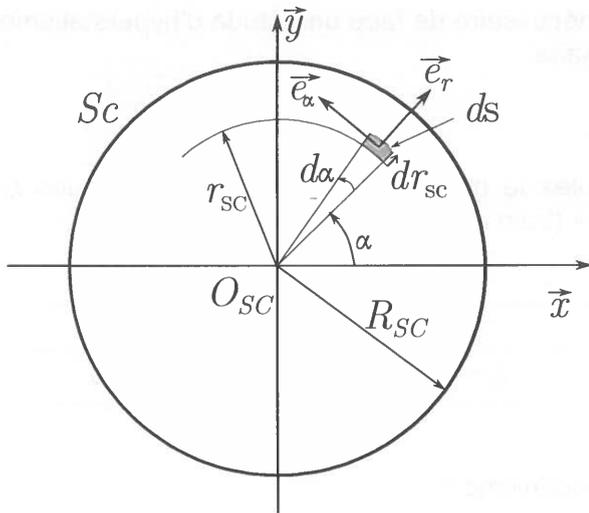


Figure 16 : Modélisation de la surface de contact entre le sol et le pneu

Question 22. Pour la roue avant droite, déterminer le torseur d'action mécanique locale au point O_{SC} du sol sur la roue. Ce torseur sera noté $\{d\tau_{s \rightarrow r}\}_{O_{SC}}$. On précise que l'élément de surface est noté ds .

A)
$\left\{ \begin{array}{l} p_{react} ds \vec{z} + f p_{react} ds \vec{e}_\alpha \\ r_{SC} p_{react} ds \vec{e}_\alpha - f p_{react} r_{SC} ds \vec{z} \end{array} \right\}_{O_{SC}}$

B)
$\left\{ \begin{array}{l} p_{react} ds \vec{z} - f p_{react} ds \vec{e}_\alpha \\ r_{SC} p_{react} ds \vec{e}_\alpha - f p_{react} r_{SC} ds \vec{z} \end{array} \right\}_{O_{SC}}$

C)
$\left\{ \begin{array}{l} p_{react} ds \vec{z} + f p_{react} ds \vec{e}_\alpha \\ -r_{SC} p_{react} ds \vec{e}_\alpha + f p_{react} r_{SC} ds \vec{z} \end{array} \right\}_{O_{SC}}$

D)
$\left\{ \begin{array}{l} p_{react} ds \vec{z} - f p_{react} ds \vec{e}_\alpha \\ -r_{SC} p_{react} ds \vec{e}_\alpha - f p_{react} r_{SC} ds \vec{z} \end{array} \right\}_{O_{SC}}$

Question 23. Déterminer alors le torseur d'action mécanique globale du sol sur la roue $\{\tau_{s \rightarrow r}\}_{O_{SC}}$

A)
$\left\{ \begin{array}{l} F_{react} = p_{react} \pi R_{SC}^2 \vec{z} \\ C_{react} = 2f p_{react} \frac{R_{SC}^2}{3} \pi \vec{z} \end{array} \right\}_{O_{SC}}$

B)
$\left\{ \begin{array}{l} F_{react} = p_{react} \pi R_{SC}^2 \vec{z} \\ C_{react} = -2f p_{react} \frac{R_{SC}^3}{3} \pi \vec{z} \end{array} \right\}_{O_{SC}}$

C)
$\left\{ \begin{array}{l} F_{react} = p_{react} \pi R_{SC}^2 \vec{z} \\ C_{react} = 2f p_{react} \frac{R_{SC}^3}{3} \pi \vec{z} \end{array} \right\}_{O_{SC}}$

D)
$\left\{ \begin{array}{l} F_{react} = p_{react} \pi R_{SC}^2 \vec{z} \\ C_{react} = -\frac{2}{3} f R_{SC} F_{react} \vec{z} \end{array} \right\}_{O_{SC}}$

On notera par la suite $\{\tau_{s \rightarrow r}\}_{O_{SC}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F_{react} & C_{react} \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

Maintenant que l'action mécanique du sol sur les roues a été définie, on va alors chercher à estimer le couple résistant induit par celle-ci, ramené à l'arbre moteur. On se propose de mener une étude statique (toujours sur le système de direction de la roue avant droite) afin de pouvoir estimer $C_r(t)$.

Mais avant de réaliser cette étude statique, il est nécessaire de faire une étude d'hyperstatisme du système de direction et de le rendre isostatique si nécessaire.

2. Etude d'hyperstatisme

Question 24. En vous aidant des figures 8 et 9, calculez le nombre d'inconnues cinématiques l_c de l'ensemble du système de direction de « l'Effibot » (train avant+train arrière)

A)	B)	C)	D)
$l_c = 16$	$l_c = 17$	$l_c = 18$	$l_c = 20$

Question 25. Déterminer le nombre de mobilité m_c du mécanisme ?

A)	B)	C)	D)
$m_c = 1$	$m_c = 2$	$m_c = 3$	$m_c = 4$

Question 26. Déterminer le nombre cyclomatique μ .

A)	B)	C)	D)
$\mu = 2$	$\mu = 4$	$\mu = 5$	$\mu = 6$

Question 27. Calculer le degré d'hyperstatisme h .

A)	B)	C)	D)
$h = 6$	$h = 12$	$h = 13$	$h = 15$

Afin de palier l'hyperstatisme du système, les liaisons pivot entre :

- les éléments 3_g et 2_g
 - les éléments 3_d et 2_d ,
 - les éléments 2_g et 1
 - les éléments 2_d et 1
- sont remplacées par des liaisons sphériques.

3. Estimation du couple résistant ramené à l'arbre moteur due à l'action du sol sur la roue avant droite par une approche statique

Maintenant que le système a été rendu isostatique, on peut maintenant mener une étude statique afin d'estimer le couple résistant $C_r(t)$.

HYPOTHESES :

- L'action de pesanteur sur la roue (pièce 3_d), la biellette 2_d et la pièce 1 est négligée
- Le rapport de transmission entre l'arbre moteur et le pignon de la pièce 1 (voir figure 7) est noté $k_{trans} < 1$. De ce fait, $\frac{\dot{\theta}}{\omega} = k_{trans}$ avec ω vitesse de rotation du moteur et $\dot{\theta}$ vitesse de rotation de la pièce 1.
- La biellette 2_d est contenue dans le plan (C_d, \vec{x}, \vec{y}) .
- Dans cette première partie d'étude, on ne s'intéresse qu'au système de direction avant droit de l'Effibot
- Le calcul du couple résistant C_r ramené à l'arbre moteur n'est donc ici calculé que pour la roue avant droite et sera noté C_{rd}

- Les roues (et donc plus particulièrement la roue avant droite) sont alignées suivant l'axe \vec{y} . **Donc $\theta = 0 \text{ rad}$**
- Les liaisons sont supposées parfaites.

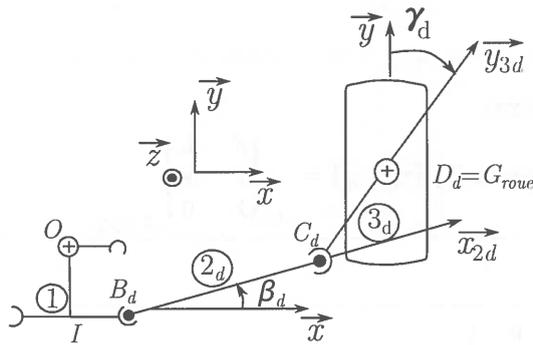


Figure 17 : Rappel de la modélisation et du paramétrage proposé

Question 28. D'après les hypothèses énoncées précédemment et le principe fondamental de la statique appliqué à la biellette 2_d . On peut en déduire :

A)	B)	C)	D)
La direction des forces $\vec{F}_{1 \rightarrow 2d}$ et $\vec{F}_{3d \rightarrow 2d}$	Le sens des forces $\vec{F}_{1 \rightarrow 2d}$ et $\vec{F}_{3d \rightarrow 2d}$	L'intensité des forces $\vec{F}_{1 \rightarrow 2d}$ et $\vec{F}_{3d \rightarrow 2d}$	Les composantes des forces $\vec{F}_{1 \rightarrow 2d}$ et $\vec{F}_{3d \rightarrow 2d}$ sont portées uniquement par les axes \vec{x} et \vec{y} .

Question 29. Quelles sont les actions mécaniques s'exerçant sur l'ensemble $\{3_d, \text{roue}\}$.

A)	<p>Action du sol sur la roue : $\{\tau_{s \rightarrow r}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F_{react} & C_{react} \end{pmatrix}_{(x, y, z)}$</p> <p>Action de la biellette 2_d : $\{\tau_{2d \rightarrow 3d}\} = \begin{pmatrix} F_{2x} & 0 \\ F_{2y} & 0 \\ F_{2z} \neq 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x, y, z)}$</p> <p>Action due à la liaison pivot entre le bâti 0 et la pièce 3_d $\{\tau_{0 \rightarrow 3d}\} = \begin{pmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{pmatrix}_{(x, y, z)}$</p>
-----------	--

B)	<p>Action de la biellette 2_d : $\{\tau_{2d \rightarrow 3d}\} = \begin{pmatrix} F_{2x} & 0 \\ F_{2y} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x, y, z)}$</p> <p>Action due à la liaison pivot entre le bâti 0 et la pièce 3_d $\{\tau_{0 \rightarrow 3d}\} = \begin{pmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{pmatrix}_{(x, y, z)}$</p>
-----------	---

4. Estimation du couple résistant ramené à l'arbre moteur due à l'action du sol sur la roue avant droite par une approche énergétique

En linéarisant les lois d'entrée-sortie entre les angles θ , γ_d et β_d , autour du point de fonctionnement $\theta = 0$ rad. On obtient les relations suivantes :

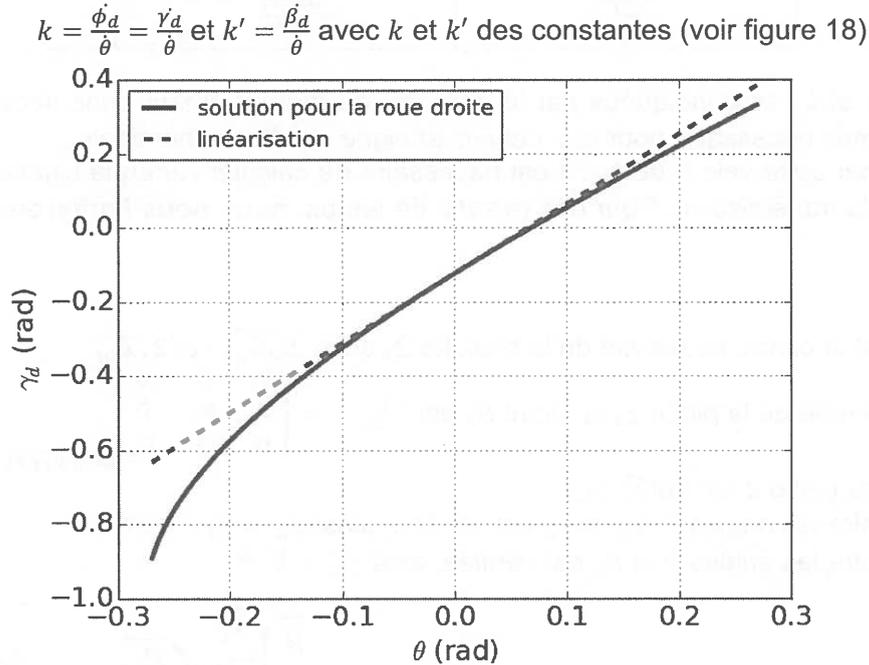


Figure 18 : Linéarisation de la loi-entrée sortie pour la roue avant droite

Question 32. Par le théorème de l'énergie cinétique appliqué sur l'ensemble $\{1, 2_d, 3_d, roue\}$, déterminer le couple C_{rd} nécessaire au pivotement de la roue droite. Pour cela vous utiliserez l'hypothèse de linéarité entre $\dot{\phi}_d$ et $\dot{\theta}$ et vous supposerez que les effets dynamiques sont négligeables.

A)	B)	C)	D)
$C_{rd} = \left \frac{C_{react}}{k k_{trans}} \right $	$C_{rd} = \left \frac{C_{react} k}{k_{trans}} \right $	$C_{rd} = C_{react} k k_{trans} $	$C_{rd} = \left \frac{C_{react} k_{trans}}{k} \right $

5. Estimation du couple résistant ramené à l'arbre moteur due à l'action du sol sur les roues

Question 33. En tenant compte des actions mécaniques du sol sur les quatre roues (on rappelle que la charge est équirépartie sur chacune des roues) quelle estimation peut-on faire de C_r ?

A)	B)	C)	D)
$C_r = -2C_{rd}$	$C_r = 2C_{rd}$	$C_r = 0$	$C_r = 4C_{rd}$

2. Estimation du temps de mise en rotation du moteur

Après avoir estimé, le couple résistant à dépasser afin d'assurer le pivotement des roues, on va chercher à estimer le temps nécessaire au moteur pour que celui-ci atteigne sa vitesse nominale. L'estimation de ce temps de mise en rotation du moteur est importante afin de juger de la réactivité du système de direction et de mettre ensuite en place une éventuelle stratégie de pilotage et d'asservissement du système. (Cette étude d'asservissement et de pilotage du système de direction ne sera pas traitée dans le sujet).

Question 34. D'après les équations du moteur rappelées précédemment, exprimer le temps de réponse à 5%, noté $t_{5\%}$, du moteur à courant continu (on rappelle que $k_e = k_c$).

A)	B)	C)	D)
$3 \frac{k_e^2}{R J_{eq}}$	$\frac{R J_{eq}}{k_e^2}$	$3 \frac{R J_{eq}}{k_e^2}$	$3 R J_{eq}$

Les valeurs R et k_e sont indiquées par le fabricant du moteur. Il faut donc déterminer J_{eq} afin de pouvoir estimer le temps nécessaire pour que celui-ci atteigne sa vitesse nominale.

Pour déterminer cette valeur de J_{eq} , il est nécessaire de calculer l'énergie cinétique de l'ensemble des pièces assurant la transmission. Pour des raisons de temps, **nous nous limiterons à calculer celle de la biellette 2d**

HYPOTHESES :

- Le point G_2 est le centre de gravité de la biellette 2_d avec $\overrightarrow{B_d G_2} = c/2 \cdot \overrightarrow{x_{2d}}$
- La matrice d'inertie de la pièce 2_d au point G_2 est : $\bar{I}_{2_d, G_2} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_{2d}}, \overrightarrow{y_{2d}}, \overrightarrow{z})}$
- La masse de la pièce 2 est notée m_2
- La linéarité entre les angles θ , ϕ_d et γ_d est vérifiée, ainsi $\dot{\phi}_d = \dot{\gamma}_d = k \cdot \dot{\theta}$
- La linéarité entre les angles θ et β_d est vérifiée, ainsi $\dot{\beta}_d = k' \cdot \dot{\theta}$

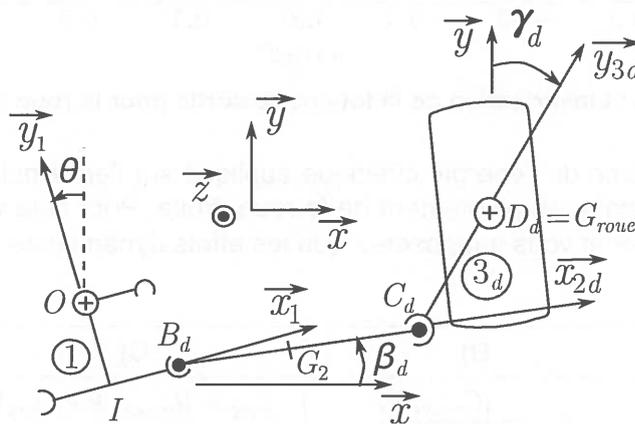


Figure 19 : Rappel de la modélisation et du paramétrage proposé

Question 35. Déterminer le torseur cinématique de $\{V_{2d/0}\}_{B_d}$, en fonction de $\dot{\theta}$

A)

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ r\dot{\theta} \overrightarrow{x_1} + b\dot{\theta} \overrightarrow{y_1} \end{array} \right\}_{B_d}$$

B)

$$\left\{ \begin{array}{c} k'\dot{\theta} \vec{z} \\ r\dot{\theta} \overrightarrow{x_1} - b\dot{\theta} \overrightarrow{y_1} \end{array} \right\}_{B_d}$$

C)

$$\left\{ \begin{array}{c} k'\dot{\theta} \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{B_d}$$

D)

$$\left\{ \begin{array}{c} k'\dot{\theta} \vec{z} \\ r\dot{\theta} \overrightarrow{x_1} + b\dot{\theta} \overrightarrow{y_1} \end{array} \right\}_{B_d}$$

Question 36. En déduire le torseur cinématique de $\{V_{2d/0}\}_{G_2}$, en fonction de $\dot{\theta}$

A)
$\left\{ \begin{array}{c} k' \dot{\theta} \vec{z} \\ \vec{V}_{B_d \in 2d/0} + k' \dot{\theta} \vec{z} \wedge \overrightarrow{B_d G_2} \end{array} \right\}_{G_2}$

B)
$\left\{ \begin{array}{c} k' \dot{\theta} \vec{z} \\ \vec{V}_{B_d \in 2d/0} + \overrightarrow{G_2 B_d} \wedge k' \dot{\theta} \vec{z} \end{array} \right\}_{G_2}$

C)
$\left\{ \begin{array}{c} k' \dot{\theta} \vec{z} \\ \vec{V}_{B_d \in 2d/0} + \overrightarrow{B_d G_2} \wedge k' \dot{\theta} \vec{z} \end{array} \right\}_{G_2}$

D)
$\left\{ \begin{array}{c} k' \dot{\theta} \vec{z} \\ \vec{V}_{B_d \in 2d/0} - \overrightarrow{G_2 B_d} \wedge k' \dot{\theta} \vec{z} \end{array} \right\}_{G_2}$

Pour la suite, on supposera que la vitesse au point G_2 par rapport à 0 se notera $\vec{V}_{G_2/0} = c_x \dot{\theta} \overrightarrow{x_{2d}} + c_y \dot{\theta} \overrightarrow{y_{2d}}$ avec c_x et c_y des grandeurs ayant la même dimension qu'une longueur.

Question 37. Déterminer le torseur cinétique de $\{C_{2d/0}\}_{G_2}$

A)
$\left\{ \begin{array}{c} m_2 \dot{\theta} (c_x \overrightarrow{x_{2d}} + c_y \overrightarrow{y_{2d}}) \\ k' \dot{\theta} (A_2 \overrightarrow{x_{2d}} + B_2 \overrightarrow{y_{2d}} + B_2 \vec{z}) \end{array} \right\}_{G_2}$

B)
$\left\{ \begin{array}{c} c_x \dot{\theta} \overrightarrow{x_{2d}} + c_y \dot{\theta} \overrightarrow{y_{2d}} \\ k' \dot{\theta} (A_2 \overrightarrow{x_{2d}} + B_2 \overrightarrow{y_{2d}} + B_2 \vec{z}) \end{array} \right\}_{G_2}$

C)
$\left\{ \begin{array}{c} m_2 \dot{\theta} (c_x \overrightarrow{x_{2d}} + c_y \overrightarrow{y_{2d}}) \\ B_2 k' \dot{\theta} \vec{z} \end{array} \right\}_{G_2}$

D)
$\left\{ \begin{array}{c} c_x \dot{\theta} \overrightarrow{x_{2d}} + c_y \dot{\theta} \overrightarrow{y_{2d}} \\ B_2 k' \dot{\theta} \vec{z} \end{array} \right\}_{G_2}$

Question 38. Déterminer l'énergie cinétique du solide 2_d dans son mouvement par rapport au bâti (0). L'énergie cinétique est notée $Ec_{2d/0}$

A)
$Ec_{2d/0} = \frac{1}{2} (m_2(c_x^2 + c_y^2) + k'^2 B_2) \dot{\theta}^2$

B)
$Ec_{2d/0} = \frac{1}{2} (m_2^2(c_x^2 + 2c_x c_y + c_y^2) + k'^2 B_2^2) \dot{\theta}^2$

C)
$Ec_{2d/0} = \frac{1}{2} (m_2(c_x^2 + 2c_x c_y + c_y^2) + k'^2 B_2) \dot{\theta}^2$

D)
$Ec_{2d/0} = \frac{1}{2} (m_2^2(c_x^2 + c_y^2) + k'^2 B_2^2) \dot{\theta}^2$

Les différentes énergies cinétiques du système de direction sont données par :

- Energie cinétique du pivotement d'une roue : $Ec_{roue/0} = \frac{1}{2} I_r \dot{\theta}^2$
- Energie cinétique de la pièce 1 : $Ec_{1/0} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2$
- Energie cinétique des pièces 2d et 2g : $Ec_{2d/0} = Ec_{2g/0} = \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}^2$
- Energie cinétique des pièces 3d et 3g : $Ec_{3d/0} = Ec_{3g/0} = \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}^2$
- Energie cinétique de la pièce 4 : $Ec_{4/0} = \frac{1}{2} I_4 \dot{\theta}^2$
- Par symétrie, on supposera que les énergies cinétiques des éléments constituant le train avant et arrière sont égales.
- Pour rappel : Le rapport de transmission entre l'arbre moteur et le pignon de la pièce 1 (voir figure 7) est noté k_{trans} . Ainsi $\frac{\dot{\theta}}{\omega} = k_{trans}$

Question 39. En négligeant l'inertie des pièces du motoréducteur et de l'arbre moteur, déterminer l'inertie équivalente J_{eq} en fonction de I_r, I_1, I_2, I_3 et I_4 . Pour rappel, J_{eq} correspond à l'inertie équivalente de l'ensemble du système de transmission (train avant + train arrière) ramené à l'arbre moteur.

A)
$J_{eq} = (I_4 + 2I_1 + 4 \cdot (I_r + I_3 + I_2))k_{trans}^2$

B)
$J_{eq} = (I_4 + I_1 + 2(I_r + I_3 + I_2))k_{trans}^2$

C)
$J_{eq} = (I_4 + 2I_1 + 4(I_r + I_3 + I_2))k_{trans}$

D)
$J_{eq} = (I_4 + 2I_1 + 4(I_r + I_3 + I_2))/k_{trans}^2$

PARTIE C ETUDE DYNAMIQUE EN VIRAGE

I DYNAMIQUE EN VIRAGE

— Objectif —

Déterminer la hauteur limite d'un objet que l'on transporte à l'aide de l'«Effibot» sans que l'ensemble bascule en phase de virage.

On cherche dans cette partie à déterminer la hauteur d'un objet de masse fixée que l'on peut transporter dans la caisse de l'«Effibot» sans risquer le basculement lors d'un virage ayant un rayon de courbure ρ .

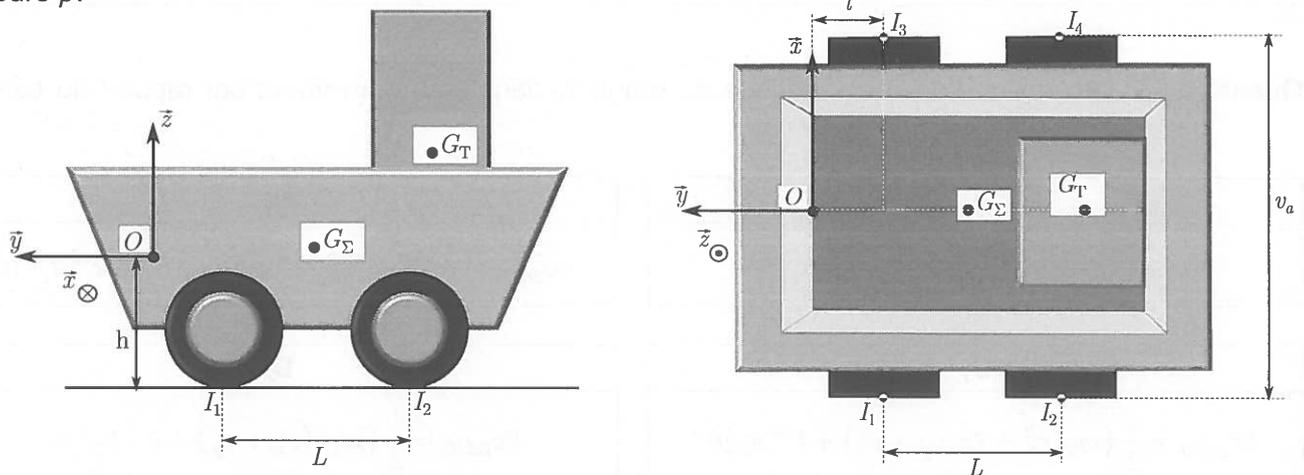


Figure 20 : Paramétrage et dimension utilisés durant l'étude

HYPOTHESES :

- Le repère $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est un repère lié au sol, supposé galiléen pour les conditions de l'étude.
- Le repère $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est un repère lié au bâti (ou caisse) de l'«Effibot».
- L'«Effibot » aborde un virage de courbure ρ constant.
- Pour simplifier les notations, l'«Effibot » sera noté Σ . Le centre de gravité de Σ est noté G_Σ .
- L'objet que l'on transporte est noté T . Le centre de gravité de T est noté G_T .
- T est supposé être un parallélépipède de largeur l_T , de longueur L_T et de hauteur h_T , avec $L_T \neq h_T$.
- L'objet T est supposé fixe dans le repère R au cours du virage.
- La position de G_Σ est : $\overrightarrow{OG_\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_{G_\Sigma} \\ z_{G_\Sigma} \end{pmatrix}_R$.

- La position de G_T est : $\overrightarrow{OG_T} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_{G_T} \\ z_{G_T} \end{pmatrix}_R$.
- Le plan (O, \vec{y}, \vec{z}) est un plan de symétrie de Σ et T .
- Le plan $(G_\Sigma, \vec{x}, \vec{z})$ est un plan de symétrie de Σ .
- Le centre de gravité de l'ensemble $\{\Sigma, T\}$ est noté G .
- Le rayon de courbure du virage ρ est suffisamment grand devant la voie v_a de l'«Effibot » pour négliger l'influence du braquage des roues pour cette étude dynamique.
- On définit $\overrightarrow{O_0G_\Sigma} = \rho\vec{x}$.
- $\vec{V}_{O_0 \in \{\Sigma, T\} / R_0} = \vec{0}$. Le torseur cinématique de l'ensemble $\{\Sigma, T\}$ est noté :

$$\{V_{\{\Sigma, T\} / R_0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dot{\theta} & 0 \end{Bmatrix}_R$$

- L'ensemble $\{\Sigma, T\}$ est donc considéré comme étant en rotation autour de l'axe (O_0, \vec{z})
- La masse de l'Effibot est noté m_Σ .
- La masse de T est noté m_T .
- L'accélération de la pesanteur est notée g .
- La masse et l'inertie des roues sont négligées.
- On admet que le basculement latéral a lieu avant le glissement.
- Le point I_j est un point de la zone de contact entre le pneu j et la route.
- L'action mécanique exercée par le sol sur le pneu j est modélisée par le torseur :

$$\{\tau_{sol \rightarrow p_j}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{sol \rightarrow p_j} \\ \vec{M}_{I_j, sol \rightarrow p_j} \end{Bmatrix}_{I_j} = \begin{Bmatrix} T_j & 0 \\ 0 & 0 \\ N_j & 0 \end{Bmatrix}_R$$

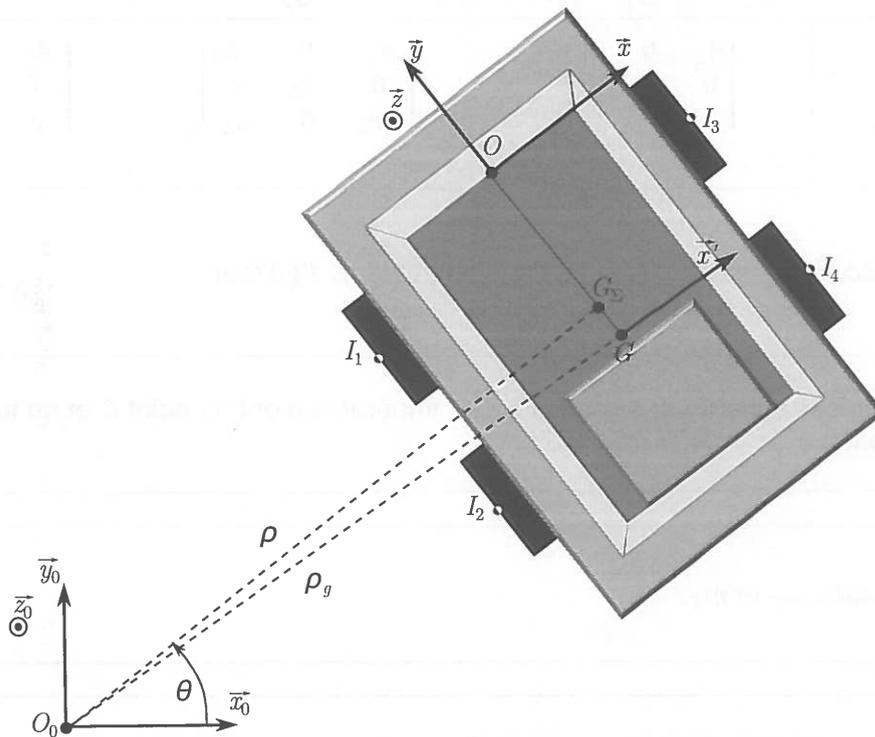


Figure 21 : Vue de dessus de l'Effibot et de son chargement lors d'une phase de virage

Question 40. A quelle condition suffisante, se trouve-t-on à la limite du basculement latéral ?

A)	B)	C)	D)
$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = 0$	$N_1 + N_3 = 0$	$N_1 = N_2 = 0$	$T_1 = T_2 = 0$
$T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 0$	$T_1 = T_3 = 0$		

Question 41. Déterminer la position du centre de gravité G dans la repère R (vecteur \overrightarrow{OG}) de l'ensemble $\{\Sigma, T\}$

A)
$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ y_{G_\Sigma} + y_{G_T} \\ z_{G_\Sigma} + z_{G_T} \end{pmatrix}_R$

B)
$\frac{1}{m_\Sigma + m_T} \begin{pmatrix} 0 \\ m_\Sigma y_{G_\Sigma} - m_T y_{G_T} \\ m_\Sigma z_{G_\Sigma} - m_T z_{G_T} \end{pmatrix}_R$

C)
$\frac{1}{m_\Sigma - m_T} \begin{pmatrix} 0 \\ m_\Sigma y_{G_\Sigma} - m_T y_{G_T} \\ m_\Sigma z_{G_\Sigma} - m_T z_{G_T} \end{pmatrix}_R$

D)
$\frac{1}{m_\Sigma + m_T} \begin{pmatrix} 0 \\ m_\Sigma y_{G_\Sigma} + m_T y_{G_T} \\ m_\Sigma z_{G_\Sigma} + m_T z_{G_T} \end{pmatrix}_R$

Le vecteur \overrightarrow{OG} est alors noté : $\overrightarrow{OG} = y_G \vec{y} + z_G \vec{z}$

Grandeurs inertielles : Matrice d'inertie de Σ en son centre d'inertie G_Σ exprimée dans la base $B = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\bar{I}_{\Sigma, G_\Sigma} = \begin{bmatrix} A_\Sigma & -F_\Sigma & -E_\Sigma \\ -F_\Sigma & B_\Sigma & -D_\Sigma \\ -E_\Sigma & -D_\Sigma & C_\Sigma \end{bmatrix}_B$$

Question 42. D'après la propriété de symétrie de Σ préciser la forme la matrice inertielle $\bar{I}_{\Sigma, G_\Sigma}$

A)	B)	C)	D)
$\begin{bmatrix} A_\Sigma & 0 & 0 \\ 0 & B_\Sigma & -D_\Sigma \\ 0 & -D_\Sigma & C_\Sigma \end{bmatrix}_B$	$\begin{bmatrix} A_\Sigma & 0 & 0 \\ 0 & B_\Sigma & 0 \\ 0 & 0 & C_\Sigma \end{bmatrix}_B$	$\begin{bmatrix} A_\Sigma & 0 & -E_\Sigma \\ 0 & B_\Sigma & 0 \\ -E_\Sigma & 0 & C_\Sigma \end{bmatrix}_B$	$\begin{bmatrix} A_\Sigma & -F_\Sigma & 0 \\ -F_\Sigma & B_\Sigma & 0 \\ 0 & 0 & C_\Sigma \end{bmatrix}_B$

Question 43. Pour calculer la matrice d'inertie de l'ensemble $\{\Sigma, T\}$ il faut :

- | | |
|-----------|--|
| A) | Exprimer les matrices d'inertie des solides Σ et T impérativement au point G et en faire l'addition et dans la même base. |
| B) | Négliger les masses m_Σ et m_T . |
| C) | Faire simplement l'addition des deux matrices $\bar{I}_{\Sigma, G_\Sigma} + \bar{I}_{T, G_T}$. |
| D) | Que les deux matrices d'inertie des solides Σ et T soient exprimées dans la même base et au même point. |

La matrice d'inertie de l'ensemble $\{\Sigma, T\}$ au point G est alors noté : $\bar{I}_{\{\Sigma, T\}, G} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{bmatrix}_B$

Question 44. Quel théorème doit-on appliquer en vue de déterminer la hauteur z_{G_T} provoquant un basculement latéral ?

A)	B)	C)	D)
Théorème de la résultante dynamique appliqué à $\{\Sigma, T\}$ en projection sur \vec{x}	Théorème du moment dynamique appliqué à $\{\Sigma, T\}$ en projection sur \vec{y}	Théorème du moment dynamique appliqué à $\{\Sigma, T\}$ en projection sur \vec{x}	Théorème du moment dynamique appliqué à T en projection sur \vec{y}

L'axe sur laquelle la projection doit être faite pour appliquer le théorème adéquat permettant de déterminer la hauteur z_G provoquant un basculement latéral est noté \vec{u}

HYPOTHESE :

- On suppose en première approximation puisque le rayon de courbure ρ est grand que $\vec{O_0G} = \rho_g \vec{x}' \approx \rho \vec{x}$. Cette hypothèse n'a pour but que d'alléger les calculs.

Question 45. Calculer le torseur cinétique $\{C_{\{\Sigma, T\}/0}\}$ de l'ensemble $\{\Sigma, T\}$ par rapport à R_0 au point G

A)	B)	C)	D)
$\begin{Bmatrix} (m_\Sigma + m_T)\rho\dot{\theta}\vec{y} \\ A\dot{\theta}\vec{x} \end{Bmatrix}_G$	$\begin{Bmatrix} -(m_\Sigma + m_T)\rho\dot{\theta}\vec{y} \\ B\dot{\theta}\vec{y} - D\dot{\theta}\vec{z} \end{Bmatrix}_G$	$\begin{Bmatrix} (m_\Sigma + m_T)\rho\dot{\theta}\vec{y} \\ -D\dot{\theta}\vec{y} + C\dot{\theta}\vec{z} \end{Bmatrix}_G$	$\begin{Bmatrix} -(m_\Sigma + m_T)\rho\dot{\theta}\vec{y} \\ -D\dot{\theta}\vec{y} + C\dot{\theta}\vec{z} \end{Bmatrix}_G$

Quelle que soit votre réponse à la question précédente, on note $\{C_{\{\Sigma, T\}/0}\} = \begin{Bmatrix} mV \vec{y} \\ \vec{\sigma}_{G, \{\Sigma, T\}/R_0} \end{Bmatrix}$ avec

$m = m_\Sigma + m_T$ et $\vec{\sigma}_{G, \{\Sigma, T\}/R_0} = A_{Gx}\dot{\theta} \vec{x} + B_{Gy}\dot{\theta} \vec{y} + C_{Gz}\dot{\theta} \vec{z}$ (avec éventuellement les grandeurs A_{Gx} , B_{Gy} ou C_{Gz} nulles).

Question 46. Exprimer alors le moment cinétique $\vec{\sigma}_{I_3, \{\Sigma, T\}/R_0}$ de $\{\Sigma, T\}$ dans son mouvement par rapport à R_0 au point I_3

A)	B)
$\vec{\sigma}_{G, \{\Sigma, T\}/R_0} + mV\left(-\frac{v_a}{2} \vec{z} + (z_G - h) \vec{x}\right)$	$\vec{\sigma}_{G, \{\Sigma, T\}/R_0} - mV\left(\frac{v_a}{2} \vec{z} + (z_G + h) \vec{x}\right)$
C)	D)
$\vec{\sigma}_{G, \{\Sigma, T\}/R_0}$	$\vec{\sigma}_{G, \{\Sigma, T\}/R_0} + mV\left(-\frac{v_a}{2} \vec{z} + (z_G + h) \vec{x}\right)$

Question 47. Donner alors l'expression de $\frac{d\vec{\sigma}_{I_3, \{\Sigma, T\}/R_0}}{dt}$, le moment dynamique de $\{\Sigma, T\}$ par rapport à R_0 .

A)
$\left. \frac{d\vec{\sigma}_{I_3, \{\Sigma, T\}/R_0}}{dt} \right _{R_0} - m(V \vec{y} \wedge \vec{V}_{I_3/R_0})$

B)
$\left. \frac{d\vec{\sigma}_{I_3, \{\Sigma, T\}/R_0}}{dt} \right _{R_0} + m(\vec{V}_{I_3/R_0} \wedge \vec{V}_{G/R_0})$

C)
$\left. \frac{d\vec{\sigma}_{I_3, \{\Sigma, T\}/R_0}}{dt} \right _{R_0}$

D)
$\left. \frac{d\vec{\sigma}_{I_3, \{\Sigma, T\}/R_0}}{dt} \right _{R_0} - m(\vec{V}_{I_3/R_0} \wedge \vec{V}_{G/R_0})$

Question 48. Déterminer alors la projection sur l'axe \vec{u} du moment dynamique de $\{\Sigma, T\}$ noté $\delta_{I_3, \{\Sigma, T\}/R_0} \cdot \vec{u}$

A)	B)	C)	D)
$B_{Gy} \ddot{\theta} - mV(z_G + h) \dot{\theta}$	$B_{Gy} \ddot{\theta}$	$A_{Gx} \ddot{\theta} - mV(z_G + h) \dot{\theta}$	$B_{Gy} \ddot{\theta} + mV(z_G + h) \dot{\theta}$

Les actions mécaniques s'exerçant sur l'ensemble $\{\Sigma, T\}$ de masse m sont les actions mécaniques du sol sur les quatre pneus (voir HYPOTHESES pages 26-27) ainsi que l'action de la pesanteur modélisée par un torseur glisseur au point G .

Question 49. Calculer la somme des moments projetée sur \vec{u} au point I_3 noté $\vec{M}_{I_3, \{\Sigma, T\}/R_0} \cdot \vec{u}$ des différentes actions mécaniques s'exerçant sur l'ensemble $\{\Sigma, T\}$.

A)	B)	C)	D)
$v_a(N_1 + N_2 - \frac{mg}{2})$	$v_a(N_1 + N_2) - \frac{mg}{2}$	$v_a(N_1 + N_2 - \frac{mg}{4})$	$v_a(N_1 - N_2 + \frac{mg}{2})$

Question 50. En déduire l'équation permettant de déterminer la hauteur z_G à partir de laquelle la limite au basculement latéral est atteinte sous l'hypothèse où $\dot{\theta}$ est constant.

A)	B)	C)	D)
$z_G = \frac{3v_a g}{2V \dot{\theta}} - h$	$z_G = +\infty$	$z_G = \frac{v_a g}{4V \dot{\theta}} - h$	$z_G = \frac{v_a g}{2V \dot{\theta}} - h$